Über ein Problem von Dedekind.

Von MICHAEL BAUER.

1. Dedekind hat zum erstenmal Beispiele für das Vorhandensein gemeinsamer ausserwesentlicher Diskriminantenteiler in algebraischen Zahlkörpern angegeben.[1]) Er hat bewiesen, dass wenn die Zahl α die Gleichung

$$(1) \qquad F(\alpha) = \alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0$$

erfüllt, dann ist die Zahl 2 im Körper dritten Grades $K(\alpha)$ ein Produkt von drei verschiedenen Primidealen, folglich nach seinen allgemeinen Untersuchungen ein gemeinsamer ausserwesentlicher Diskriminantenteiler. Eine andere Behandlung desselben Beispiels gab ich in einer Annalen-Note.[2]) Die Zerlegung der Zahl 2 ergibt sich a. a. O. als unmittelbare Anwendung eines Satzes über die sog. Puiseuxschen Zahlen einer Gleichung. Eine dritte Behandlung der Gleichung (1) hat K. Hensel mittels seiner Theorie der p-adischen bzw. $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen gegeben.[3])

Man kann sich die folgende Aufgabe stellen. Es sind alle Körper n-ten Grades zu bestimmen, in welchen für eine gegebene beliebige Primzahl p die Zerlegung

$$(2) \qquad p = \mathfrak{p}_1^{g_1} \mathfrak{p}_2^{g_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{g_r}$$

---

[1]) Göttinger Anzeiger 20/9 1871. Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Congruenzen. Göttinger Abhandlungen Bd. 23. S. 30. (1878.) Reproduziert bei Bachmann: Zahlentheorie V. Theil. S. 280.

[2]) Über die ausserwesentlichen Diskriminantenteiler einer Gattung. Math. Annalen Bd. 64. S. 573. (1907).

[3]) Hensel: Theorie der algebraischen Zahlen. Bd. 1. S. 274. (1908).

statthat, wo $\mathfrak{p}_i$ verschiedene Primideale f_i-ten Grades bedeuten. Die folgende Note löst diese Aufgabe für den Fall $f_i = 1$, also wenn die Summe

$$g_1 + g_2 + \ldots + g_r = n \tag{2*}$$

ausfällt.

2. Die Zahl ω bestimme einen algebraischen Zahlkörper n-ten Grades K. Es sei q eine Primzahl, für welche die Zerlegung

$$q = \mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_n \tag{3}$$

statthat, wo $\mathfrak{q}_i$ verschiedene Primideale ersten Grades bedeuten. Ein beliebiges der Primideale soll durch $\mathfrak{q}$ bezeichnet werden. Wir werden den folgenden Satz beweisen:

Ist die ganze Zahl α des Körpers durch $\mathfrak{q}$ teilbar und enthält sie keinen anderen Primfaktor von q, so bildet α eine primitive Zahl des Körpers.

3. Es sei G der Galoissche Körper von K. Der Grad von G sei N, seine Gruppe $\mathfrak{G}$, der Körper K gehöre zur Untergruppe $\mathfrak{K}$. Aus (3) folgt bekanntlich, dass in G

$$q = \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \ldots \mathfrak{Q}_N \tag{3*}$$

ausfällt, wo $\mathfrak{Q}_i$ verschiedene Primideale ersten Grades bezeichnen. Ein beliebiges der Primideale sei durch $\mathfrak{Q}$ bezeichnet. Die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{Q}$ ist $\mathfrak{H} = E$ gleich der Einheitsgruppe. Es existiert immer eine Operation R der Gruppe $\mathfrak{G}$, dass $\mathfrak{q}$ durch $R\mathfrak{Q}$ teilbar wird. Aus der grundlegenden Dedekindschen Regel[4]) lässt sich leicht folgern,[5]) dass von den Konjugierten des Ideals $\mathfrak{q}$ jene und nur jene durch $\mathfrak{Q}$ teilbar sind, welche sich in irgendwelchem der Körper $\mathfrak{K}R^{-1}\mathfrak{H}\omega$ befinden. Da nach den Voraussetzungen die Zahlen $\mathfrak{K}R^{-1}\mathfrak{H}\omega$ einander gleich sind, so fallen die konjugierten Zahlen $\alpha = \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ alle von einander verschieden aus, die Zahl α ist daher eine primitive Zahl.

