Sur les valeurs moyennes du module des fonctions harmoniques et des fonctions analytiques.

Par M. FRÉDÉRIC RIESZ.

1. On doit à M. *Hardy* le théorème suivant:[1])

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe pour $o \leqq |z| < R$; alors les valeurs moyennes

$$(1) \qquad \mu_\delta(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\delta d\varphi \qquad (o \leqq r < R, \delta > 0)$$

jouissent des propriétés suivantes:

1) $\mu_\delta(r)$ est une fonction croissante de r;

2) $\log \mu_\delta(r)$ est une fonction convexe de $\log r$.

La conclusion 2) reste valable si l'on suppose seulement que $f(z)$ soit holomorphe dans un anneau circulaire $\varrho < |z| < R$.

J'ai réussi, il y a quelque temps, d'étendre ce théorème, avec certaines modifications, aux fonctions harmoniques, réelles ou non, et comme les fonctions holomorphes ne sont que des fonctions harmoniques particulières, je suis arrivé en même temps à une nouvelle démonstration du théorème de M. *Hardy*. Depuis-là je me suis aperçu que tous ces résultats sont contenus dans le théorème général que voici:

Soit $g(x, y)$ une fonction définie à l'intérieur d'un domaine D; nous la supposons réelle, continue et telle que pour chaque point (x_0, y_0) intérieur au domaine et pour chaque valeur suffisamment petite du rayon r, on ait

$$(2) \qquad g(x_0, y_0) \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\, d\varphi.$$

[1]) G. H. *Hardy, The mean Value of the Modulus of an Analytic Function,* Proceedings of the London Math. Soc., Ser. 2., Vol. 14. (1915.) p. 269. Cf. aussi: E. *Landau, Neuer Beweis eines Hardy'schen Satzes,* Archiv der Math. u. Phys., 3 Reihe, XXV. (1916.), p. 173.; *Darstellung und Begründung einiger neueren Ergebnisse der Funktionentheorie,* p. 83.

Dans cette hypothèse, la valeur moyenne qui figure au second membre est une fonction croissante de r et cela non seulement pour r suffisamment petit, mais sous la seule condition que r varie sans que le cercle correspondant sorte du domaine.

De plus, la valeur moyenne considérée est une fonction convexe de $\log r$ et cela même dans le cas plus général où, le point (x_0, y_0) appartenant ou non au domaine, le rayon r varie de sorte que les circonférences correspondantes forment un anneau circulaire intérieur au domaine.

2. Pour démontrer ce théorème, nous nous servirons du lemme suivant:

Soit D' un domaine intérieur de même que sa frontière au domaine D et soit, s'il en existe, $U(x, y)$ la fonction harmonique à l'intérieur du domaine D' prenant, sur la frontière de ce domaine, les mêmes valeurs que $g(x, y)$. Dans ces conditions, on aura, à l'intérieur de D',

$$g(x, y) \leqq U x, y).$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, la différence

$$d(x, y) = g(x, y) - U(x, y)$$

devait atteindre un maximum $M > o$ et cela à l'intérieur du domaine D'; car, sur la frontière de D, $d(x, y) = o$. soit (x_0, y_0) un point tel que $d(x_0, y_0) = M$; on peut aussi supposer que $d(x, y)$ ne soit constante dans aucun voisinage du point (x_0, y_0); en effet, l'ensemble des points pour lesquels $d(x, y) = M$ étant fermé, admet au moins un point frontiére. Cela étant, soit r un rayon suffisamment petit pour que le cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon r soit compris dans le domaine D', que, de plus, l'inégalité (2) soit satisfaite et que, enfin, le long de la circonférence de ce cercle, on n'ait pas constamment $d(x, y) = M$. Alors on aura, sur cette circonférence

$$d(x, y) \leqq M,$$

et comme, d'aprés l'hypothèse faite, le signe d'égalité ne pourra pas tenir partout, il viendra

$$d(x_0, y_0) = M > \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} d(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\, d\varphi.$$

D'autre part, la formule de *Gauss*

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\, d\varphi,$$

et l'inégalité (2) donnent

$$d(x_0, y_0) \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\, d\varphi;$$

ce qui implique contradiction. Notre lemme est donc démontré.

3. Pour démontrer notre théorème général, supposons, pour simplifier, qu'il s'agisse des valeurs moyennes prises sur des circonférences autour de l'origine comme centre. Posons

$$m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi.$$

Pour démontrer la croissance, soient r_1 et $r_2 > r_1$ les rayons de deux cercles ne sortant pas du domaine D; il s'agit de voir que $m(r_1) \leqq m(r_2)$. Pour cela, nous choisirons pour D' le domaine $x^2 + y^2 < r_2^2$. D'aprés le lemme précédent, on aura

$$g(x, y) \leqq U(x, y)$$

et par conséquent,

$$m(r_1) \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r_1\cos\varphi, r_1\sin\varphi)\, d\varphi = U(0, 0)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r_2\cos\varphi, r_2\sin\varphi)\, d\varphi = m(r_2),$$

c. qu. f. d.

Quant à la convexité, nous choisirons pour domaine D' un anneau circulaire $\varrho_1^2 \leqq x^2 + y^2 = r^2 \leqq \varrho_2^2$ compris dans le domaine D. On aura, par les mêmes raisons,

$$m(r) \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi;$$

pour $r = \varrho_1$ et pour $r = \varrho_2$, les deux membres sont égaux.

