Über eine Verallgemeinerung des Du Bois Reymond'schen Lemma's.

VON ALFRED HAAR.

Das bekannte Lemma, das Du Bois Reymond[1]) zur Begründung der Variationsrechnung aufstellte, ist wegen seiner Wichtigkeit vielfach behandelt worden. Von den neueren Beweisen erwähne ich nur die von *Hilbert*[2]) und *Jacobsthal*[3]), sowie diejenigen die *Hadamard* in seinem Lehrbuch gegeben hat. Ich möchte in den folgenden Zeilen eine neue Methode zur Begründung dieses Lemma's auseinandersetzen, die besonders rasch zum Ziel führt. Mit dieser Methode beweise ich zuerst das Lemma selbst, sodann seine bekannten Verallgemeinerungen, die von Zermelo herrühren [4]) Zum Schlusse wende ich diese Methode an zur Ableitung eines Satzes, der — wie mir scheint — neu ist; dieser Satz wirft ein neues Licht auf den Zusammenhang eines linearen Differentialausdruck's

$$L[\eta] \equiv \eta^{(k)}(x) + p_1(x)\,\eta^{(k-1)}(x) + p_2(x)\,\eta^{(k-2)}(x) + \ldots + \\ + p_{k-1}(x)\,\eta'(x) + p_k(x)\,\eta(x)$$

(wo die $p_1(x), p_2(x), \ldots p_k(x)$ beliebig oft differentierbare Funktionen bedeuten) und des zugehörigen adjungierten Differentialausdruck's

$$\Lambda[\eta] \equiv \eta^{(k)} - (p_1\,\eta)^{(k-1)} + (p_2\,\eta)^{(k-2)} - \ldots + (-1)^k (p_k\,\eta)$$

Ich beweise nämlich, dass, wenn $u(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion bedeutet, von der Beschaffenheit, dass das Integral

[1]) Mathematische Annalen Bd. 15 (1879) p. 564.

[2]) s. Bolza: Lehrbuch der Variationsrechnung p. 28.

[3]) Archiv für Mathematik. (Berliner math. Ges). 1910.

[4]) Mathematische Annalen Bd. 58 (1904) p. 558.

$$\int_a^b u(x)\; L[\eta(x)]\, dx$$

stets verschwindet, wenn $\eta(x)$ *irgendeine* im Intervall $[a, b]$ k-mal stetig differentierbare Funktion bedeutet, die an den Endpunkten dieses Intervalls samt ihren ersten $(k-1)$ Ableitungen verschwindet, so ist $u(x)$ selbst k-mal differenzierbar und eine Lösung der Differentialgleichung

$$\Lambda[u] = 0.$$

I. Die im Intervall $[a, b]$ definierte stetige Funktion $u(x)$ erfülle die Bedingung

$$\int_a^b u(x) \frac{d\eta}{dx} dx = 0$$

für jede im Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbare und an den Endpunkten des Intervalls verschwindende Funktion $\eta(x)$. Nach dem fraglichen Lemma muss dann $u(x) = \text{const.}$ sein; dies beweise ich, wie folgt:

Sind α und β zwei beliebige im betrachteten Intervall gelegene Stellen $(\alpha < \beta)$, so betrachte ich diejenige Funktion, die für $a \leqq x \leqq \alpha$ und $\beta \leqq x \leqq b$ gleich Null ist, für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ aber mit der Funktion $(x-\alpha)^2 (x-\beta)^2$ übereinstimmt. Diese Funktion ist im ganzen Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar und verschwindet an den Endpunkten dieses Intervalls. Demzufolge ist für jedes den Ungleichungen $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ unterworfene α, β

$$\omega(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta u(x) \frac{d}{dx} [(x-\alpha)^2 (x-\beta)^2]\, dx = 0.$$

Diese Funktion $\omega(\alpha, \beta)$ ist nach den Parametern α, β jedenfalls differenzierbar und man findet leicht für den gemischten zweiten Differenzialquotienten den Ausdruck

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 4 \int_\alpha^\beta u(x) \frac{d}{dx} [(x-\alpha)(x-\beta)]\, dx = 0.$$

Wendet man dasselbe Verfahren auf dieses Integral an, so erhält man

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial \alpha^2\, \partial \beta^2} = 4\,[u(\beta) - u(\alpha)] = 0.$$