4. In jedem Körper G gibt es unendlichviele Primzahlen q, für welche eine Zerlegung (3*) und folglich im Körper K eine

---

[4]) Zur Theorie der Ideale. Göttinger Nachrichten 1894. S 272—277.

[5]) Vgl. meinen Aufsatz: „Die Theorie der p-adischen bzw. $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen etc. (Erscheint in der Math. Zeitschrift).

Zerlegung (3) statthat. Es ist daher die Bedingung $(q, p)=1$ für jede Primzahl p erfüllbar.

5. Es sei jetzt für die gegebene Primzahl p im Körper K

$$(4) \qquad p = \mathfrak{p}_1^{e_1}\, \mathfrak{p}_2^{e_2} \ldots \mathfrak{p}_s^{e_s},$$

wo $\mathfrak{p}_i$ verschiedene Primideale bedeuten. Es sind in K primitive ganze Zahlen Ω vorhanden, für welche die Zerlegung

$$(5) \qquad \Omega = \mathfrak{p}_1^{a_1}\, \mathfrak{p}_2^{a_2} \ldots \mathfrak{p}_s^{a_s}\, \mathfrak{r}, \; (p, \mathfrak{r}) = 1$$

statthat, wo die charakteristischen Zahlen $\frac{a_i}{e_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ beliebige positive rationale Zahlen sind. Diese Behauptung kann einfach bewiesen werden. Bekanntlich sind ganze Zahlen Ω vorhanden, die genau durch $\mathfrak{p}_i^{a_i}$ teilbar sind, ferner das Ideal $\mathfrak{q}$ enthalten und durch keinen anderen Primfaktor von q teilbar sind. Eine solche Zahl ist nach den Vorigen primitiv. Genügt die Zahl Ω der irreduziblen ganzzahligen Gleichung

$$(6) \qquad F(\Omega) = \Omega^n + a_1\Omega^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

dann sind die Puiseuxschen Zahlen der Gleichung inbezug auf p numerisch gleich den Zahlen $\frac{a_i}{e}$ [6])

6. Aus dem Vorangehenden ergibt sich als spezieller Fall die folgende Tatsache. Ist ein Körper K

$$(7) \qquad p = \mathfrak{p}_1^{g_1}\, \mathfrak{p}_2^{g_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{g_r},$$

wo $\mathfrak{p}_i$ verschiedene Primideale ersten Grades bedeuten, infolgedessen die Summe

$$g_1 + g_2 + \ldots + g_r = n$$

ausfällt, so kann der Körper K durch eine irreduzible ganzzahlige Gleichung

$$(8) \qquad f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

definiert werden, deren Puiseuxsche Zahlen inbezug auf p gleich

---

[6]) M. Bauer: Zur allgemeinen Theorie der algebraischen Grössen Journal für Math. Bd. 132. S. 21. (1907).

$$(8^*) \qquad \frac{a_1}{k_1}, \frac{a_2}{k_2}, \ldots, \frac{a_r}{k_r}.$$

ausfallen und die Relationen

$$(8^{**}) \qquad (a_i\, k_i) = 1 \quad , k_i = g_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

erfüllen. Dieser Satz ist auch umkehrbar. A. a. O. ist bewiesen, dass aus (8), (8*). (8**) die Relationen (7), (7*) folgen. Hiermit ist unsere Aufgabe gelöst. Ist die Zahl $p \geqq n$, also sicher kein ausserwesentlicher gemeinsamer Diskriminantenteiler, so ist die Lösung des im Punkte 1. gestellten Problems ganz allgemein aus Dedekinds Arbeiten leicht zu entnehmen.