Замечание к теореме о полноте системы конечных автоматов

F. FERENCZY

В настоящей статье мы указываем на ошибку в доказательстве теоремы о полноте системы конечных автоматов и исправим ее. Эта теорема первый раз была опубликована в статье А. А. Летичевского [1] и мы будем предполагать знакомство читателя с этой работой.

Упомянутая теорема А. А. Летичевского гласит:

Для того, чтобы система автоматов обладала свойством полноты, необходимо и достаточно, чтобы она содержала автомат с разделяющим состоянием.

Доказательство достаточности этой теоремы в [1] опирается, в частности, на тот факт что, используя автомат с разделяющим состоянием, можно реализовать автомат, имеющий соединимую систему множеств. Рассматриваются два типа автоматов с разделяющим состоянием a_0, которые мы будем называть α-автоматами и β-автоматами, соответсвенно. Именно, в случае $a_1 \neq a_0$ и $a_1' \neq a_0$ мы говорим об α-автомате, а в случае $a_1 = a_0 - 0$ β-автомате.

В доказательстве для случая α-автомата, используются пути вида

$$s = (a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_0)$$

и

$$s' = (a_1', a_2', \dots, a_{n-1}', a_0)$$

в этом автомате. Хотя этот факт не подчеркивается, ясно, что требуется от каждого из этих путей не повторять состояния, т. е. $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$ в s, и $a_0 \neq a_i'$, $a_i' \neq a_j' (i \neq j)$ в s'. Между тем выясняется, что применяя к α-автоматам способ, указанный в [1], нельзя всегда получить автомат, обладающий соединимой системой множеств. Рассмотрим для примера автомат $\mathscr{A} = (A, X)$ с множеством состояний $A = \{a_0, a_1, a_1', b\}$ и множеством входов $X = \{x_0, y_0\}$, со следующей таблицей переходов:

	a_0	a_1	a_1'	b
x_0	a_1	a_0	a_1	b
y_0	a_1'	b	b	b

Поскольку $a_0 x_0 = a_1$, $a_1 x_0 = a_0$, и $a_0 y_0 = a_1'$, $a_1' x_0 = a_1$, $a_1 x_0 = a_0$, то a_0 есть разделяющее состояние автомата $\mathscr{A} = (A, X)$, и в качестве используемых путей имеем:

$$s = (a_1, a_0), \qquad s' = (a_1', a_1, a_0).$$

Согласно доказательству проведенному в [1], мы построим автомат $\mathscr{A}^5$ — прямое произведение, в которое $\mathscr{A}$ входит 5 раз. Пусть состояния, принадлежащие V, будут $u=(a_1, a_1, a_0, a_0, a_1')$ и $v=(a_1, a_1, a_1', a_0, a_0)$. Если мы теперь переведем u в состояние, принадлежащее V_1, а v в состояние, принадлежащее V_2, способом указанным в [1], получим одно и то же состояние $(a_0, a_0, a_1, a_1', a_1)$, и оказывается неправильным утверждение о том, что множества V_1 и V_2 — непересекающиеся. Этот неприятный факт случается очевидно из-за того, что состояние a_1 входит и в путь s', т. е. $a_2'=a_1$.

Отсюда видно, что доказательство возможности реализации автомата со соединимой системой множеств с помощю α-автомата в [1] остается в силе только тогда, когда в α-автомате найдутся пути s и s', непересекающиеся ни в одном из состояний a_1 и a_1'. α-автоматы с этим свойством назовем α_1-автоматами. Рассмотренный пример автомата $\mathscr{A}=(A, X)$ одновременно показывает, что существуют α-автоматы не являющиеся α_1-автоматами. Такие α-автоматы назовем α_2-автоматами.

Мы теперь покажем, что используя α_2-автомат также возможно реализовать автомат, имеющий соединимую систему множеств. Легко видеть, что у каждого α_2-автомата найдутся пути s и s', не повторяющие состояния и пересекающиеся только в одном из состояний a_1 и a_1'. Предположим, что у α_2-автомата $\mathscr{A}$, s и s' пересекаются в a_1. Это значит, что для подходящего $k(1 \leqq k \leqq n-2)$ имеем $a_{k+1}'=a_1$. Можем убедиться также, что состояние a_k', предшествующее состоянии a_1 в пути s', не входит и в путь s. Когда бы это сучилось существовали бы и такие пути s и s', которые не пересекаются ни в одном из состояний a_1 и a_1', т. е. тогда автомат $\mathscr{A}$ не может быть α_2-автоматом.

Строим автомат $\mathscr{A}^{2(m+n)}$ — прямое произведение, в которое $\mathscr{A}$ входит $2(m+n)$ раз. В этом автомате рассмотрим множество V состояний, обладающих свойством: каждое $a_i (i \neq 0)$ и a_i' входит в качестве компоненты 2 раза; если для некоторых состояний выполняются равенства вида $a_i=a_j'$, то такие состояния должны входить 4 раза: два раза в качестве a_i и два раза в качестве a_j'; состояние a_0 входит в качестве компоненты 4 раза. Так, в каждом состоянии из V, a_1 имеет точно 4 вхождений, а a_1' и a_k' — точно 2 вхождений в качестве компоненты. Разобьем множество V на два непересекающиеся множества V_1 и V_2 так, чтобы V_1 содержало те и только те состояния из V, у которых ни одна компонента, равная a_1, не расположена между двумя компонентами, равными a_1'. Так как у каждого состояния v, принадлежащем V, есть два компонента, равных a_0, между которыми не расположен ни один компонент, равняющийся a_k', и одновременно существуют два компонента, равных a_0, между которыми расположен по крайней мере один компонент, равняющийся a_0, то имеются входы z_1 и z_2 такие, что vz_1 и vz_2 принадлежат V_1 и V_2 соответственно, т. е. V_1 и V_2 образуют соединимую систему множеств.

A remark on the theorem of the completenes of the systems of finite automata

The author showed that the proof of the following theorem of A. A. Letičevskij, *A system of finite automata is complete if and only if contains an automaton whith a dividing state*, published in his paper *Uslovyja polnoty dlja konečnyh avtomatov* (Zurnal vyčislitel'noj matematiki i matematičeskoj fiziki, v. 4, 1961, pp. 702—710), conatins an error and corrected it.

Namely, in the sufficiency proof two classes of automata whith dividing state were considered. However the proof for the first class cannot be applied to all the automata which should be covered by the class. Therefore, in the present paper the author has divided the first mentioned class into two subclasses and has completed the proof for the mentioned subclass for which the origina Letičevskij-s proof was not applicable.

Литература

[1] Летичевский, А. А., Условия полноты для конечных автоматов, *Журнал вычислительной математики и математической физики,* т. 4, 1961, стр. 702—710.

(Поступило 11-ого февраля 1971 г.)