Über das identische Verschwinden der Variation.

Von JOSEF KÜRSCHAK.

§. 1. Für einfache Integrale gilt bekanntlich der

Satz A: *Die linke Seite der zur Variation von*

$$\int_a^b f(x, y, y', \ldots y^{(n)})\, dx$$

gehörigen Hauptgleichung

$$V(f) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = 0$$

verschwindet dann und nur dann identisch, wenn f in der Gestalt

$$(1) \quad f = \frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x} + y' \frac{\partial w}{\partial y} + y'' \frac{\partial w}{\partial y'} + \ldots + y^{(n)} \frac{\partial w}{\partial y^{(n-1)}}$$

darstellbar ist, wo w ausser x und y nur noch

$$y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$$

enthält.

Für doppelte Integrale betrachtet man[1]) als das Analogon hiervon den

Satz B: *α) Sind w_1 und w_2 irgendwelche Funktionen*[2]) *der unabhängigen Veränderlichen x und y, der von diesen abhängigen Veränderlichen z, ferner einer endlichen Anzahl von Ableitungen*

$$p, q; r, s, t; \ldots$$

[1]) *L. Koenigsberger,* Über das identische Verschwinden der Hauptgleichungen der Variation vielfacher Integrale. Mathem?' Annalen, Bd. 62 (1906), S. 118–147. — Besonders S. 132.

[2]) Um tiefer liegende Überlegungen zu vermeiden, verstehe ich unter Funktionen stets nur *analytische* Funktionen. Den Bereich, in dem die Funktionen betrachtet werden, denke ich mir so eingeschränkt, dass dort die betrachteten Funktionen regulär sind.

und setzen wir

$$f = \frac{d\,w_1}{d\,x} + \frac{d\,w_2}{d\,y}$$

$$= \frac{\partial\,w_1}{\partial\,x} + p\,\frac{\partial\,w_1}{\partial\,z} + r\,\frac{\partial\,w_1}{\partial\,p} + s\,\frac{\partial\,w_1}{\partial\,y} + \dots$$

$$+ \frac{\partial\,w_2}{\partial\,y} + q\,\frac{\partial\,w_2}{\partial\,z} + s\,\frac{\partial\,w_1}{\partial\,p} + t\,\frac{\partial\,w_2}{\partial\,q} + \dots,$$

so verschwindet die linke Seite der zur Variation von

$$\iint f\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ \dots)\,d\,x\,d\,y$$

gehörigen Hauptgleichung

$$V(f) = \frac{\partial\,f}{\partial\,z} - \frac{d}{d\,x}\,\frac{\partial\,f}{\partial\,p} - \frac{d}{d\,y}\,\frac{\partial\,f}{\partial\,y}$$

$$+ \frac{d^2}{d\,x^2}\,\frac{\partial\,f}{\partial\,r} + 2\,\frac{d^2}{d\,x\,d\,y}\,\frac{\partial\,f}{\partial\,s} + \frac{d^2}{d\,y^2}\,\frac{\partial\,f}{\partial\,t}$$

$$- \dots = 0$$

identisch.

β) Umgekehrt: verschwindet $V(f)$ für irgend eine Funktion

$$f\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t\ \dots)$$

von x, y, z und einer endlichen Anzahl von Ableitungen der von x und y abhängigen Veränderlichen z identisch, so lassen sich immer zwei solche Funktionen

$$w_1\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ \dots),$$

$$w_2\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ \dots)$$

bestimmen, dass

$$f = \frac{d\,w_1}{d\,x} + \frac{d\,w_2}{d\,y} \tag{2}$$

ist.