Or, dans le cas de l'anneau, l'analogue de la formule de *Gauss* consiste, comme on sait, en ce que la valeur moyenne qui figure au second membre, dépend linéairement de $\log r$.[1]) C'est-

[1]) Cela suit p. ex. en intégrant, par rapport à r, l'équation

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial U}{\partial r}\, d\varphi = -\frac{1}{r} \int_{x^2+y^2=r^2} \frac{\partial U}{\partial n}\, ds = const \times \frac{1}{r}$$

à-dire que lorsqu'on trace la courbe qui représente $m(r)$ en fonction de $\log r$ et que l'on y marque les points P_1 et P_2 correspondant aux valeurs ϱ_1 et ϱ_2, la corde $P_1 P_2$ est située au-dessus de l'arc $P_1 P_2$; en d'autres mots, la courbe représente une fonction convexe.

Notre théorème général est donc démontré.

4. Pour en déduire la prémière partie du théorème de M. *Hardy*, il suffit de poser

$$g(x, y) = |f(z)|^{\delta} \qquad (z = x + i y)$$

et de vérifier l'inégalité (2). Il faut distinguer deux cas. Dans le cas où $f(x_0 + i y_0) = 0$, l'inégalité est évidente. Dans le cas contraire, désignons par $f(z)^{\delta}$ une détermination uniforme au voisinage du point $z_0 = x_0 + i y_0$. Pour r suffissamment petit, on tire de la formule de *Cauchy*

$$\left(f(z_0)\right)^{\delta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(z_0 + r e^{i\varphi})\right)^{\delta} d\varphi;$$

de là on conclut immédiatement l'intégalité requise. Alors la première conclusion de M. *Hardy* découle immédiatement de notre théorème général.

Pour la seconde partie, appliquons notre théorème au domaine

$$g(x, y) = |z|^{\beta} |f(z)|^{\delta} \qquad (z = x + i y, \delta > o),$$

β désignant un nombre réel quelconque. Il vient d'abord que $r^{\beta} \mu_{\delta}(r)$ — où $\mu_{\delta}(r)$ est la moyenne définie par la formule (1) — est une fonction convexe de $\log r$. On en déduit par un raisonnement connu qu'il en est de même pour la fonction $\log \mu_{\delta}(r)$. En effet, soit $\varrho < \varrho_1 < \varrho_2 < R$. Déterminons β de sorte que l'on ait

$$\varrho_1^{\beta} \mu_{\delta}(\varrho_1) = \varrho_2^{\beta} \mu_{\delta}(\varrho_2)$$

Soit A la valeur commune des deux expressions. De plus, soit $\varrho_1 \leqq r \leqq \varrho_2$ et déterminons la quantité t $(0 \leqq t \leqq 1)$, qui varie d'ailleurs avec r, par la condition

$$r = \varrho_1^{t} \varrho_2^{1-t}$$

Or la fonction $r^{\beta}\mu_{\delta}(r)$ étant convexe par rapport à $\log r$ pour $\varrho_1 \leqq r \leqq \varrho_2$, on aura

$$r^{\beta}\log\mu_{\delta}(r) \leqq A = A^t A^{1-t} = \left[\varrho_1^{\beta}\mu_{\delta}(\varrho_1)\right]^t \left[\varrho_1^{\beta}\mu_{\delta}(\varrho_2)\right]^{1-t} =$$
$$= r^{\beta}\left[\mu_{\delta}(\varrho_1)\right]^t\left[\mu_{\delta}(\varrho_2)\right]^{1-t}$$

et en divisant par r^{β} et passant au logarithme, il viendra

$$\log\mu_{\delta}(r) \leqq t\log\mu_{\delta}(\varrho_1) + (1-t)\log\mu_{\delta}(\varrho_2),$$

c. qu. f. d.

5. Pour appliquer notre théorème aux fonctions harmoniques posons

$$g(x,y) = |u(z,y)|^{\alpha} \qquad (\alpha \geqq 1),$$

$u(x,y)$ désignant une fonction, réelle ou non, harmonique à l'intérieur du domaine D. Pour vérifier l'inégalité (2), nous partons de la formule de *Gauss*

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\,d\varphi$$

Dans le cas où $\alpha=1$, la conclusion est immédiate. Pour $\alpha > 1$, nous nous servirons de l'inégalité bien connue

$$\left|\int GH\right| \leqq \left[\int |G|^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\left[\int |H|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

dans laquelle nous poserons

$$G = u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\ H = 1\,;$$

il viendra

$$2\pi|u(x_0,y_0)| \leqq \left[\int_0^{2\pi}\left|u(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)\right|^{\alpha} d\varphi\right]^{\frac{1}{\alpha}}\left[2\pi\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}},$$

c'est-à-dire l'inégalité (2).

Nous avons donc le théorème suivant:

Les valeurs moyennes

$$I_{\alpha}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\right|^{\alpha} d\varphi \qquad (\alpha \geqq 1)$$

d'une fonction harmonique, réelle où non, jouissent des propriétes suivantes:

1) *lorsque la fonction* $u(x, y)$ *est harmonique à l'intérieur d'un cercle* $x^2+y^2=r^2<R^2$, $I_\alpha(r)$ *est une fonction croissante de* r;

2) *dans la même hypothèse ou plus généralement, lorsque la fonction* $u(x, y)$ *est harmonique à l'intérieur de l'anneau* $\varrho^2<x^2+y^2=r^2<R^2$, $I_\alpha(r)$ *est une fonction convexe de* $\log r$.

6. L'extension de notre méthode au cas de plusieurs variables est immédiate. Ainsi par exemple, lorqu'il s'agit d'une fonction $u(x, y, z)$ harmonique à l'intérieur d'une sphère, les valeurs moyennes $I_\alpha(r)$ qui correspondent aux sphères concentriques de rayon r, sont, pour $\alpha \geqq 1$, des fonctions croissantes de r et des fonctions convexes de $\frac{1}{r}$.