Zur Theorie der mehrdeutigen konformen Abbildungen.

Von TIBOR RADÓ.

Wir werden uns mit $(1, m)$-deutigen konformen Abbildungen schlichter Bereiche auf einander beschäftigen. Unter einem Bereiche verstehen wir, wie üblich, eine nur aus inneren Punkten bestehende zusammenhängende Punktmenge der schlichten Ebene. Die Aussage: der Bereich G ist auf den Bereich G' $(1, m)$-deutig konform bezogen, soll Folgendes bedeuten. In G ist eine daselbst meromorphe Funktion $f(z)$ gegeben, die nur Werte annimmt, welche in G' liegen; und wenn α' in G' gelegen ist, so hat die Gleichung $f(z) = \alpha'$ genau m Wurzeln in G, jede Wurzel mit der entsprechenden Multiplicität gerechnet; dabei bedeutet m eine endliche positive ganze Zahl.[1])

Den Anstoss zu den folgenden Betrachtungen hat ein Satz des Herrn *Fatou*[2]) gegeben, den wir in unserer Terminologie wie folgt aussprechen können:

Jede $(1, m)$-deutige konforme Abbildung des Bereiches $|z| < 1$ auf sich selbst wird durch eine rationale Funktion geleistet.

Zum Beweise zieht Herr *Fatou* die tiefen Sätze über die Randwerte der im Einheitskreise beschränkten analytischen Funk-

[1]) Mit Hilfe des *Brouwer*'schen Begriffes der *topologischen Involution* könnten einzelne Sätze dieser Arbeit topologisch formuliert und bewiesen werden.

[2]) *Fatou,* Sur les équations fonctionnelles, Bulletin de la Soc. Math. de France, 1922. p. 174.

tionen heran. Herr *F. Riesz*. der meine Aufmerksamkeit auf diesen Satz gelenkt hat, teilte mir einen elementaren Beweis mit; durch ein rekurrentes Verfahren ging er auf den Fall (1,1) zurück, wo die Abbildung bekanntlich linear ist. Durch einen oft gebrauchten Kunstgriff, der von den Herrn *Carathéodory* und *Fejér* herrührt[3]), führte ich den Satz auf das *„Prinzip des absoluten Betrages"* zurück. Diese Betrachtungen haben mich dann zu den Sätzen geführt, die den Inhalt der vorliegenden Arbeit bilden.

I.

Hilfssatz a). *Seien G, G' zwei schlichte Bereiche und $f(z)$ eine in G meromorphe Funktion, welche eine $(1, m)$-deutige konforme Abbildung von G auf G' definiert.*

Wenn dann in G die Folge α_k gegen einen Randpunkt von G konvergiert, so konvergiert in G' die Folge $f(\alpha_k)$ nie gegen einen inneren Punkt von G.

Beweis. Man setze $\alpha' = \lim f(\alpha_k)$ und nehme an, dass α' innerer Punkt von G' ist. Seien $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ die Wurzeln der Gleichung $f(z) = \alpha'$, und $n_1, n_2, \ldots, n_r$ ihre Multiplicitäten, so dass also $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = m$ ist. Aus den Elementen der Funktionentheorie ist bekannt, dass man um die Punkte $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r, \alpha'$ kleine Kreise $K_1, K_2, \ldots, K_r, K$ schlagen kann, so dass wenn z' in K liegt, die Gleichung $f(z) = z'$ in den Kreisen $K_1, K_2, \ldots, K_r$ bzw. $n_1, n_2, \ldots, n_r$, also zusammen m Wurzeln hat. Ist nun k gross genug, so wird α_k ausserhalb der Kreise $K_1, K_2, \ldots, K_r$, $f(\alpha_k)$ aber in K liegen. Die Gleichung $f(z) = f(\alpha_k)$ hat dann mehr als m Wurzeln, nämlich m Wurzeln in $K_1, K_2, \ldots, K_r$ und ausserdem noch die Wurzel α_k.