Ist dabei f von der Ordnung n (d. h haben die in f vorkommenden höchsten Ableitungen von z die Ordnung n) *und f in den Ableitungen n-ter Ordnung von z linear, so lassen sich w_1 und w_2 so bestimmen, dass sie die Ableitungen von z nur bis zur $(n-1)$-ten Ableitung enthalten.* (Im Falle $n=1$ vird f stets so beschaffen sein.) *Ist f von der Ordnung n, jedoch in den Ablei-*

tungen n-ter Ordnung von z nicht linear, *so müssen wir in der Darstellung* (2) *auch n-te Ableitungen zulassen, allerdings nur in linearer Weise.*

So z. B. kann die funktion

$$f = r\,t - s^2,$$

für die $V(f)$ identisch gleich Null ist, in der Gestalt

$$f = \frac{d}{dx}\,\frac{p\,t - q\,s}{2} + \frac{d}{dy}\,\frac{q\,r - p\,s}{2}$$

dargestellt werden, jedoch nicht in einer solchen Gestalt (2), in der w_1 und w_2 nur x, y, z, p, q enthielten.

Im Folgenden werde ich auf ein anderes Analogon von Satz **A** hinweisen.

§ 2. Ich beginne mit dem folgenden Satze, der im Grunde nur eine neue Fassung von Satz **B** α) ist:

Satz C. *Sind*

$$\varphi_1,\ \psi_1,\ \varphi_2,\ \psi_2;\ \ldots;\ \varphi_m,\ \psi_m$$

irgendwelche Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x, y, der von diesen abhängigen Veränderlichen z und einer endlichen Anzahl von Ableitungen von z, so ist für

$$(3)\qquad f = \sum_{\alpha_i=1}^{m} \frac{d(\varphi_i, \psi_i)}{d(x, y)} = \sum_{\alpha_i=1}^{m} \left(\frac{d\varphi_i}{dx}\,\frac{d\psi_i}{dy} - \frac{d\psi_i}{dx}\,\frac{d\varphi_i}{dy}\right)$$

$V(f)$ identisch Null.

Will man diesen Satz aus **B**α) ableiten, so genügt es in Betracht zu ziehen, dass

$$\frac{d(\varphi_i, \psi_i)}{d(x, y)} = \frac{d}{dx}\left(\varphi_i\,\frac{d\psi_i}{dy}\right) - \frac{d}{dy}\left(\psi_i\,\frac{d\varphi_i}{dx}\right)$$

ist.

Umgekehrt folgt aus Satz **C** der Teil α) des Satzes **B**, wenn wir

$$m=2\,,\ \varphi_1 = w_1,\ \psi_1 = y,\ ,\ \varphi_2 = x,\ \psi_2 = w_2$$

setzen.

§. 3. Bei der Umkehrung von Satz **C** beschränke ich mich auf die einfachsten Fälle, in denen die Ordnung n von f gleich 1 oder 2 ist.

Satz D. *Ist*

$$f\,(x,\,y,\,z,\,p,\,q)$$

so beschaffen, dass

$$V(f) = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial q}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial z} - \left(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p} - \left(\frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{d z}\right)\frac{\partial f}{\partial q}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial z} - \left(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p} - \left(\frac{\partial}{\partial y} + q\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial q}$$

$$+ r\,\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + 2\,s\,\frac{\partial^2 f}{\partial p\;\partial q} + t\,\frac{\partial^2 f}{\partial q^2}$$

identisch verschwindet: so kann f als eine Funktionaldeterminante

$$\frac{d\,(\varphi,\psi)}{d\,(x,y)} = \frac{d\,\varphi}{d\,x}\,\frac{d\,\psi}{d\,y} - \frac{d\,\psi}{d\,x}\,\frac{d\,\varphi}{d\,y}$$

dargestellt werden, vo φ und ψ nur x, y, z enthalten.

Die Forderung, dass $V(f)$ identisch verschwinde, ist nämlich identisch mit den Forderungen

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q} = \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = 0$$

und

$$\text{(4)} \qquad \frac{\partial}{\partial z} - \left(\frac{\partial}{\partial x} + p\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p} - \left(\frac{\partial}{\partial y} + q\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

Zufolge (3) ist

$$f = -\,(A\,p + B\,q - C),$$

wo A, B, C von p und q unabhängig sind. Zufolge (4) ist ausserdem

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Wie aus der **Jacobi**schen Theorie des letzten Multiplikators bekannt ist, besagt dies, dass A, B, C in der Gestalt

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\psi}{\partial z} & \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

darstellbar sind. Es ist also in der Tat

$$f = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ -p & -q & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} + p \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} + g \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{d\,(\varphi, \psi)}{d\,(x, y)}$$

Aus den Sätzen **C** und **D** folgt unmittelbar.

