AZ ANALIZIS KÖZÉPISKOLAI TANITÁSÁRÓL

Dr. Duró Lajosné

A középfoku matematikatanitásnak nagy lendületet adott a század elején kibontakozó matematika-oktatási reformmozgalom, amelynek fő célja a matematika tananyag korszerüsitése, a függvény fogalmára alapozott matematikai szemlélet és gondolkodás bevezetése, a differenciál- és integrálszámitás elemeinek tanitása, az oktatás gyakorlati élettel való kapcsolatának kiépitése volt.

Ezek a reformtörekvések hazánkban is hatással voltak a matematika tanitására. Az 1906-ban Beke Manó elnökletével megalakult reformbizottság javaslatainak egyik lényeges része a függvényszerü gondolkodásmód kialakitására vonatkozik. "Ez az a tengely, amely körül egész reformmozgalmunk forog. Természetfelfogásunk leglényegesebb alkotó eleme a mennyiségek közötti összefüggés. Ez az a kép, mely a természetben lefolyó dolgokat ábrázolja. Kell, hogy e kép olvasásában minden müvelt ember gyakorlott legyen. A függvényszerü gondolkodás előkészitését már az első osztályban meg kivánjuk kezdeni, ehhez szükséges a mérések gyakorlása és grafikonok készitése." [1]

Ez a bizottság veti fel először és foglalja határozatba, hogy a differenciál- és integrálszámitás elemeit tanitani kell a középiskolában. Azóta, kisebb-nagyobb megszakitásokkal, a középiskolai matematika tantervek előirják az analizis elemeinek tanitását.

Az analizis tanitása azért is fontos, mert azok a tanulók, akik a középiskola befejezése után nem foglalkoznak matematikával, "érzik, hogy a matematikai képzettségük nem elegendő. A középiskolát végzett, müvelt emberben él az a meggyőződés, hogy neki módjában áll az emberi szellem legkülönfélébb alkotásait élvezni és megérteni. A nyelvi és történeti tudományoknál, az irodalom és a müvészet alkotásainál ez nagyjából igy is van, csak a természettudományok képeznek kivételt. Aki önmüvelődés utján akar a természettudományok és a technika nagy alkotásainak szellemébe behatolni, minduntalan érzi matematikai képzettségének hiányos voltát. Érzi, hogy itt olyan elemek hiányoznak, amelyek önmüvelés utján alig pótolhatók." [2] Ilyen elemek a határérték, a folytonosság, a differenciálhatóság és az integrálhatóság fogalma is. Ezeknek a fogalmaknak a kialakitásához hosszu időre van szükség, ezért a velük való ismerkedést már a középiskola első osztályában el kell kezdeni. Igy a matematikából felsőfoku tanulmányokat folytató tanulók is könnyebben tudják majd matematikai ismereteiket szélesiteni, mélyiteni.

Mit tanitsunk az analizis elemeiből, hogyan, milyen módszerrel? Ezekre a kérdésekre a reformbizottság a következő, ma is helytálló és megszivlelendő választ adta."A differenciál- és integrálszámitásból a középiskolai tananyag keretébe csak annyit illesszünk bele, amennyi e nagyfontosságu módszernek megismerésére, az általános matematikai müveltség és a középiskolai tananyag gazdaságosabb tárgyalása szempontjából szükséges." [1] A tanitás módszerére vonatkozólag általános elvként a következőket kell szem előtt tartani. "Jól meg kell választani az időt, amikor az absztrakt fogalom bevezetendő. Ezt a bevezetést mindig előzze meg a kellő előkészités. Adjuk meg előbb annak az absztrakt fogalomnak tapasztalati, szemléleti, általában érzékelhető elemeit, kapcsoljuk erősen össze a tanulóban meglévő, hasonló rokon, vagy analóg ismeretanyaggal és ugy térjünk rá az absztrakcióra, a fogalmak megalkotására és azoknak a tanuló általános müveltsége szempontjából is értékes anyagon való begyakorlására." [1]

Tanitási tapasztalatból tudjuk, hogy könnyebb a tanulók által már ismert matematikai fogalmakat a gyakorlatban alkalmazni, vagy segitségükkel állitásokat igazolni, mint uj fogalmakat bevezetni, kialakitani. A fogalmakkal való első ismerkedés, a fogalmak kialakitásának kezdeti szakasza nehéz didaktikai feladat. A tanulók ismeretébe tartozó problémákon keresztül kell bennük felkelteni az uj fogalmakkal való megismerkedés igényét, és azt értelmi szintjüknek megfelelően, tudományosan ki is elégiteni.

Igy van ez a határértékkel való ismerkedésnél is. Nem a definicióval kezdjük, nem mondunk mindent azonnal, hanem pl. fizikai, geometriai problémákkal vezetjük be a sorozat fogalmát, és a sorozatok tulajdonságainak vizsgálatával jutunk el a konvergenciához. A bevezetés kapcsán se mondjunk olyan állitást, amit később korrigálni kellene, a speciális esetet ne vegyük általánosnak. Az analizis fogalmainak tulajdonságait, egymással való kapcsolatát tételek formájában fogalmazzuk meg, és bizonyitjuk be. E témakörben vannak olyan tételek is, amelyeket esetleg időhiány vagy kellő ismeret hiányában a középiskolában nem tudunk bebizonyitani. Ezt meg kell mondani a tanulóknak. A konkrét példák vagy geometriai szemléltetés hihetőbbé teheti állitásunkat, de nem bizonyitja.

