Über die Tschebyscheffschen Polynome.

Von GABRIEL SZEGÖ in Berlin.

Wir betrachten eine geschlossene, doppelpunktlose, stetige Kurve C in der komplexen x-Ebene und stellen für jedes $n = 0, 1, 2, \ldots$ die Aufgabe, die Potenzfunktion x^n auf der Kurve C durch ein lineares Aggregat von niedrigeren Potenzen der Folge

$$(1) \qquad 1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots,$$

d. h. durch ein Polynom $(n-1)$-ten Grades möglichst genau zu approximieren. Es gibt bekanntlich[1]) ein einziges Polynom $K_{n-1}(x)$ dieser Art und wenn

$$x^n - K_{n-1}(x) = T_n(x)$$

gesetzt wird ($T_n(x)$ ist das Polynom n-ten Grades mit dem höchsten Koeffizienten 1, welches unter allen anderen derselben Form ein möglichst kleines absolutes Maximum auf C besitzt), so gilt für

$$\mu_n = \text{Max}\,|T_n(x)| \text{ auf } C$$

die von *Faber* herrührende Grenzwertgleichung

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\mu_n} = \gamma.$$

Hierbei ist γ eine für C charakteristische positive Zahl, die sich als der Radius des (eindeutig bestimmten) Kreises interpretieren lässt, auf dessen Äussere man das Äussere von C mit Erhaltung

---

[1]) Vgl. einen allgemeineren Satz von *L. Tonelli,* I polinomi d'approssimazione di Tschebychev [Annali di matematica, Bd. 15 (1908), S. 47—119] S. 108. — Ferner *Ch. de la Vallée Poussin,* Sur les polynomes d'approximation à une variable complexe [Bulletin de l'Acad. R. de Belgique, 1911, S. 199—211]. — *G. Faber,* Über Tschebyscheff'sche Polynome [Journal für Mathematik, Bd. 150 (1919), S. 79—106].

des unendlich fernen Punktes und mit dem Abbildungsmodul 1 darin abbilden kann.[2])

In neueren Arbeiten ist immer mehr zum Vorschein gekommen, dass diese Polynome nicht nur mit dem Problem der konformen Abbildung, sondern auch mit manchen interessanten potenzreihen-theoretischen Fragen zusammenhängen.[3]) Ich will in der vorliegenden Arbeit bezüglich dieser Polynome eine Aufgabe behandeln, die einerseits auf eine von *C. Müntz* beantwortete Frage im Gebiet der reellen Approximationen[4]) erinnert, anderseits mit einem vielfach untersuchten Satz von *Fabry* (Lückensatz) aufs engste zusammenhängt.

Diese Frage lässt sich wie folgt formulieren. Nach (2) wird die „Güte" der Approximation von x^n durch niedrigere Potenzen der Folge (1) gewissermassen durch die Zahl γ gemessen. Darf man nun in (1) eine (endliche oder unendliche) Teilfolge

$$(l)\qquad x^{l_1},\ x^{l_2},\ \ldots,\ x^{l_\nu},\ \ldots \qquad (0 \leqq l_1 < l_2 < \ldots < l_\nu < \ldots)$$

unterdrücken, ohne die durch γ gegebene Güte der Approximation zu ändern? Genauer: Man approximiere x^n durch lineare Aggregate von denjenigen Potenzen $1, x, \ldots, x^{n-1}$, die in (l) nicht vorkommen ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Bezeichnet hierbei $\mu_n^{(l)}$ die untere Grenze sämtlicher Maxima auf C, so ist $\{\mu_n^{(l)}\}$ eine ganz bestimmte Folge von nichtnegativen Zahlen, die durch C und die Folge (l) eindeutig bestimmt ist. Die Frage lautet dann: Bei welcher Wahl von (2) gilt wieder für jede Kurve C

$$(2')\qquad \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\mu_n^{(l)}} = \gamma.$$

---

[2]) Vgl. *G. Faber*, a. a. O. [1]), sowie: Über Potentialtheorie und konforme Abbildung [Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie 1920, S. 49—64] S. 55.

[3]) Vgl. *F. Carlson*, Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten [Math. Zeitschrift, Bd. 9 (1921). S. 1—13]. — *G. Pólya*, Sur les séries entières à coefficients entiers [Proc. of the Lond. Math. Society, Series (2), Vol. 21 (1922), S. 22—38]. — *G. Szegő*, Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten [Sitzungsber. der preussischen Akad. 1922, S. 88—91]. — *G. Szegő*, Tschebyscheff'sche Polynome und nichtfortsetzbare Potenzreihen [Math. Ann Bd 87 (1922), S. 90—111].