Satz E. *Sind*

$$\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \ldots, \varphi_m, \psi_m$$

nur von x, y und z abhängig, so kann die Summe der Funktionaldeterminanten

$$\frac{d\,(\varphi_1, \psi_1)}{d\,(x, y)}, \quad \frac{d\,(\varphi_2, \psi_2)}{d\,(x, y)}, \quad \ldots, \quad \frac{d\,(\varphi_m, \psi_m)}{d\,(x, y)}$$

in der Gestalt einer einzigen Funktionaldeterminante

$$\frac{d\,(\varphi, \psi)}{d\,(x, y)}$$

dargestellt werden, wo φ und ψ nur x, y und z enthalten.

§. 4. Für den Fall, dass f die Ordnung 2 hat, gilt

Satz F. *Ist*

$$f\,(x, y\; z, p, q, r, s, t)$$

so beschaffen, dass $V(f)$ identisch verschwindet: so kann f als die Summe zweier Funktionaldeterminanten

$$\frac{d\,(\varphi_1, \psi_1)}{d\,(x, y)}, \quad \frac{d\,(\varphi_2, \psi_2)}{d\,(x, y)}$$

dargestelt werden, wo φ_1, ψ_1; φ_2, ψ_2 nur x, y, z, p, q enthalten.

Dies ist, wenn f in r, s, t linear ist, eine unmittelbare Folge von Satz **B** β). Nach jenem Satze kann nämlich f in der Gestalt

$$f = \frac{d\,\omega_1}{d\,x} + \frac{d\,\omega_2}{d\,y}$$

ausgedrückt werden, wo ω_1 und ω_2 nur x, y, z, p, q enthalten. Diese Darstellung lässt sich aber auch so schreiben

$$f = \frac{d\,(\omega_1, y)}{d\,(x, y)} + \frac{d\,(x, \omega_2)}{d\,(x, y)}.$$

Der kompliziertere Fall, in dem f in r, s, t nicht linear ist, kann auf den soeben erledigten einfachen Fall zurückgeführt werden, und zwar durch die folgenden Überlegungen.

Für eine beliebige Funktion

$$f\,(x, y, z, p, q, r, s, t)$$

ist im allgemeinen $V\,(f)$ von der vierten Ordnung. Die Ableitungen vierter Ordnung fallen nur dann heraus, wenn f die **Monge-Ampère**-sche Gestalt

$$f = A + B\,r + 2\,C\,s + D\,t + E\,(r\,t - s^2)$$

hat, wo A, B, C, D, E nur x, y, z, p, q enthalten.[3])

Soll, wie wir voraussetzen, $V\,(f)$ identisch verschwinden, so muss f um so mehr die **Monge-Ampère**-sche Gestalt haben.

Bei jeder Berührungstransformation

$$z' = Z\,(x, y, z, p, q)$$

$$x' = X, \quad y' = Y, \quad p' = P, \quad q' = Q$$

geht der Differentialausdruck

$$f\,d\,x\,dy$$

wieder in einen solchen Differentialausdruck

$$\bar{f}\,d\,x'\,dy'$$

über, in dem $\bar{f}$ die **Monge-Ampère**-sche Gestalt

$$\bar{A} + \bar{B}\,r' + 2\,\bar{C}\,s' + \bar{D}\,t' + \bar{E}\,(r'\,t' - s'^2)$$

hat. Dabei ist

$$\bar{f}\,\sigma = f,$$

wo

$$\sigma = \frac{d\,(X, Y)}{d\,(x, y)}$$

ist.