A továbbiakban az analizis fogalmai bevezetésének, egyik lehetséges utjának kezdeti szakaszát vázoljuk, egy matematikából általános tantervü (egyébként nyelvi tagozatos) III. és IV. osztályban végzett tanitási kisérlet alapján.

Ebben a feldolgozásban a számsorozatokra, a számsorozatok konvergenciájára alapozva vezetjük be a függvény folytonosságát, határértékét, differenciálhányadosát.

Az analizis tanitásának előkészitése

Az analizis tanitását nem a középiskola harmadik osztályában kell elkezdeni, hanem már az első osztályban, gondosan megtervezve az egyes fogalmak kialakitásának folyamatát. Ennek a folyamatnak első szakasza az előkészités, amelyet a következő főbb területeken végzünk.

a) Bővitjük a valós számokról való ismereteket.

b) Készség szintjére emeljük az analizis fogalmai értelmezéséhez szükséges algebrai müveletek végzését.

c) Elmélyitjük a függvény fogalmát, és értelmezzük a leirásához szükséges fogalmakat.

d) Az analizis már megismert fogalmai segitségével további uj fogalmak értelmezését és állitások igazolását készitjük elő.

Nézzük meg kissé részletesebben, néhány konkrét példával is alátámasztva az előkészités egyes területeit.

a) A valós szám fogalmának kialakitása hosszu folyamat, - a matematika tagozatos, vagy a matematika tantárgy blokkos osztályoktól eltekintve - be sem fejeződik a középiskolában. De sokat tehetünk annak érdekében, hogy tanulóink egyre több, a valós számokkal kapcsolatos ismerethez jussanak.

Például már a középiskolai tanulmányok elején,első osztályban kapcsolatot teremthetünk a racionális számok $\frac{p}{q}$ ($p,q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$) alakja, és a tizedestört alakja között. Minden racionális szám felirható véges vagy szakaszos tizedestört alakban. Ennek az állitásnak a megforditását később bizonyitjuk be. Igy jutunk el az irracionális számnak, mint végtelen nemszakaszos tizedestörtnek az értelmezéséhez. Ez a bevezetés igen természetes, kézenfekvő a tanuló számára.Az irracionális számok ilyen értelmezése esetén, annak racionális alsó,- és felső közelitőértékeivel a végtelen sok egymásba skatulyázott intervallumokról is képet alkotnak a tanulók. Megvizsgáljuk, hogy az irracionális és a racionális számok összege vagy szorzata racionális, vagy irracionális szám lesz-e. Két irracionális szám összege és szorzata lehet racionális és irracionális is. Ezeket az állitásokat konkrét példákkal látták be a tanulók.

Érintjük a racionális és irracionális számhalmazok számosságának a kérdését is. Például a 0 és 1 közötti racionális számokat sorozatba tudjuk szedni: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4},$

$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$. Most még csak utalunk arra, hogy az irracionális számok nem rendezhetők sorozatba. Nyilvánvaló a tanulók számára, hogy bármely valós számnál végtelen sok, nála nagyobb természetes szám van.

Konkrét feladatok, például egyenlőtlenségek megoldásánál megvizsgáljuk, hogy egy végtelen sok elemből álló számhalmaznak van-e legnagyobb vagy legkisebb eleme.

b) A határérték algebrai alakjának felhasználásához, pl. egy számsorozat, vagy egy függvény adott helyen vett határértéke létezésének igazolásához elengedhetetlen az $|x-a| < b$ ($|a_n-a| < \varepsilon$, vagy $|f(x_n) - A| < \varepsilon$) alaku egyenlőtlenség megoldása, és vele ekvivalens egyenlőtlenségpárrá való átirása.

c) A régebbi és a jelenlegi középiskolai matematika tanterv lehetőséget biztosit már első és második osztályban arra, hogy minél több függvényt ismerjenek meg a tanulók.

A függvényekkel való ismerkedés első szakaszában a grafikonjuk segitségével, szemlélet alapján vezetjük be a jellemzésükhöz felhasznált fogalmakat, mint például a zéróhely, a monotonság, a helyi szélsőérték, a korlátosság, a töréspont, a folytonosság, vagy inkább a "nemfolytonosság", a szakadási hely fogalmát.

Néhány esetben, például az elsőfoku függvényeknél, a monotonságot vagy a korlátosságot nemcsak a szemléletből fogadjuk el, hanem be is bizonyitjuk.

A függvény folytonosságának és differenciálhatóságának könnyebb lesz az értelmezése, ha már több olyan függvényt is ismernek a tanulók, amely valamely helyen nem folytonos vagy töréspontja van. Ilyen tulajdonságu függvényeket már az első-, és másodfoku függvények segitségével is konstruálhatunk.

Például:

$$x \to \frac{|x-2|}{x-2};$$

$$x \to |x^2-4|$$

$$x \to \begin{cases} 3x, & \text{ha } x \neq 1 \\ 5, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

$$x \to \frac{x^2-4}{x-2}$$

A függvények monotonitásának, helyi szélsőértékének, alulról vagy felülről való korlátosságának definiálása a "minden" és a "van olyan" kvantorok használatát is szükségessé teszi, ezáltal is könnyitve a határérték definicióját.

Két vagy több (de véges sok) függvény összegét, szorzatát és hányadosát is értelmezzük, mielőtt ezen függvények folytonosságáról, vagy differenciálhatóságáról beszélünk.

A függvények transzformációval történő ábrázolását akár az elsőfoku függvényekkel elkezdhetjük, de a másodfoku függvényeknél mindenképpen. Igy fokozatosan megismerkedünk először a legegyszerübb érték, - ill.változótranszformációkkal, majd a transzformációk szorzatával és a geometriai transzformációkkal való kapcsolatukkal.