Satz 1. (*Satz von Fatou*). *Wenn $f(z)$ eine $(1, m)$-deutige konforme Abbildung des Bereiches $|z| < 1$ auf sich selbst definiert, so ist $f(z)$ rational.*

Beweis. Aus Hilfssatz *a*) folgern wir, dass für $|z| \to 1$ auch $|f(z)| \to 1$. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Wurzeln von $f(z) = o$ im Bereiche $|z| < 1$, und man bilde das Produkt

[3]) *Carathéodory-Fejér*, Remarques sur le théorème de Jensen, Comptes Rendus, 16. juillet, 1907.

$$P(z) = \prod_{i=1}^{m} \frac{z - a_i}{\bar{a}_i z - 1}$$

Dann ist bekanntlich[4]) $|P(z)| = 1$ für $|z| = 1$. Die Funktion

$$g(z) = \frac{f(z)}{P(z)}$$

ist für $|z| < 1$ regulär und von Null verschieden; für $|z| \to 1$ hat man offenbar $|g(z)| \to 1$. Nach dem *„Prinzip des absoluten Betrages"* ist also $g(z)$ eine Konstante.

II.

Der Hilfssatz *a*) gestattet die folgende Umkehrung:[5])

Satz 2. Seien G, G' zwei schlichte Bereiche, und $f(z)$ eine in G meromorphe Funktion, welche folgenden Bedingungen genügt:

A) sie nimmt in G nur Werte an, die in G' liegen,

B) wenn in G die Folge α_n gegen einen Randpunkt von G konvergiert, so konvergiert in G' die Folge $f(\alpha_n)$ nie gegen einen inneren Punkt von G'.

Dann definiert $f(z)$ eine (1, *m*)*-deutige konforme Abbildung von G auf G', wobei m eine endliche positive ganze Zahl ist.*

Beweis. Sei G'' die Menge der Werte, die $f(z)$ in G annimmt. Nach *A*) ist G'' ein Bereich, der ganz im Inneren von G' liegt, (wegen *B*) kann nämlich $f(z)$ keine Konstante sein) und keinen Randpunkt in G' haben kann. Denn sei α' ein *innerer* Punkt von G', der *Randpunkt* von G'' ist. Dann gibt es in G eine konvergente Folge $\alpha_n \to \alpha$, so dass $f(\alpha_n) \to \alpha'$. Wenn dann α innerer Punkt von G wäre, so hätte man $f(\alpha) = \alpha'$, und α' wäre innerer Punkt von G''. Wegen *B*) kann α auch kein Randpunkt von G sein. Der Bereich G'' ist also mit G' identisch.

Ist also α' in G' gelegen, so hat $f(z) = \alpha'$ wenigstens eine Wurzel in G. Die Anzahl der Wurzeln ist stets *endlich*. Sonst

---

[4]) Die einzelnen Faktoren definieren nämlich lineare Transformationen des Einheitskreises in sich.

[5]) Vgl. *Carathéodory u. Rademacher*, Über die Eineindeutigkeit im Kleinen u. im Grossen stetiger Abbildungen von Gebieten. Archiv d. Math. u. Phys. 1907. Unser Beweis ist dem dortigen nachgebildet.

könnte man in G eine konvergente Folge $\alpha_n \to \alpha$ bestimmen mit $f(\alpha_n) = \alpha'$. Wegen B) kann α kein Randpunkt von G sein, und auch kein innerer Punkt von G; denn im zweiten Falle wäre $f(z)$ eine Konstante.

Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f(z) = \alpha'$, $n_1, n_2, \ldots, n_r$ ihre Multiplicitäten, und man setze $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = m$. Um die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha'$ kann man kleine Kreise $K_1, K_2, \ldots, K_r, K$ schlagen, so dass wenn β' in K liegt, die Gleichung $f(z) = \beta'$ in den Kreisen $K_1, K_2, \ldots, K_r$ bzw. genau $n_1, n_2, \ldots, n_r$ Wurzeln hat. Dies bleibt richtig, wenn man $K_1, K_2, \ldots, K_r$ festhält, K aber beliebig verkleinert. Möglicherweise könnten noch Wurzeln vorhanden sein, die *ausserhalb* der Kreise $K_1, K_2, \ldots, K_r$ liegen. Wenn aber K hinreichend klein ist, so kann das nicht vorkommen. Sonst könnte man in G eine konvergente Folge $\alpha_k \to \alpha$ angeben, so dass $f(\alpha_k) \to \alpha'$, und α von den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ verschieden ist. Wegen B) wäre α innerer Punkt von G, es müsste also $f(\alpha) = \alpha'$ sein, und die Gleichung $f(z) = \alpha'$ hätte nicht nur die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, sondern ausserdem noch die Wurzel α. Die Menge der Punkte z' von G', für welche die Gleichung $f(z) = z'$ ebenfalls genau m Wurzeln hat, ist hiernach eine offene Punktmenge. Diese hat keinen Randpunkt in G'; denn jeder Punkt von G' ist *innerer* Punkt einer solchen Punktmenge und kann deshalb kein *Randpunkt* einer anderen sein. Die soeben erklärte Menge fällt also mit G' zusammen.

Damit ist Satz 2. vollständig bewiesen. Als eine Anwendung desselben beweisen wir eine Verallgemeinerung des bekannten *Picard-Darboux*'schen Satzes über ein-eindeutige konforme Abbildung im Grossen.[6])

Satz 3. Seien Γ, Γ' zwei einfache geschlossene Jordan'sche Kurven, G, G' die von ihnen eingeschlossenen Gebiete. Sei ferner $f(z)$ eine in G reguläre Funktion, welche der einzigen Bedingung genügt: wenn in G die Folge α_n gegen einen Punkt α auf Γ konvergiert, so konvergiert die Folge $f(\alpha_n)$ nie gegen einen nicht auf Γ' gelegenen Punkt.

Dann definiert $f(z)$ eine $(1, m)$-deutige konforme Abbildung von G auf G', wo m endlich ist. Die Funktion $f(z)$ ist ausserdem

---

[6]) Siehe etwa die in Fussnote 5) zitierte Arbeit der Herrn *Carathéodory* u. *Rademacher*.

stetig auf Γ, und wenn α' ein Punkt auf Γ' ist, so hat die Gleichung $f(z) = \alpha'$ genau m verschiedene Wurzeln auf Γ.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt, dass $f(z)$ in G beschränkt ist. Dann folgt in bekannter Weise, das der Wertevorrat von $f(z)$ in G liegt und daraus der erste Teil unseres Satzes aus Satz 2. Auf Grund des Satzes über die Ränderzuordnung bei $(1, 1)$-deutiger konformer Abbildung können wir bezüglich des zweiten Teiles annehmen, dass Γ und Γ' mit dem Einheitskreise zusammenfallen. Dann aber hat nach Satz 1. $f(z)$ die Form:

$$f(z) = C \prod_{i=1}^{m} \frac{z - \alpha_i}{\bar{\alpha}_i z - 1}$$

wo $|C| = 1, |\alpha_i| < 1$ $(i=1, 2, \ldots, m)$

Es ist dann alles bewiesen, wenn wir noch zeigen, dass $f'(z)$ am Einheitskreise nirgends verschwindet. Sei β ein Punkt am Einheitskreise; dann liegt $f(\beta) = \beta'$ ebenfalls am Einheitskreise. Wenn $f'(\beta) = o$ ist, so bildet $f(z)$ die Umgebung von β ein-eindeutig auf eine Windungsfläche ab, die β' als Windungspunkt enthält. Bei dieser Abbildung werden die Winkel um β *wenigstens verdoppelt*, und man könnte deswegen einen Weg angeben, der von β ausgehend im Inneren des Einheitskreises verlauft, so dass der entsprechende von β' ausgehende Weg ausserhalb des Einheitskreises liegt. Das ist aber nicht möglich; denn für $|z| < 1$ hat man $|f(z)| < 1$.