D. h. $\quad u(\alpha) = u(\beta) \quad$ also $\quad u(x) = \text{const.} \quad$ w. z. b. w.

II. Durch Induktionsschluss kann man das *verallgemeinerte Du Bois Reymondsche Lemma* auf Grund dieser Methode folgendermassen beweisen:

Die im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion $u(x)$ erfülle die Bedingung

$$\int_a^b u(x) \frac{d^k \eta}{d x^k} d x = 0, \tag{1}$$

wobei nun $\eta(x)$ irgendeine in diesem Intervall k-mal stetig differenzierbare Funktion bedeutet, die an den Endpunkten dieses Intervalls samt ihren ersten $(k-1)$ Ableitungen verschwindet. Dann gilt offenbar für jedes den Ungleichungen $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ unterworfene α, β

$$\omega(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta u(x) \frac{d^k}{d x^k} [(x-\alpha)^{k+1} (x-\beta)^{k+1}] \, d x = 0, \tag{2}$$

da die Funktion, die für $a \leqq x \leqq \alpha$ und $\beta \leqq x \leqq b$ gleich Null, für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ aber gleich $(x-\beta)^{k+1}(x-\beta)^{k+1}$ ist, die Bedingungen die in Gleichung (1) für $\eta(x)$ gestellt sind, erfüllt. Aus der letzten Gleichung folgt aber — wie oben —

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \, \partial \beta} = (k+1)^2 \int_\alpha^\beta u(x) \frac{d^k}{d x^k} [(x-\alpha)^k (x-\beta)^k] \, d x = 0. \tag{3}$$

Differenziert man diese Gleichung nach β, so ergiebt sich — wie eine leichte Rechnung zeigt —

$$(k-1)!\,(\beta-\alpha)^k u(\beta) + (-1)^k \int_\alpha^\beta u(x) \frac{d^k}{d x^k} [(x-\alpha)^k (x-\beta)^{k-1}] \, d x = 0.$$

Diese Gleichung lehrt aber — da das zweite Glied eine nach β stetig differenzierbare Funktion bedeutet — dass die Funktion $u(x)$ an jeder Stelle — mit etwaiger Ausnahme der Stelle $x = \alpha$ — eine stetige Ableitung besitzt. Da aber α selbst beliebig im Intervall $[a, b]$ gewählt sein kann, so folgt daraus dass $u(x)$ im ganzen Intervall $[a, b]$ eine stetige Ableitung $u'(x)$ besitzt. Aus Gleichung (3) folgt nun durch Produktintegration

$$\int_\alpha^\beta u'(x) \frac{d^{k-1}}{d x^{k-1}} [(x-\alpha)^k (x-\beta)^k] \, d x = 0.$$

Diese letzte Formel ist der Gleichung (2) vollständig analog; wenden wir auf diese den obigen Schluss nochmals an, so ergiebt sich die Existenz und Stetigkeit der zweiten Ableitung $u''(x)$ der Funktion $u(x)$ und diese erfüllt die Bedingung

$$\int_\alpha^\beta u''(x) \frac{d^{k-2}}{dx^{k-2}} [(x-\alpha)^{k-1} (x-\beta)^{k-1}] \, dx = 0, \text{ u. s. f.}$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens beweist man die Existenz der 3 ten, 4-ten, . . ., k-ten Ableitung der Funktion $u(x)$; die letzte erfüllt die Bedingung

$$\int_\alpha^\beta u^{(k)}(x) \, [(x-\alpha)(x-\beta)] \, dx = 0$$

für jedes α, β, und ist demzufolge identisch gleich Null. Aus $u^{(k)}(x) = 0$ folgt aber, dass die Funktion $u(x)$ ein Polynom $(k-1)$-ten Grades ist.

Es ist bemerkenswert an diesem Verfahren, dass zuerst die Differenzierbarkeit der Funktion bewiesen wird, und daraus auf die Bauart der Funktion geschlossen wird.