Igy a tanulók könnyedén ábrázolják azokat a függvényeket, például $x \to \frac{2x+1}{x-1}$; $x \to lg(x-1)^2$; amelyeknek a végesben vagy a végtelenben keressük a határértékét. A függvény grafikus képének ismerete megkönnyiti a határérték szemléletes bevezetését.

d) A sorozatok tanitása során utalunk arra, hogy a már megismert fogalmakkal vagy tételekkel hogyan készithetjük elő a később elsajátitandó ismereteket.

A megfelelő előkészités után a középiskola III. osztályában kezdjük el az analizis tanitását. Az analizis fogalmainak bevezetése többféle módon lehetséges.

Mint már a bevezetőben jeleztük, a számsorozatok konvergenciájára alapozva vezetjük be a függvény folytonosságát, határértékét, differenciálhányadosát és integrálját. E felépitési mód miatt el kellett térni a tantervi előirásoktól, mert a számsorozatok vizsgálatát, kivéve a számtani és mértani sorozatot, III. osztályban végezzük el. Az analizis tanitására biztositott órakeretet nem kellett módositani, talán az alapos előkészités eredményeként.

A matematika egyes fejezeteinek bemutatásakor - általában bevezető órákon - igyekszünk felkelteni a tanulók érdeklődését az adott témakör iránt, ismertetjük az adott témakör kialakulásának matematikatörténeti vonatkozásait.

Az analizis tanitásának elkezdésekor mindezekre jó alkalom nyilik. Olyan problémákat vetünk fel, amellyel a tanulók például a fizika tantárgy keretében találkoztak, sőt értelmezték is, mint a test pillanatnyi sebességét, a változó sebességgel mozgó test utját. Néhány geometriai problémát sem zártunk le az előző évek során, igy nem értelmeztük még a görbevonal érintőjét (csak a kör és a parabola érintője ismert a tanulók számára), vagy nem tudjuk minden sikidom területét kiszámitani.

Vázoljuk ezen problémák megoldásának utját, és rámutatunk arra, hogy a különböző feladatok megoldásánál azonos módon járhatunk el. A közelitő értékekkel, bizonyos feltételek teljesülése esetén megkaphatjuk a pontos értéket.

A számsorozatok tanitása

A közelitő értékek sorozatot alkotnak, most már csak a feltételeket kellene megállapitani. Igy természetes igény, hogy először a sorozatokkal kell megismerkedni.

A számsorozatok c. témakörben a következőkkel foglalkozunk:

A számsorozat fogalma, ábrázolása.
Részsorozat, a sorozatok egyesitése.
Monoton sorozatok, korlátos sorozatok.
Konvergens, divergens sorozatok.
A konvergens sorozatok néhány tulajdonsága.
Müveletek konvergens sorozatokkal.

A számsorozatok (a továbbiakban sorozat) fogalmának kialakitását a bevezető feladatok mellett konkrét sorozatok megadásával is elősegitjük.
Ilyen konkrét sorozatok lehetnek például a következők:

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

(2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$

(3) $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \ldots$

(4) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots \frac{n}{n+1}, \ldots$

(5) $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}, \ldots$

A [0,1] -ben lévő racionális számoknak az ismert "cikk--cakk" eljárással alkotott sorozata

(6) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$

(7) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n, \ldots$

(8) $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \ldots, n, \frac{1}{n}, \ldots$

(9) $2, -2, 2, -2, 2, -2, \ldots (-1)^{n+1} \cdot 2, \ldots$

(10) $5, 5, 5, \ldots 5, \ldots$

Ezek a sorozatok előremutatók abban az értelemben, hogy a sorozatok tulajdonságainak vizsgálatakor hivatkozhatunk e példákra. Mert például van közöttük monoton sorozat (1), (2), (4), (7), korlátos sorozat (1), (2), (3), (4), (5), (6), (9), (10). A (2) sorozat részsorozata az (1) sorozatnak, a (8) sorozat az (1) és (7) sorozat egyesitésével jött létre. Az adott sorozatok között van konvergens, (1), (2), (3), (4), (10), és diver-

gens is (5), (6), (7), (8), (9).
Az (1), (2), (3), (4), (8), (10) sorozatnak egy torlódási helye, az (5) és (9) sorozatnak két torlódási helye, a (6) sorozatnak végtelen sok torlódási helye van.

Ezeket a sorozatokat, illetve véges sok elemét ábrázoljuk is, de, elsősorban nem derékszögü koordináta rendszerben, mint speciális függvényeket, hanem számegyenesen. A sorozatoknak számegyenesen való ábrázolása szemléletesen előkésziti a torlódási hely és a határérték fogalmát.

A sorozatok monotonságának és korlátosságának értelmezését a tanulók is megadják, mert a sorozatok is függvények. A monoton sorozatok egyik oldalról való korlátossága triviális a tanulók számára. Nehezebb feladatnak bizonyult egy sorozat monotonságának vagy korlátosságának tagadása.

A részsorozat és az egyesitett sorozat bevezetése nem öncélu, mert igy további konvergens vagy divergens sorozatokat tudunk képezni. Az igy megalkotott sorozatokat függvények határértékének vagy folytonosságának vizsgálatakor felhasználhatjuk.

Konvergens, divergens számsorozatok

A *torlódási hely* fogalmát a sorozatok ábrázolásával, környezetek segitségével vezetjük be. Például az (1) sorozat elemei "egyre közelebb kerülnek" a nullához, (4) sorozat elemei az egy körül "sürüsödnek", mig a (5) sorozat elemei a nulla és az egy körül is torlódnak.