[4]) Über den Approximationssatz von *Weierstrass* [Schwarz-Festschrift 303—312 (1914)].

Dass $\gamma \leqq \sqrt[n]{\mu_n^{(l)}}$ ist, folgt unmittelbar aus einer *Faber*'schen Bemerkung.[5]) Ferner ist es klar, dass man in (1) jedenfalls eine endliche Anzahl von Gliedern $x^{l_1}, x^{l_2}, \ldots, x^{l_k}$ unterdrücken darf, ohne die Gleichung (2) zu stören. Bezeichnet nämlich etwa l_k die grösste der unterdrückten Exponenten, so ist für $n \geqq l_k + 1$ stets $\mu_n^{(l)} \leqq \mu_{n-l_k-1}$, wie man durch Betrachtung von $x^{l_k+1} K(x)$ unmittelbar einsieht, wobei $K(x)$ ein beliebiges Polynom vom Grade $n - l_k - 1$ mit dem höchsten Koeffizienten 1 bezeichnet.

Ich zeige in §§ 1 und 2 mittels einer an *Faber*[6]) anschliessenden Konstruktion, dass die Folge (l) gewiss die verlangte Eigenschaft besitzt, sobald die l_ν so rapid anwachsen, dass

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{l_\nu}{\nu} = \infty \tag{3}$$

ist. In § 3 verweise ich dann kurz auf den Zusammenhang, der zwischen diesem Satz und dem *Fabry*'schen Lückensatz besteht.

Ohne darauf näher einzugehen, möchte ich hier noch eine andere Approximationsaufgabe erwähnen, die man mit den gleichen Hilfsmitteln behandeln kann. Man kann nämlich bei der Approximation von x^n, anstatt das Fehlen von gewissen Gliedern in (1) zu fordern, die *Vorzeichen* sämtlicher Glieder beliebig vorschreiben und fragen, ob die durch γ gegebene Güte der Approximation noch erhalten bleibt. Besitzt die Kurve C die Eigenschaft, dass die Potenzreihenentwicklung der in § 1 definierten Funktion $\frac{1}{\varphi(z)}$ lauter nichtnegative Koeffizienten aufweist, so ist dies sicher der Fall, sobald die Indizes $l_1', l_2', \ldots, l_\nu', \ldots$, für welche in der Folge der gegebenen Vorzeichen ein Zeichenwechsel eintritt, derselben Wachstumsbedingung wie (3) genügen. Dieser Satz steht

---

5) Ist $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ irgend ein Polynom n-ten Grades, in welchem x^n den Koeffizienten 1 hat, so ist Max $|P(x)|$ auf C mindestens gleich γ^n. Beweis: Ist $\psi(x) = x + \alpha_0 + \alpha_1 x^{-1} + \alpha_2 x^{-2} + \ldots$ die Abbildungsfunktion des Äussern von C auf $|\psi(x)| > \gamma$, so ist $P(x)\,[\psi(x)]^{-n}$ regulär ausserhalb von C, ist 1 für $x = \infty$ und sein Maximum auf C ist gleich γ^{-n} Max $|P(x)|$; hieraus folgt die Behauptung.

6) Über polynomische Entwicklungen II. [Math Ann. Bd. 64 (1907), S 116—135] § 2, S. 118 — Die Idee der Anwendbarkeit der in § 2 benutzten ganzen Funktionen verdanke ich einer Unterhaltung mit Herrn *Ostrowski.*

in ähnlicher Beziehung zu einem (den *Fabry*'schen verallgemeinernden) Satz von *Szász*,[7]) wie der obige zum *Fabry*'schen Lückensatz.

§ 1.

Wir bilden das Äussere der Kurve C der x-Ebene schlicht auf das *Innere* eines Kreises um den Nullpunkt der z-Ebene ab, u. zw. so, dass die Abbildungsfunktion die Form

$$x = \varphi(z) = \frac{1}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots \tag{4}$$

habe. Der Radius dieses Kreises ist durch C eindeutig bestimmt und ist gleich $\frac{1}{\gamma}$, wenn γ den oben festgelegten Sinn hat.