III. Eben dieser Umstand ermöglicht es den folgenden Satz zu beweisen, der als weitergehende Verallgemeinerung des Du Bois Reymondschen Lemmas zu betrachten ist:

Es sei

$$L[\eta] = \eta^{(k)}(x) + p_1(x)\,\eta^{(k-1)}(x) + p_2(x)\,\eta^{(k-2)}(x) + \ldots + p_k(x)\,\eta(x)$$

irgendein linearer Differentialausdruck, dessen Koeffizienten $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots, p_k(x)$ *im Intervall* $[a, b]$ *beliebig oft differenzierbare Funktionen sein mögen. Ist nun* $u(x)$ *eine im Intervall* $[a, b]$ *definierte stetige Funktion von der Beschaffenheit, dass das Integral*

$$\int_a^b u(x) \, L[\eta] \, dx$$

stets verschwindet. wenn $\eta(x)$ *irgendeine im Intervall* $[a, b]$ k*-mal stetig differenzierbare Funktion bedeutet, die an den Endpunkten dieses Intervalls samt ihren ersten* $(k-1)$ *Ableitungen verschwindet, so ist* $u(x)$ *selbst* k*-mal differenzierbar und eine Lösung der zu* $L[\eta] = 0$ *adjungierten Differentialgleichung*

$$\Lambda(u) \equiv u^{(k)} - (p_1 u)^{(k-1)} + (p_2 u)^{(k-2)} - \ldots + (-1)^k p_k u = 0.$$

Um dies darzutun, führen wir in unsrer Bedingungsgleichung statt $\eta(x)$ die in II. benutzte Funktion ein, wodurch wir zu der Formel

$$\int_\alpha^\beta u(x)\, L\, [(x-\alpha)^{k+1}(x-\beta)^{k+1}]\, dx = 0$$

gelangen. Die Anwendung der Operation $\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}$ führt sodann zur Gleichung:

$$\int_\alpha^\beta u(x)\, L\, [(x-\alpha)^k(x-\beta)^k]\, dx = 0. \tag{4}$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach β, so ergibt sich:

$$(k-1)!\,(\beta-\alpha)^k\, u(\beta) + (-1)^k \int_\alpha^\beta u(x)\, L\, [(x-\alpha)^k(x-\beta)^{k-1}]\, dx = 0,$$

woraus wiederum die Existenz und Stetigkeit der ersten Ableitung der Funktion $u(x)$ im ganzen Intervall $[a, b]$ folgt, da α eine beliebige Stelle dieses Intervalls sein kann. Diese letzte Gleichung aber ist von der folgenden Form:

$$(\beta-\alpha)^k\, u(\beta) = \int_\alpha^\beta u(x)[c_0(x) + c_1(x)\beta + c_2(x)\beta^2 + \ldots + c_{k-1}(x)\beta^{k-1}]\, dx,$$

wobei $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ beleibig oft differenzierbare Funktionen bedeuten. Differenziert man diese Gleichung nach β, so ergiebt sich die folgende Gleichung:

$$\frac{d}{d\beta}[(\beta-\alpha)^k\, u(\beta)] = u(\beta)\,[c_0(\beta) + c_1(\beta)\,\beta + \ldots + c_{k-1}(\beta)\,\beta^{k-1}] +$$
$$+ \int_\alpha^\beta u(x)[c_1(x) + 2\,c_2(x)\,\beta + \ldots]\, dx,$$

woraus wiederum auf die Existenz der zweiten Ableitung von $u(x)$ geschlossen werden kann. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens beweist man successive die Existenz der weiteren Ableitungen dieser Funktion.

Auf Grund dieser Tatsache kann man Gleichung (4) durch Produktintegration auf die folgende Form bringen:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Lambda[u](x-\alpha)^k (x-\beta)^k \, dx = 0.$$

Wenden wir auf diese Gleichung k-mal die Operation $\frac{\partial^2}{\partial \alpha \, \partial \beta}$ an, d. h. bilden wir die Gleichung

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial \alpha^k \, \partial \beta^k} \int_{\alpha}^{\beta} \Lambda[u](x-\alpha)^k (x-\beta)^k \, dx = 0,$$

so ergiebt sich — wie man leicht erkennt —

$$\int_{\alpha}^{\beta} \Lambda[u] \, dx = 0$$

für jedes α, β, woraus unsre Behauptung $\Lambda[u] = 0$ unmittelbar folgt