A szemléletből kiindulva jutunk el a torlódási hely definiciójához, azaz a torlódási hely bármely környezetében a sorozatnak végtelen sok eleme van. (Hogy a környezetekből véges, vagy végtelen sok sorozatelem marad ki, jelenleg nem fontos, majd csak a határérték értelmezésénél térünk ki erre.)

Torlódási hely szempontjából nagyon tanulságos a (6) sorozat, mert ennek a sorozatnak végtelen sok (a sorozat elemeinél is nagyobb számosságu) torlódási helye van.

Ha tovább vizsgáljuk azokat a sorozatokat, amelyeknek csak egy torlódási helyük van, még lényeges eltérést tapasztalunk, például az (1) és a (8) sorozat között, pedig mind a két sorozatnak egy torlódási helye van. Mig a nulla bármely környezetéből az (1) sorozatnak csak véges sok tagja marad ki, végtelen sok a környezeten belül van, addig a (8) sorozatnak a nulla bármely környezetéből végtelen sok eleme marad ki, bár végtelen sok elem van a környezeteken belül is. Igy jutunk el a *sorozat határértékének* bevezetéséhez, *a számsorozat konvergenciájának* "geometriai", környezetekkel történő értelmezéséhez. Vagyis az $\{a_n\}$ sorozatnak az a szám határértéke, ha az a szám bármely környezetéből csak véges sok eleme marad ki (vagy az a szám határértéke az $\{a_n\}$ sorozatnak, ha bármely környezetében benne van a sorozat "majdnem minden" eleme.)

A sorozatok konvergenciájának "geometriai" értelmezése (bizonyos korlátokkal) szemléletes a tanulók számára. Ennek a definiciónak a segitségével látják be, hogy például a 2, -2, 2, -2,... sorozat nem konvergens. Ugyanis nincs olyan szám, amelynek bármely környezetébe beleesne a sorozat majdnem minden eleme, mert meg tudjuk adni bármely adott számnak olyan környezetét, amelyben nincs benne a sorozat majdnem minden tagja. Igy már el is jutottunk a divergens sorozat fogalmához. Divergensnek nevezzük azt a sorozatot, amelyiknek nincs határértéke.

A konvergencia "geometriai" értelmezését könnyen elsajátitják a tanulók, és bizonyitásokban alkalmazzák. Az alábbi tételeket a tanulók aktiv közremüködésével igazoljuk.

Az állandó tagokból álló sorozat konvergens, és a határértéke a sorozat elemével egyenlő.

Ha egy konvergens sorozat tagjai közül véges sokat elhagyunk, vagy véges sokat hozzáveszünk, vagy a sorozat elemeinek sorrendjét felcseréljük, olyan konvergens sorozatot kapunk, amely az eredeti sorozat határértékéhez tart.

A konvergens sorozatnak csak egy határértéke van.

A konvergens sorozat részsorozata is konvergens, határértéke az eredeti sorozat határértékével egyenlő.

Két, azonos határértékü sorozat egyesitése a közös határértékhez tartó sorozat.

Két, különböző határértékü sorozat egyesitésével divergens sorozatot kapunk.

A konvergens sorozat korlátos. - A tétel megforditása nem igaz. A már ismert sorozatokból is tudunk konkrét sorozatot mondani, például 2, -2, 2, -2,... sorozat. Tehát a korlátosság a konvergenciának szükséges, de nem elégséges feltétele.

Ha egy konvergens sorozatnak pozitiv (negativ) szám a határértéke, akkor a sorozat majdnem minden tagja pozitiv (negativ).

A függvény differenciálhányadosa és monotonsága közötti összefüggésnél is felhasználjuk ezt az állitást. Ha egy sorozat határértéke nem nulla, akkor csak véges sok nulla eleme lehet a sorozatnak.

Ezt az állitást a konvergens sorozatok hányadosára vonatkozó tételnél is alkalmazhatjuk, igy elég csak azt kikötni, hogy a nevezőben lévő sorozat határértéke ne legyen nulla.

A konvergens sorozatokra vonatkozó egyenlőtlenségek közül a későbbiek során többször felhasználjuk (pl. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ meghatározásakor) a "rendőr-elv"-nek nevezett egyenlőtlenséget. Ha $a_n \leq b_n \leq c_n$ majdnem minden n-re igaz, és $a_n \to a$, $c_n \to a$, akkor $b_n \to a$.

A sorozat konvergenciája "geometriai" értelmezése jól előkésziti a konvergencia algebrai alakban való definicióját is. Konkrét sorozatot, például az $\frac{1}{n}$ sorozatot vizsgálva először a nulla környezetéről a nulla ugyanolyan tulajdonságu (azaz majdnem minden elemet tartalmazó) szimmetrikus környezetére térünk át. Ennek a szimmetrikus környezetnek a sugarát ε-nal ($\varepsilon > 0$) jelöljük. Ebben a környezetben "valahonnan" kezdve - ezt jelöli majd a küszöbszám - benne vannak a sorozat tagjai. Ezeknek a tagoknak a határértéktől való eltérése kisebb lesz ε-nál. Tehát az $\{a_n\}$ sorozatnak az a szám a határértéke, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan N küszöbszám, hogy ha $n > N$, akkor $|a_n - a| < \varepsilon$.