III.

Für *mehrfach* zusammenhängende Bereiche gilt der folgende Satz:

Satz 4. Sei G ein Kreisbereich, der von N Kreisen begrenzt ist. Für $N > 1$ gibt es dann keine $(1, m)$-deutige konforme Abbildung von G auf sich selbst, wo m endlich und > 1 wäre.

Für $N > 2$ gilt der Satz auch dann, wenn einzelne oder auch alle Begrenzungskreise in Punkte ausarten.

Beweis. Es seien

$$K_1, K_2, \ldots, K_N \quad N > 1$$

die Begrenzungskreise, und $f(z)$ eine Funktion, welche eine $(1, m)$-

deutige konforme Abbildung von G auf sich selbst definiert. Sei ferner $f_n(z)$ die n-te iterierte Funktion von $f(z)$, also

$$f_1(z)=f[f(z)], \ldots, f_n(z)=f[f_{n-1}(z)]$$

Aus Satz 2. folgt dann, dass $f_n(z)$ eine $(1, m^n)$-deutige konforme Abbildung von G auf sich selbst bestimmt. Wir werden beweisen, dass für einen geigneten Index $n=r$ diese Abbildung $(1, 1)$-deutig ist, woraus dann $m=1$ folgt.

Aus Hilfssatz a) folgt leicht, dass durch $f(z)$ eine Permutation

$$S=\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & N \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_N \end{pmatrix}$$

der Begrenzungskreise hervorgerufen wird im folgenden Sinne. Ist a_n eine Folge in G, welche alle ihre Häufungspunkte etwa am Kreise K_1 hat, so liegen alle Häufungsstellen der Folge $f(a_n)$ am Kreise K_{i_1}. Es gibt also sicher eine iterierte Funktion, welche in diesem Sinne alle Begrenzungskreise fest lässt; denn $f_n(z)$ bewirkt offenbar die Permutation S^n, und für einen geeigneten Index $n=r$ hat man $S^r=1$.

Wir wollen zunächst den besonders einfachen Fall $N=2$ vorwegnehmen. Wir können gleich voraussetzen, dass K_1 und K_2 konzentrisch sind mit dem gemeinsamen Mittelpunkte $z=o$. Dann ist $\frac{f_r(z)}{z}$ eine in G reguläre und von Null verschiedene Funktion, und wenn z gegen den Rand konvergiert, so konvergiert $\left|\frac{f_r(z)}{z}\right|$ gegen 1. Folglich ist diese Funktion eine Konstante, also

$$f_r(z)=Cz$$

Es ist also $m^r=1$, w. z. b. w.

Sei nun $N>2$.[7]) Herr *F. Riesz* hat bemerkt, dass die für $N=2$ entwickelte Schlussweise in gewissem Sinne auch für $N>2$ bestehen bleibt. Mit seiner Erlaubnis teile ich hier seinen Beweis mit.

[7] Für diesen Fall kann man rein topologisch mit Hilfe des Involutionsbegriffes zum Ziele kommen. Dabei kommt der Satz des Herrn *Brouwer* zur Anwendung, nach welchem *jede topologische Involution der vollen Ebene durch eine rationale Funktion definiert werden kann.* Da mir die betreffende Arbeit des Herrn *Brouwer* nicht zugänglich war, ziehe ich vor, funktionentheoretisch zu schliessen.

Der erste Schritt besteht darin, dass man die Regularität von $f_r(z)$ am Rande feststellt. Wir erinnern daran, dass $f_r(z)$ alle Begrenzungskreise fest lässt, und wenden den folgenden Hilfssatz an:

Hilfssatz b). Sei $\varphi(z)$ im Bereiche $o < \varrho < |z| < 1$ regulär; für $|z| \rightarrow 1$ sei auch $|\varphi(z)| \rightarrow 1$. Dann ist $\varphi(z)$ für $|z| = 1$ regulär und man erhält eine analytische Fortsetzung von $\varphi(z)$ dadurch, dass man sowohl die Variable wie auch den Funktionswert am Einheitskreise spiegelt.