War $V(f)$ identisch gleich Null, so wird auch die linke Seite der zur Variation von

---

[3]) *H. J. Jellet,* An elementary treatise on the calculus of variations, Dublin (1852). S. 344.

$$\iint \bar{f}\, dx'\, dy'$$

gehörigen Hauptgleichung identisch verschwinden.[4])

Nun gibt es, wie aus der Theorie der **Monge-Ampère**-schen partiellen Differentialgleichungen bekannt ist, stets eine solche Berührungstransformation, dass in $\bar{f}$ das Glied

$$\bar{q}\,(r'\,t' - s'^2)$$

fehlt. Dann ist aber $\bar{f}$, wie wir bereits wissen, in der Gestalt

$$\bar{f} = \frac{d\,(\omega_1,\, y')}{d\,(x',\, y')} + \frac{d\,(x',\, \omega_2)}{d\,(x',\, y')}$$

darstellbar, wo ω_1 und ω_2 nur x', y', z', p', q' enthalten.

Gehen wir wieder zu den ursprünglichen Veränderlichen über, so erhalten wir

$$f = \bar{f}\,\sigma = \frac{d\,(\varphi_1,\, \psi_1)}{d\,(x,\, y)} + \frac{d\,(\varphi_2,\, \psi_2)}{d\,(x,\, y)}\,,$$

wo

$$\varphi_1,\ \psi_1,\ \varphi_2,\ \psi_2$$

diejenigen Funktionen von x, y, z, p, q bedeuten, die wir so erhalten, dass wir

$$\omega_1,\ y',\ x',\ \omega_2$$

als Funktionen von x, y, z, p, q ausdrücken.

Damit ist der Satz **F** allgemein bewiesen.

Wird die gewünschte Gestalt von f in der soeben beschriebenen Weise erzeugt, so ist,

$$\psi_1 = Y\,(x,\, y,\, z,\, p,\, q)\,, \qquad \varphi_2 = X\,(x,\, y,\, z,\, p,\, q).$$

Es wird also dann, wie aus der Theorie der Berührungstransformationen bekannt ist, der **Poissonsche** Klammerausdruck

$$[\psi_1,\, \varphi_2] = [Y,\, X]$$

verschwinden.

Es wäre erwünscht genauer zu untersuchen, ob die Funktionen

$$\varphi_1,\ \psi_1,\ \varphi_2,\ \psi_2$$

---

[4]) Es ist dies die unmittelbare Folge eines allgemeineren Satzes von mir. Siehe:

J. Kürschák, Über die Transformation der partiellen Differentialgleichungen der Variationsrechnung. Mathematische Annalen, Bd. 56 (1903), S 154—164.

nicht immer so gewählt werden können, dass sie noch weitere Eigentümlichkeiten zeigen.

§ 5. Man könnte vermuten dass

$$f\ (x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t)$$

im Falle $V\ (f) \equiv$ o stets als eine *einzige* Funktionaldeterminante

$$\frac{d\ (\varphi,\ \psi)}{d\ (x,\ y)}$$

darstellbar ist, in der φ und ψ nur von x, y, z, p, q abhängen. Diese Vermutung ist falsch.

Bedeutet nämlich u irgend eine Funktion von p und q (und nur von diesen), so ist für

$$f = r\ \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + r\,s\ \frac{\partial^2 u}{\partial p\ \partial y} + t\ \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}$$

$V\ (f) \equiv 0$. Wäre nun

$$f = \frac{d\ (\varphi,\ \psi)}{d\ (x,\ y)},$$

so wäre

$$\Phi\ (\varphi,\ \psi) = \text{o},$$

(wo Φ eine beliebige Funktion bedeutet) ein allgemeines intermediäres Integral erster Ordnung der **Monge**-schen partiellen Differentialgleichung

$$r\ \frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + 2\,s\ \frac{\partial^2 u}{\partial p\, \partial q} + t\ \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = \text{o}.$$

Diese Differentialgleichung ist aber im Falle

$$u = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

genau die Differentialgleichung der Minimalflächen und hat in diesem Falle kein allgemeines intermediäres Integral erster Ordnung.