Ilyen bevezetés mellett a konvergencia kétféle értelmezésének ekvivalenciája nyilvánvaló. Felhivjuk a tanulók figyelmét arra, hogy ezzel a definicióval nem tudjuk kiszámitani a sorozat határértékét, csak bizonyitani vagy cáfolni lehet a határértékre vonatkozó sejtésünket. Erre a feladatok megfogalmazásánál is gondolunk, nem azt mondjuk, hogy számitsuk ki az $\{\frac{n-1}{n}\}$ sorozat határértékét, hanem igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$. Ilyen feladatok megoldása során is kiderül, hogy mennyire értették meg a tanulók a konvergens sorozat fogalmát. Nem elégedhetünk meg az egyenlőtlenség formális megoldásával, hogy

$$\text{ha} \quad \varepsilon > 0, \quad \text{akkor} \quad \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon, \quad \text{mert}$$

$$\left|\frac{-1}{n}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} = N,$$

hanem elemezzük a kapott egyenlőtlenséget, ezáltal látjuk be az adott sorozat konvergenciáját.

Ha a konvergens sorozat definicióját nem értették meg teljesen a tanulók, akkor tévesen is fogalmazzák meg. Legtöbb hiányosság a "minden" és "van olyan" kvantorok téves használatából fakad: "van olyan $\varepsilon > 0, \ldots$" kezdik a definiciót. Ilyenkor egy ellenpélda adása a legmeggyőzőbb a tanulók számára.

Céltudatosan is teremthetünk olyan helyzeteket, adhatunk olyan feladatokat, amelyek tovább mélyitik a tanulókban a konvergens sorozat fogalmát.

Ilyenek az alábbi kérdések is.

Mit mondhatunk az $\{a_n\}$ sorozatról, ha tudjuk, hogy van olyan a, $\varepsilon > 0$ és N szám, hogy ha $n > N$, akkor $|a_n - a| < \varepsilon$?

A tanulók egy csoportja azt állitotta az $\{a_n\}$ sorozatról, hogy az a-hoz konvergál. Ellenpélda - a_n: 2, -2, 2, -2,... , sorozatnál legyen az $a = 0$, $\varepsilon = 4$ - meggyőzte őket arról, hogy ilyen feltételek mellett csak az $\{a_n\}$ sorozat korlátosságát állithatjuk.

Adjunk meg olyan $\{b_n\}$ sorozatot, amelyre bármely $\varepsilon > 0$ és $N > 0$ mellett teljesül, hogy ha $n > N$, akkor $|b_n - 1| < \varepsilon$.

Igaz-e a következő állitás?

Ha egy sorozatnak egy torlódási helye van, akkor konvergens. Az állitás hamis voltát a bevezető $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \ldots$ sorozattal is igazolhatjuk.

A tanulókban felmerül a kérdés, hogy milyen kapcsolat van a sorozat torlódási helye, korlátossága és monotonsága között. Válaszként, de bizonyitás nélkül utalunk a korlátos monoton sorozat konvergenciájára és Weierstrass-tételére, hogy minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

A konvergencia u.n. "ε-os" definiciójával is bizonyithatunk sorozatokra vonatkozó tételeket. Például, ha $|a_n| \to 0$, akkor $a_n \to 0$. $(||a_n| - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - 0| < \varepsilon)$. További, vagy már ismert tételek ujabb bizonyitására időhiány miatt nem került sor.

A divergens sorozatokat már a konvergens sorozatok bevezetésénél értelmeztük, de most lehetőségünk van arra, hogy a továbbiak szempontjából fontos, speciális divergens (valódi divergens) sorozatokat is definiáljunk.

Az 1, 2, 3, 4, ... sorozatot vizsgálva a tanulók többféle definicióval próbálkoztak, igy "ez a sorozat felülről nem korlátos", vagy "a sorozatnak nincs torlódási helye", vagy "a ∞ környezeteiben a sorozatnak majdnem minden eleme benne van". Az első két "definició" alkalmatlanságáról ellenpéldák adásával győződhetünk meg. Az 1, -1, 2, -2, 3, -3,... sorozat nem korlátos felülről és nincs is torlódási helye, mégis más tulajdonságai vannak, mint a pozitiv egész számok sorozatának.

A tanulók által adott "környezetes" (a konvergencia analógiájára) értelmezéssel jutunk el a divergens sorozat fogalmához és irjuk fel egyenlőtlenséggel is. Az $\{a_n\}$ sorozat a ∞-be divergál, ha bármely $K > 0$ számhoz van olyan N, hogy ha $n > N$, akkor $a_n > K$. Hasonlóan fogalmazzuk meg a $-\infty$-be divergáló sorozat definicióját is.

A ∞-be, ill. a $-\infty$-be divergáló sorozatokkal való ismerkedést segiti elő, néhány egyszerü állitás igazolása is, mint például a ∞-be divergáló sorozat részsorozata is a ∞-be divergál. A konvergens és a valódi divergens sorozatok közötti kapcsolatra a következő tétellel utalunk. Ha $a_n \to \infty$ (vagy $a_n \to -\infty$), akkor $\frac{1}{a_n} \to 0$. Ennek a tételnek a megforditását az első pillanatban igaznak vélték a tanulók, de korábbi példára hivatkozva, $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \ldots$ sorozat a nullához tart, a reciproksorozat pedig nem valódi divergens sorozat - belátták az állitás hamis voltát.

Ha a feltételeket bővitjük, akkor a következő, a tanulók által kimondott és igazolt állitáshoz jutunk.