Beweis. Offenbar genügt es, die Stetigkeit für $|z| = 1$ nachzuweisen. Sei σ ein kleiner Bogen des Einheitskreises. Dann können wir einen kleinen einfach zusammenhängenden Bereich B angeben, der σ am Rande enthält und in welchem $\varphi(z)$ regulär und von Null verschieden ist. Die Funktion $\log \varphi(z)$ ist dann in B regulär und eindeutig, und der reelle Teil derselben verschwindet stetig am Kreisbogen σ. Diese Funktion ist demzufolge regulär auf σ,[8]) dasselbe gilt dann für die Funktion $\varphi(z)$.

Diesem Hilfssatze zufolge kann $f_r(z)$ über alle Begrenzungskreise hinaus analytisch fortgesetzt werden. Wir können gleich voraussetzen, dass K_1 und K_2 konzentrisch sind mit dem Mittelpunkte $z = o$, und dass die übrigen Begrenzungskreise im Ringe zwischen diesen beiden liegen. Nun erweitern wir den Bereich G und die Funktion $f_r(z)$ durch successive Spiegelung an diesen inneren Begrenzungskreisen bzw. an den Kreisen, die neu hinzutreten. Auf diese Weise erhalten wir nach einer endlichen Anzahl von Schritten einen Kreisbereich G', der ebenfalls von K_1, K_2 und von einer endlichen Anzahl von weiteren Kreisen begrenzt wird, die im Ringe zwischen diesen beiden liegen. Für uns ist die elementare Tatsache wichtig, dass die Radien dieser inneren Kreise durch genügend weit fortgesetzte Spiegelung unterhalb eine beliebig vorgeschriebene positive Grösse gebracht werden können.[9]) Aus Satz 2. folgt, dass die fortgesetzte Funktion $f_r(z)$ auch für den Bereich G' eine $(1, m^r)$-deutige konforme Abbildung bestimmt, wobei alle Begrenzungskreise fest bleiben.

---

[8]) Siehe etwa *Osgood,* Analytische Funktionen komplexer Grössen, Encyklopädie II. B. 1. Seite 57.

[9]) Siehe *Koebe,* Über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche etc, Jahresbericht d. deutschen Math.-Vereinigung, Bd. XV. Heft 2.

Wir bilden nun die Funktion $\frac{f_r(z)}{z}$. Dieselbe ist im ganzen Bereiche G' regulär und von Null verschieden; auf K_1 und K_2 ist ihr absoluter Betrag gleich 1; auf den übrigen Begrenzungskreisen aber wird $\left|\frac{f_r(z)}{z}\right|$ beliebig wenig von 1 abweichen. Denn liegt z auf einem inneren Begrenzungskreise K von G', so liegt auch $f_r(z)$ auf diesem Kreise; der Kreis K liegt dabei im Ringe zwischen den *festen* konzentrischen Kreisen K_1 und K_2, und sein Radius wird beliebig klein. In einem inneren Punkte z_0 von G wird also $\left|\frac{f_r(z_0)}{z_0}\right|$ a fortiori beliebig wenig von 1 abweichen, folglich wird $\frac{f_r(z)}{z}$ überhaupt eine Konstante vom absoluten Betrage 1 sein. Es ist also $f_r(z) = Cz$. Es muss aber $C = 1$ sein, denn es bleibt ja ausser K_1 und K_2 noch *wenigstens* ein Kreis fest, der mit den beiden früheren nicht konzentrisch ist.

Ich bemerke, dass dadurch auch der folgende Satz mit bewiesen ist:[10])

Die identische Abbildung ist die einzige ein-eindeutige konforme Abbildung eines von mehr als zwei Kreisen begrenzten Kreisbereiches auf sich selbst, welche der Bedingung genügt, jeden Begrenzungskreis einzeln in sich überzuführen.