Eine von *Faber* herrührende, aber von ihm nur in speziellen Fällen benutzte Konstruktion — vgl. a. a. O.[6] — führt unmittelbar auf eine ausgedehnte Klasse von Polynomen, die u. a. auch den Beweis des oben formulierten Satzes ermöglichen. In der Tat sei $G(\xi)$ eine in der ganzen ξ-Ebene (auch für $\xi = \infty$) mit Ausnahme von $\xi = 1$ reguläre analytische Funktion mit der Potenzreihenentwicklung

$$G(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \xi^n,$$

die dann offenbar den Konvergenzradius 1 hat. Man setze

$$G(\xi) = G\left(\frac{x}{\varphi(z)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \left(\frac{x}{\varphi(z)}\right)^n. \tag{5}$$

Liegt x im Innern oder auf der Kurve C, während z auf einen festen Kreis $|z| \leqq r < \frac{1}{\gamma}$ eingeschränkt ist, so existiert sicherlich eine (von r abhängende) positive Konstante ω_r derart, dass

$$|1 - \xi| = \left|1 - \frac{x}{\varphi(z)}\right| > \omega_r$$

ist. Wir haben also für solche x und z

$$\left|G\left(\frac{x}{\varphi(z)}\right)\right| < M_r, \tag{6}$$

---

[7]) Über Singularitäten von Potenzreihen und Dirichlet'schen Reihen am Rande des Konvergenzbereiches [Math. Ann. Bd. 85 (1922) S. 99—110].

wo M_r nur von r abhängt. Man erhält nun aus (5), indem man überlegt, dass $\frac{1}{\varphi(z)}$ eine Potenzreihenentwicklung der Form $z + c_2' z^2 + c_3' z^3 + \ldots$ besitzt, nach Umordnen nach den Potenzen von z:

$$G\left(\frac{x}{\varphi(z)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) z^n, \tag{7}$$

wobei $Q_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades mit dem höchsten Koeffizienten g_n bezeichnet. Mit Rücksicht auf (6) folgt hieraus:

$$\left| Q_n(x) \right| < \frac{M_r}{r^n},$$

d. h. es ist gleichmässig auf C

$$\limsup_{n=\infty} \left| Q_n(x) \right|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{r},$$

oder da r beliebig nahe an $\frac{1}{\gamma}$ gewählt werden kann,

$$\limsup_{n=\infty} \left| Q_n(x) \right|^{\frac{1}{n}} \leq \gamma. \tag{8}$$

Die nachfolgenden Betrachtungen stützen sich auf die zweckmässige Wahl der Funktion $G(\xi)$. Hierbei muss noch eine kleine Schwierigkeit überwunden werden, nämlich dass der höchste Koeffizient des Polynoms $Q_n(x)$ nicht notwendig 1, sondern g_n ist. Dies geschieht so, dass man $G(\xi)$ noch mit einem Parameter m belastet: $G(\xi) = G_m(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(m)} \xi^n$ und diese Funktion so wählt, dass gerade der m-te Koeffizient $g_m^{(m)}$ gleich 1 ist.

§ 2.

Um auf die Funktionen $G_m(\xi)$ zu kommen, brauchen wir bloss eine bekannte Konstruktion[8]) etwas abzuändern. Wir setzen

$$h_m(\alpha) = \prod_{\nu=1}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{\alpha^2}{l_\nu^2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(m)} \alpha^k. \tag{9}$$

---

[8]) Vgl. etwa *F. Carlson* und *E. Landau*, Neuer Beweis und Verallgemeinerungen des Fabry'schen Lückensatzes [Göttinger Nachrichten 1921, S. 184 - 188].

Hierbei soll $\{l_\nu\}$ die unendliche Folge in (l) bezeichnen, ν soll sämtliche ganze Zahlen durchlaufen, wenn $m \neq l_\nu$, hingegen ν_0 auslassen für $m = l_{\nu_0}$. Wir sehen, dass die $h_m(\alpha)$ mit den von *Carlson* und *Landau* a. a. O. [8]) benützten ganzen Funktionen φ_n identisch sind, wenn für die dortige Folge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ die Folge $l_1, l_2, l_3, \ldots$ und ev. noch die Zahl m gewählt wird, wenn ferner $\lambda_n = m$. Wir brauchen also nicht ausführlich auseinanderzusetzen, dass (ebenso wie bei *Carlson—Landau*) für jedes $\delta > o$ die folgenden Ungleichungen gelten:

$$(10)\quad \begin{cases} \sum\limits_{k=o}^{\infty} |d_k^{(m)}|\,|\alpha|^k < A(\delta)\,e^{\delta|\alpha|}, \\ |d_k^{(m)}| < B(\delta)\,\dfrac{\delta^k}{k!}, \\ \dfrac{1}{|h_m(m)|} < C(\delta)\,e^{\delta m}. \end{cases}$$

Hierbei sind A, B, C von α, m und k frei.