Ha $a_n \to 0$ és $a_n > 0$, akkor $\frac{1}{a_n} \to \infty$, illetve

ha $a_n \to 0$ és $a_n < 0$, akkor $\frac{1}{a_n} \to -\infty$

Ezeket a tételeket a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$, és a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ meghatározásánál is felhasználhatjuk.

Müveletek konvergens és divergens sorozatokkal

A konvergens és divergens sorozatok ismerete után térünk át a sorozatokból alapmüveletekkel kapott sorozatok vizsgálatára. Az itt bebizonyitott vagy elfogadott tételek segitségével ujabb sorozatok határértékét tudjuk majd kiszámitani. A folytonos függvényekből, a differenciálható függvényekből alapmüveletekkel kapott függvények folytonosságát, ill. differenciálhatóságát is ezekre a tételekre alapozzuk.

A rendelkezésre álló idő rövidsége miatt nem volt arra lehetőségünk, hogy minden müveleti tételt igazoljunk. Talán egyes tételek bizonyitása nagy erőfeszitést is kivánt volna a tanulók többségétől.

Csak a két konvergens sorozat összegére vonatkozó tételt igazoltuk, mert ehhez csak a háromszög-egyenlőtlenségére, és a konvergencia "ε-os" definiciójára volt szükségünk.

A tanulók számára nagyon természetesek voltak a bizonyitás nélküli kimondott müveleti tételek állitásai is. Ezek a tételek két állitást tartalmaznak: az egyik, hogy a müvelettel kapott sorozat konvergens, a másik, hogyan számitható ki a müveletben résztvevő sorozatok határértékével a kapott sorozat határértéke.

Az analizis bevezetése során is megragadunk minden alkalmat a tanulók logikai készségének fejlesztésére, konkrét példák kapcsán már utaltunk erre. Itt egy ujabb lehetőség kinálkozik. Igaz-e a konvergens sorozatok összegére vonatkozó tétel megforditása? A tanulók többsége ugy érezte, hogy igaz. Ellenpélda meggyőzte őket állitásuk hamis voltáról.

Az ellenpélda legyen:

$$a_n : 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1, \dots$$

$$b_n : -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1, \dots$$

akkor $\quad a_n+b_n : 0,\ 0,\ 0, \dots$

és $\quad a_n+b_n \to 0.$

Az igy kapott állitást ugy is megfogalmazzuk, hogy az összeg konvergenciájának a tagok konvergenciája elegendő feltétele. Hasonló jellegü problémát tartalmaz a következő kérdés is. Igaz-e, hogy ha $a_n \cdot b_n \to 0$, akkor vagy $a_n \to 0$, vagy $b_n \to 0$?

A konvergens sorozatok hányadosára vonatkozó tétel segitségével olyan számsorozatok határértékét is ki tudjuk számitani, amelynek n-edik tagja n-nek olyan racionális törtfüggvénye, amelyben a számláló és a nevező egyenlő fokszámu, vagy a számláló fokszáma kisebb a nevező fokszámánál.
A racionális törtfüggvény végtelenben vett határértéke kiszámitásánál felhasználjuk ezeket az ismereteket.

A konvergens sorozatok szorzatára vonatkozó tétel kimondása után az érdeklődőbb tanulóknak sikerült bizonyitani a következő tételt. Ha $\{a_n\}$ korlátos sorozat, és a $\{b_n\}$ sorozat nullához tart, akkor $\{a_n \cdot b_n\}$ sorozat is 0-hoz tart.

Ez a megállapitás előkésziti a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$ kiszámitását.

A konvergens sorozatokra vonatkozó müveleti tételek ismerete után természetesen adódik a kérdés, hogyan végezhetünk müveleteket valódi divergens sorozatokkal?

Két a ∞ -be divergáló sorozat összege - a tanulók sejtése szerint - a ∞ -be divergáló sorozat lesz. Ez a sejtés igazolható.

A tanulók szerint két ∞ -be divergáló sorozat különbsége a nullához tart. Megdöbbentő volt a számukra, hogy ez nem mindig van igy.

Például: legyen $a_n := n + c$, $(c \in R)$, $a_n \to \infty$

és $b_n := n$, $b_n \to \infty$

akkor $a_n - b_n := (n + c) - n = c$

$a_n - b_n \to c$,

Meglepő, hogy két a ∞ -be divergáló sorozat hányadosa nem szükségképpen egyhez tartozó konvergens sorozat. Például,

ha $a_n := cn^2$, $(c \in R)$

és $b_n := n^2$,

akkor $\frac{a_n}{b_n} := \frac{cn}{n^2} = c$;

$\frac{a_n}{b_n} \to c$, holott $a_n \to \infty$ és $b_n \to \infty$

vagy, ha $a_n := n^2$, $a_n \to \infty$

és $b_n := n$, $b_n \to \infty$

akkor $\frac{a_n}{b_n} := \frac{n^2}{n} = n$, $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$, valódi divergens sorozat.

A ∞ -be, illetve a ∞ -be divergáló és konvergens sorozat szorzatára vonatkozó tételeket a definiciók segitségével bebizonyitják a tanulók is. Ezek az ismeretek a racionális törtfüggvény ∞ -ben vett határértékének kiszámitásánál, - ha a számláló magasabb fokszámu a nevezőnél, - jól felhasználhatók.