Wir betrachten nun den Fall, wo sich einzelne Begrenzungskreise auf Punkte reducieren. Es wird genügen, den Beweis für den Fall zu führen, dass alle Begrenzungskreise ausarten[11]); die Übergangsfälle erledigt man leicht.

Sei also G die volle Ebene mit Ausschluss von N Punkten. (N endlich und > 2). Auf Grund des Hilfssatzes a) erkennt man: ist $f(z)$ die Abbildungsfunktion, so ist dieselbe auch in den Grenzpunkten meromorph, also überhaupt rational. Für einen geigneten Index $n = r$ wird $f_r(z)$ alle Grenzpunkte fest lassen. Wir können annehmen, dass $0, 1, \infty$ unter den Grenzpunkten enthalten sind. Dann ist $f_r(z)$ ein Polynom vom grade m^r, das nur für $z=0$ verschwindet, also von der Form

$$f_r(z) = C z^{m^r}$$

---

[10]) Siehe *Koebe* l. c.

[11]) Durch den in Fussnote 7) erwähnten *Brouwer*'schen Satz wird es möglich, den allgemeinen Fall auf diesen speziellen zurückzuführen.

ist. Wegen $f_r(1)=1$ ist $C=1$, und da die Gleichung $f_r(z)=1$ nur die Wurzel $z=1$ haben soll, ist $f_r(z)=z$. $f(z)$ selbst, als rationale Funktion ersten Grades, ist linear.

Satz 4. kann in evidenter Weise auf beliebige endlich vielfach zusammenhängende Bereiche verallgemeinert werden; denn ein solcher Bereich kann ein-eindeutig konform auf einen Kreisbereich bezogen werden. Für unendlich vielfach zusammenhängende Bereiche braucht der Satz nicht zu gelten; die Iteration der rationalen Funktionen liefert Beispiele dafür.[12])

IV.

Es liegt nahe zu fragen, wie es mit den $(1, m)$-deutigen konformen Abbildungen eines Kreisbereiches auf einen *anderen* steht. Da werden wir uns auf eine Bemerkung beschränken, die zu einem funktionentheoretisch interessanten Resultate führt.

Der Kreisbereich G mit N Begrenzungskreisen sei auf einen Kreisbereich G' mit N Begrenzungskreisen $(1, m)$-deutig konform bezogen. Für $N>2$ ergibt sich, dass von den $(1, 1)$-deutigen Abbildungen abgesehen stets $N' < N$ sein muss. *Ist es nun möglich, dass $N'=1$ wird?* Sei dann G' das Innere des Einheitskreises. Die Abbildungsfunktion muss dann eine im Innern und am Rande von G reguläre nicht konstante Funktion sein, welche am ganzen Rande von G den absoluten Betrag 1 hat.

Man kann leicht Beispiele für diesen extremen Fall bilden. Man betrachte z. B. die rationale Funktion:

$$f(z)=z+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}+\cdots+\frac{1}{z-n}$$

Man suche den Ort der Punkte, für welche $|f(z)|=R$ ist Dann erkennt man: ist R gross genug, so erhält man $n+1$ einfache geschlossene analytische Kurven, die je eine Umgebung der Punkte $z=1, 2, \ldots, n, \infty$ abgrenzen, und welche zusammen ein $(n+1)$-fach zusammenhängendes Gebiet D abgrenzen, in welchem $f(z)$ regulär ist und am Rande den konstanten absoluten Betrag R hat. Bildet man jetzt den Bereich D auf einen Kreisbereich

---

[12]) Siehe *Fatou*, l. c. Seite 166, Exemple IV.

G ab, und verpflanzt in G die Funktion $\frac{f(z)}{R}$, so hat man das gewünschte Beispiel vor sich.

Wie im Falle $N=1$, so sind auch die für $N > 1$ auftretenden Abbildungsfunktionen in der ganzen Ebene eindeutig. Im Falle $N=1$ sind wir auf rationale Funktionen gekommen; für $N>1$ erhalten wir hingegen Funktionen mit starken Singularitäten.