Wir setzen nun

$$G_m(\xi) = \frac{1}{h_m(m)} \sum_{n=o}^{\infty} h_m(n)\,\xi^n = \frac{1}{h_m(m)} \sum_{k=o}^{\infty} d_k^{(m)} \sum_{n=o}^{\infty} n^k \xi^n.$$

Nach einem Satz der Funktionentheorie[9]) hat diese Funktion die einzige singuläre Stelle $\xi = 1$. Wir brauchen hier etwas mehr, nämlich die Abschätzung

$$(11)\qquad |G_m(\xi)| < D(\delta)\,e^{\delta m},$$

wenn $|1 - \xi|$ oberhalb einer festen positiven Zahl ω bleibt und $D(\delta)$ von n und ξ unabhängig ist (nur von δ und ω abhängt). Hierbei muss δ genügend klein gewählt werden: $\delta < \delta_0$, wo δ_0 von ω abhängt.

Wir zeigen (11) auf die folgende geläufige Weise. Wir wählen δ_0 so klein, dass $\delta_0\, t < 1$, wobei

$$t = t(\omega) = \text{Max}\left(\frac{1}{|1-\xi|},\ \left|\frac{\xi}{1-\xi}\right|\right).$$

---

[9]) Vgl. *G. Faber*, Über die Fortsetzbarkeit gewisser Taylorscher Reihen [Math. Ann. Bd. 57 (1903), S. 369—388] S. 377.

Es ist nach einer bekannten Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k \xi^n = \frac{f_k(\xi)}{(1-\xi)^{k+1}},$$

wo $f_k(\xi)$ ein Polynom k-ten Grades mit lauter nichtnegativen Koeffizienten bezeichnet und $f_k(1) = k!$ ist. D. h.

$$\left|\frac{f_k(\xi)}{(1-\xi)^{k+1}}\right| \leqq \frac{k!}{|1-\xi|^{k+1}} \operatorname{Max}(1, |\xi|^k) \leqq \frac{k!}{\omega} t^k,$$

woraus mit Rücksicht auf (10) die verlangte Abschätzung (11) folgt.

Wir konstruieren nun wie in § 1 die Polynome $Q_n^{(m)}(x)$, definiert durch die Entwicklungen

$$G_m\left(\frac{x}{\varphi(z)}\right) = \frac{1}{h_m(m)} \sum_{n=0}^{\infty} h_m(n) \left(\frac{x}{\varphi(z)}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{(m)}(x) z^n$$

und setzen $Q_n^*(x) = Q_n^{(n)}(x)$. Dieses Polynom n-ten Grades hat offenbar den höchsten Koeffizienten 1, enthält keine Glieder der Folge (l), die niedrigeren als n-ten Grades sind, es gilt ferner gleichmässig im Innern und auf C die Abschätzung

$$|Q_n^*(x)| < \frac{D(\delta)\, e^{\delta n}}{r^n}.$$

Hierbei ist $r < \frac{1}{\gamma}$ und die oben genannte Zahl ω hängt von r ab: $\omega = \omega_r$. D. h.

$$\limsup_{n=\infty} \left| Q_n^*(x) \right|^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{e^{\delta}}{r}.$$

Hier kann r beliebig nahe an $\frac{1}{\gamma}$ und δ (bei festgewählten r) beliebig klein gewählt werden. D. h.

$$\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{\mu_n^{(l)}} \leqq \limsup_{n=\infty} \left| Q_n^*(x) \right|^{\frac{1}{n}} \leqq \gamma.$$

Mit Rücksicht auf die schon oben erwähnte Beziehung $\mu_n^{(l)} \geqq \gamma^n$ folgt hieraus der behauptete Satz.

§ 3.