A ∞ -be divergáló és a nullához tartó sorozat szorzatára vonatkozó állitás szintén meglepő a tanulók számára. Ebben az esetben konkrét sorozatok vizsgálata a meggyőzés erejével hat. Például,

legyen $a_n := \frac{1}{n}$, $a_n \to 0$

$b_n := n^2$, $b_n \to \infty$

akkor $a_n \cdot b_n := \frac{1}{n} \cdot n^2 = n$, $a_n \cdot b_n \to \infty$,

vagy, ha $a_n := \frac{c}{n} (c \in R)$, $a_n \to 0$

$b_n := n$ $b_n \to \infty$

akkor $a_n \cdot b_n := \frac{c}{n} \cdot n = c$, $a_n \cdot b_n \to c$.

A konvergens és divergens sorozatok vizsgálatánál a konkrēt feladatok között szerepelt a q^n alaku sorozat. A tanulók csak konkrét q értékek segitségével $[(\frac{1}{2})^n;\ (-1)^n;\ 2^n;\ (-3)^n]$ sejtik meg, hogy ezek a sorozatok milyen q értékre konvergensek, ill. divergensek.

Ezeket a sejtéseket - amelyek bizonyitható állitások - a mértani sor összegének kiszámitásakor felhasználhatjuk.

A tanulók részéről élénk érdeklődés kisérte a sorozatok tanitását. Sajnos a rendelkezésre álló idő alatt többet nem tudtunk még elmondani sem - nemhogy bizonyitani - a sorozatokról.

A számsorozatokról tanultakat jól felhasználhatjuk, igy el is mélyitjük az analizis további fogalmainak értelmezésekor.

A függvény folytonossága

A tanulóknak már van egy szemléletes képük a függvény intervallumon való folytonosságáról. Először a pontbeli folytonosságra, vagy méginkább a pontbeli "nemfolytonosságra" irányitjuk a figyelmet. A "nemfolytonosságról" él egy szemléletes kép a tanulókban, a függvény grafikus képe "megszakad". Erre a szemléletes képre támaszkodva, néhány konkrét függvény segitségével vezetjük be a pontbeli folytonosság fogalmát. A bevezető függvények között olyan függvény is van, amely az adott x_o helyen folytonos, olyan is, amelyik az x_o helyen nem folytonos, mert vagy nincs az x_o-ban értelmezve, vagy azért, mert nincs az x_o-ban határértéke, vagy azért, mert az x_o-ban a határértéke nem egyenlő az x_o -ban vett helyettesitési értékkel.

Például a következő függvényekből kiindulva, a grafikus képükre támaszkodva vizsgáljuk meg, hogy folytonosak vagy nem folytonosak az $x_o = 3$ helyen.

Legyen

(11) $$x \to \begin{cases} 2x+1\ , & \text{ha} \quad x \neq 3 \\ 5\ , & \text{ha} \quad x = 3 \end{cases}$$

(12) $x \to 2x + 1$

(13) $x \to \frac{1}{x}$

(14) $x \to \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

(15) $x \to \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \geq 3 \\ 2, & \text{ha} \quad x < 3 \end{cases}$

Szemléletünk alapján a (12) és (13) függvény folytonos az $x_o = 3$ helyen. A függvény pontbeli folytonosságát a szemlélettel összhangban ugyan, de attól elvonatkoztatva matematika fogalmakkal kellene értelmezni. Ezért vizsgáljuk meg, hogy miben különbözik a (12) és (13) függvény a többi adott függvénytől.

Az adott függvények mindegyike értelmezve van az $x_o = 3$ környezetében, és az $x_o = 3$-ban is, kivéve a (14) függvényt. Ez a feltétel csak szükséges a pontbeli folytonossághoz, mert például a (12) és (15) függvény értelmezve van $x_o = 3$ környezetében az $x_o = 3$ -at is beleértve, és a (15) függvényt a szemlélet alapján nem tekintjük folytonosnak.

Most segitségül vesszük azokat az $\{x_n\}$ számsorozatokat, amelyek $x_n \to 3$ és $x_n \in U$, ahol U az $x_o = 3$ olyan környezete, amelyben a függvény értelmezve van. Képezzük az $\{x_n\}$ sorozatokhoz a megfelelő függvényértékek sorozatát, és vizsgáljuk meg az igy kapott sorozatokat konvergencia szempontjából.

A (12) és (13) függvény esetében minden $x_o \to 3$ sorozathoz tartozó függvényértékek sorozata konvergens és a függvény $x_o = 3$ -ban felvett helyettesitési értékéhez tart. A (11); (14) és (15) függvényeknél mindez nem teljesül.

Igy is eljuthatunk - a számsorozatok konvergenciájára épitve - a folytonosság szemléletes értelmezésétől annak matematikai megfogalmazásáig.

Az f függvényt az x_o-ban folytonosnak nevezzük, ha f értelmezve van x_o valamely környezetében, és ha minden olyan $\{x_n\}$ sorozatra, amely x_o-hoz tart, a $\{f(x_n)\}$ függvényértékek sorozata $f(x_o)$-hoz tart.

A függvény pontbeli folytonosságának elmélyitését néhány konkrét függvény, például polinomfüggvény adott x_o helyen való folytonosságát igazoljuk a definició segitségével.

Igen tanulságos az $x \to \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$

függvény pontbeli folytonosságának vizsgálata. Ez a függvény egyetlen x_o-ban sem folytonos, mert ha $\{x_n\}$ olyan sorozat, hogy végtelen sok racionális és végtelen sok irracionális számot tartalmazva tart x_o-hoz, akkor a megfelelő függvényértékek sorozata divergens.

Az $x \to \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ x^2, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$

függvény "grafikus képe" is arra enged következtetni, hogy ez a függvény sem folytonos egyetlen x_o-ban sem. Pedig ez a függvény az $x_o = 0$ és $x_o = 1$ helyen folytonos, az adott definició szerint.

Néhány függvény segitségével értelmezzük a függvény egyoldali folytonosságát, ezt felhasználva jutunk el a függvény intervallumon való folytonosságának definiálásához.

Folytonos függvényekből, például alapmüveletekkel ujabb folytonos függvényeket kapunk. Az erre vonatkozó (lokális) tételeket a számsorozatoknál megismert tételekre, és a folytonosság pontbeli definiciójára hivatkozva bizonyitjuk. Ily módon a racionális törtfüggvények folytonosságát meg tudjuk állapitani.

Ajánlatos egy kis időt szánni "elbeszélés szintjén", konkrét függvényekre hivatkozva, hogy milyen sok "jó tulajdonsága" van a zárt intervallumon folytonos függvénynek. A későbbiek során a zárt intervallumon folytonos függvény néhány tulajdonságát felhasználjuk, például az előjeltartást a függvényvizsgálatnál, vagy korlátosságot és a szélsőérték létezését a határozott integrál értelmezésekor.

A folytonosság értelmezésével a matematikai fogalomalkotásnak egy sajátos utját mutatjuk be. A szemléletre, a függvény grafikus képére támaszkodva olyan értelmezést adunk, amellyel már elszakadunk a szemlélettől, és olyan függvényekről is el tudjuk dönteni, hogy folytonosak-e vagy sem, amelyeknek a grafikonjuk fel sem rajzolható.

Igy a függvény folytonosságának fogalma a szemléletes képtől elvonatkoztatva önállóan is létezik. A függvény folytonosságának ismerete után ugyancsak számsorozatok segitségével értelmezzük a függvény adott helyen vagy a ∞-ben vett határértékét.

A kisérleti tanitás azt igazolta, hogy az analizis elemeinek tanitása a sorozatokra támaszkodva sem tartalmában, sem formájában nem megterhelő a tanulók számára. Elsősorban a differenciál,- és integrálszámitás gyakorlati alkalmazása volt meggyőző sok tanuló számára, de egyes elméleti kérdések,például a konvergens számsorozatok tulajdonsága iránt is érdeklődtek.

IRODALOM

[1] BEKE Manó - MIKOLA Sándor: A középiskolai matematika tanitás reformja. Franklin Társulat, Budapest, 1909.

[2] MIKOLA Sándor: A középiskolai matematika oktatás reformja ügyében keletkezett bizottság megalakulásának és müködésének története. Franklin Társulat, Budapest, 1909.

[3] ALEXITS György: Tanitsunk-e a középiskolában infinitézimális számitást? Mennyiségtani és Természettudományi Didaktikai Lapok I. évf. 5.sz.,1943.

[4] BEKE Manó: Bevezetés a differenciál és integrálszámitásba. Gondolat Kiadó, Budapest, 1965.

[5] CSER Andor: A hazai matematikatanitás vázlatos története. Tantárgytörténeti tanulmányok II., Tankönyvkiadó, Budapest, 1963.

[6] CSER Andor: Differenciálszámitás. Kiegészitő a Matematika a gimnázium III. osztálya számára c. tankönyvhöz. Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.

[7] CZAPÁRY Endre - HORVAY Katalin - PÁLMAI Lóránt: Matematika a gimnáziumok és szakközépiskolák III. osztálya számára. Tankönyvkiadó,Budapest,1967.

[8] N. DINCULEANU - E. RADU: A matematikai analizis elemei. Tankönyv a XI. reálszakos osztály számára.Tanügyi és Pedagógiai Könyvkiadó, Bukarest, 1964.

[9] N.K. GREBENCSA - SZ.I. NOVOSZELOV: Matematikai analizis. Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.

[10] KALMÁR László: Analizis I. Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest, 1959.

[11] KÓSA András: Tanitsunk-e analizist a középiskolában? Az ELTE Természettudományi Karának Szakmódszertani Közleményei, 1974.

[12] LEINDLER László: Analizis I., Szeged, 1972.

[13] RÉNYI Alfréd: Dialógusok a matematika tanitásáról. Magvető Kiadó, Budapest, 1973.

[14] SZŐKEFALVI-NAGY Béla: Matematika a középiskolában. Köznevelés, 1973. 9.sz.

[15] Tanterv a gimnáziumok számára, 1965.

[16] Algebra és az analizis elemei. Segédkönyv a középiskolák 9. és 10. osztálya számára, Kijev, 1977.

THE TEACHING OF ANALYSIS IN SECONDARY SCHOOLS

by

Mrs. Lajos Duró

Summary

The teaching of the elements of analysis in secondary schools was regarded as important and necessary by the mathematical education reform committee operating at the beginning of the century. Apart from certain interruptions, analysis has been taught in secondary schools since that time.

Education in this topic is a very beautiful, but not easy didactic task. The preparation and introduction of the concept of analysis is possible in various ways. The concepts of analysis are introduced into the study on the basis of numerical series and the convergence of numerical series, with reference to school experiments. The thorough preparation of these concepts is considered to be very important; this includes the broadening of the knowledge of real numbers, the application of the necessary algebraic knowledge at the level of ability, and the deepening of the concept of the function. Examples are also given for preparation within the topic.

The initial stages in the teaching of analysis are presented, with the study of numerical series and the introduction of the continuity of a function, which precedes the knowledge of the limiting value of the function.

The properties of numerical series are examined in greater detail. The most difficult task is the introduction of the convergence of series; accordingly, the environmental (geometric) interpretation is given first, followed by the "ε", algebraic form. Some fairly simple propositions relating to convergent and divergent series are similarly proved.