Aus dem eben bewiesenen Satz folgt ein sehr natürlicher Zugang zu dem sogenannten *Fabry*'schen Lückensatz, der neuerdings von vielen Autoren untersucht worden ist. Dieser lautet wie folgt:

Hat die Potenzreihe $f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^{l_\nu}$, *wobei* $l_1 < l_2 < \ldots$ *positive ganzzahlige Exponenten mit*

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{l_\nu}{\nu} = \infty$$

sind, den Konvergenzradius 1, *so kann sie nicht über den Einheitskreis* $|z| < 1$ *hinaus fortgesetzt werden.*

Sonst könnte man nämlich über die Zahlen $\varphi_1, \varphi_2, R, \eta$ so verfügen, dass $0 \leqq \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$, $R > 1$, $\eta > 0$ ist, dass ferner $f(z)$ regulär sei in dem von der folgenden Kurve Γ begrenzten Bereiche: Γ besteht aus den Stücken:

$$\Gamma \begin{cases} \text{der Kreisbogen} \quad |z| = 1 - \eta, & \varphi_2 \leqq \operatorname{Arg} z \leqq \varphi_1 + 2\pi, \\ \text{die Strecken} \quad 1 - \eta \leqq |z| \leqq R, & \operatorname{Arg} z = \varphi_1 \text{ bzw. } \varphi_2, \\ \text{der Kreisbogen} \quad |z| = R, & \varphi_1 \leqq \operatorname{Arg} z \leqq \varphi_2. \end{cases}$$

Wird hier (bei festen φ_1, φ_2, R) η genügend klein gewählt, so besitzt der Bereich, der hieraus durch die Transformation $z' = \frac{1}{z}$ entsteht, eine Abbildungskonstante, die kleiner ist als eine feste Zahl $\gamma < 1$, welche von η unabhängig ist. Man hat nun

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z^{l_\nu + 1}} dz.$$

Wegen des speziellen Charakters der Potenzreihe $f(z)$ kann ich offenbar setzen:

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z} Q\left(\frac{1}{z}\right) dz,$$

wobei $Q\left(\frac{1}{z}\right) = Q(z')$ ein *beliebiges* Polynom l_ν-ten Grades mit dem höchsten Koeffizienten 1 bezeichnet, in welchem sämtliche Glieder mit den Exponenten $l_1, l_2, \ldots, l_{\nu-1}$ fehlen. Nach dem oben Bewiesenen lässt sich aber ein solches Polynom Q derart angeben, dass wenn z auf Γ liegt, gleichmässig

$$\left| Q\left(\frac{1}{z}\right) \right| < (\gamma + \varepsilon)^{l_\nu},$$

ist, wobei ε positiv und beliebig klein ist. Hieraus folgt

$$|a_\nu| < K(\gamma + \varepsilon)^{l_\nu},$$

mit einem von ν freien K. D. h.

$$\limsup_{\nu=\infty} \left| a_\nu \right|^{\frac{1}{\nu}} \leqq \gamma + \varepsilon$$

oder da ε beliebig klein ist,

$$\limsup_{\nu=\infty} \left| a_\nu \right|^{\frac{1}{\nu}} \leqq \gamma < 1,$$

was der Tatsache widerspricht, dass $f(z)$ den Konvergenzradius 1 hat.

Es ist zu bemerken, dass diese Beweisanordnung kaum eine Vereinfachung gegenüber den bekannten bedeutet, hauptsächlich weil die ganzen Funktionen, welche das Haupthilfsmittel aller dieser Beweise bilden, auch hier, u. zw. schon bei der in § 2 behandelten Fragestellung herangezogen worden sind.

Die hier dargelegte Beziehung zu dem *Fabry*'schen Lückensatz zeigt auch ungefähr den Weg an, auf dem man zu beweisen versuchen wird, dass die Bedingung (3) auch hinreicht, um das Bestehen der Grenzwertgleichung (2′) behaupten zu können. In der Tat ist es klar, dass wenn $\{l_\nu\}$ irgend eine unendliche Folge ist, für die *mindestens eine* über ihren Konvergenzkreis hinaus fortsetzbare Potenzreihe der Form $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^{l_\nu}$ existiert, so kann bei dieser Folge die Gleichung (2′) unmöglich gelten, wenigstens nicht für sämtliche geschlossene, doppelpunktlose und stetige Kurven C. (Sonst würde nämlich auf die obige Weise die Nichtfortsetzbarkeit der Potenzreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^{l_\nu}$ folgen.) Es ist mir jedoch nicht gelungen, auf diesem Wege die naheliegende Vermutung, dass die Bedingung (3) auch *notwendig* ist, damit (2′) bestehe, zu bestätigen.

Berlin, November 1922.