Über die Erweiterung eines algebraischen Zahlkörpers durch Henselsche Grenzwerte.

Von MICHAEL BAUER in Budapest.

1. Es sei

$$(1) \qquad f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n = 0, \; f(\omega) = 0,$$

eine ganzzahlige, im gewöhnlichen Sinne irreduzible Gleichung. Für die Untersuchung des Körpers $K(\omega)$ ist es sehr vorteilhaft den Körper durch *Henselsche* Grenzwerte zu erweitern. Es besteht nämlich ein Zusammenhang zwischen den Primidealfaktoren einer Primzahl p und den p-adischen irreduziblen Faktoren von (1). Um diesen Zusammenhang unvermittelt und einfach zu begründen, habe ich in der Arbeit[1]: „Die Theorie der p-adischen bzw. $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen und die gewöhnlichen algebraischen Zahlkörper" zum Körper $K(\omega)$ zunächst die gewöhnlichen Konjugierten adjungiert und dann den so gewonnenen Körper G durch *Henselsche* Grenzwerte, d. h. durch die Fundamentalreihen in bezug auf ein Primideal $\mathfrak{P}$ von p im Körper G erweitert.[2])

2. Für manche Zwecke, z. B. für die Untersuchung des Körpers $K(\omega)$ in bezug auf $\mathfrak{p}$ — ein Primideal von $K(\omega)$ — genügt es den Körper durch die auf $\mathfrak{p}$ bezüglichen Fundamentalreihen zu erweitern.[3]) In dieser Arbeit werde ich ohne weitere Adjunktion beweisen, dass der Körper $K(\mathfrak{p})$ identisch mit dem Körper $K(\omega, p)$ ist, welcher aus $K(\omega)$ durch die Adjunktion der rationalen p-adischen Zahlen entsteht und die Zahl ω eine p-adische

[1]) Math. Zeitschrift. Bd. 14 (1922), S. 244—249.
[2]) Vgl. das Ende des Punktes 5. dieser Arbeit.
[3]) Vgl. die in meiner Arbeit [1]) unter [13]) und [14]) zitierten Abhandlungen.

irreduzible Gleichung vom Grade $m = fg$ erfüllt, wenn im Körper $K(\omega)$

(1*) $$p = \mathfrak{p}^g \cdot \mathfrak{q}, \ (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 1$$

ausfällt und $\mathfrak{p}$ den Grad f besitzt.

3. Die Grössen des Körpers $K(\omega, p)$ sind im Körper $K(\mathfrak{p})$ enthalten, nur die Umkehrung muss bewiesen werden; es genügt ganze Grössen des Körpers $K(\mathfrak{p})$ zu betrachten. Ist π eine ganze Zahl des Körpers $K(\omega)$, die genau $\mathfrak{p}$ enthält, dann ist jede ganze Grösse α des Körpers in der Gestalt:

(2) $$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \pi + \alpha_2 \pi^2 + \ldots (\mathfrak{p})$$

darstellbar, wo die Zahlen α_r ganze Zahlen des Körpers $K(\omega)$ sind. Man hat also

(2*) $$\alpha_r = c_{1r}\,\omega_1 + c_{2r}\,\omega_2 + \ldots + c_{nr}\,\omega_n,$$

die Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ bilden ein Fundamentalsystem der ganzen Zahlen von $K(\omega)$ und die Zahlen c_{jr} sind rational-ganz.[4]) Der Beweis wird sehr einfach, wenn wir noch die erlaubte Annahme[5]) machen, dass die Zahl π durch $\mathfrak{q}$ teilbar ist. In diesem Falle wird

$$\pi^{gl+k} = \pi^k p^l \beta_l, \ \beta_l = \alpha_{1l}\,\omega_1 + \ldots + \alpha_{nl}\,\omega_n$$
$$\alpha_{jl} \text{ rat. ganz,}$$

folglich ist

(3) $$\alpha = \sum_{k=0}^{g-1} \sum_{i=1}^{n} p_{ik}\,\omega_i\,\pi^k,$$

wo die Zahlen p_{ik} ganze rationale p-adische Zahlen sind.

Da die Zahlen ω_i, π rationale Funktionen von ω bilden, ist unsere Behauptung bewiesen.

4. Wir werden beweisen, dass die ganzen Grössen der Körper $K(\mathfrak{p})$ und $K(\omega, p)$ identisch sind. Eine Grösse ist als Grösse von $K(\mathfrak{p})$ ganz, wenn sie eine Darstellung (2) zulässt, also aequivalent einer nicht negativen Potenz von π ist; dieselbe ist als Grösse von $K(\omega, p)$ ganz, wenn sie einer Gleichung mit

---

[4]) Es lässt sich nämlich ohne die Konjugierten zu benützen, beweisen, dass in $K(\omega)$ ein Fundamentalsystem der ganzen Zahlen existiert. Dies folgt aus den allgemeineren Betrachtungen, die wir im Punkte 6. geben.

[5]) Es ist leicht ersichtlich, wie der Beweis ohne diese Annahme zu führen ist.

ganzen rationalen p-adischen Koeffizienten genügt, deren höchster Koeffizient gleich Eins ausfällt. Ist nun α als Grösse von $K(\mathfrak{p})$ ganz, so hat man nach dem Vorigen

$$(3^*) \qquad \alpha\,\omega_j\,\pi^h = \sum_{k=0}^{g-1}\sum_{l=1}^{n} p\gamma_k^{(j,h)}\,\omega_l\,\pi^k,\ (j=1,2,\ldots,n;\ h=0,1,\ldots;g-1)$$

wo die Zahlen $p\gamma_k^{(j,h)}$ ganze rationale p-adische Zahlen sind, nach der Theorie des linearen Gleichungssystems ist also α auch als Grösse von $K(\omega,\,p)$ ganz. Wir werden beweisen, dass eine Grösse von der Gestalt

$$(4) \qquad \pi^a\,(\alpha_0+\alpha_1\,\pi+\ldots)\,(\mathfrak{p})$$

$$a<0,\ \alpha_l \text{ ganz (als Gr. von } K(\omega)),\ \alpha_0 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

als Grösse von $K(\omega,\,p)$ keine ganze Grösse sein kann. Im entgegengesetzten Falle wären die Grössen $\frac{1}{\alpha_0+\alpha_1\,\pi+\ldots}$, π^a, $\frac{1}{\pi}$ ganze Zahlen von $K(\omega,\,p)$. Dies ist aber nicht richtig. Die Zahl π erfüllt eine irreduzible Gleichung

$$(5) \qquad \pi^\nu + a_1\,\pi^{\nu-1} + \ldots + a_{\nu-1}\,\pi + a_\nu = 0\ (p),$$

deren Koeffizienten ganze rationale p-adische Zahlen sind. Aus (5) folgt, dass a_ν teilbar durch p ist[6]), also genügt $\frac{1}{\pi}$ der irreduziblen Gleichung

$$(5^*) \qquad \left(\frac{1}{\pi}\right)^\nu + \frac{a_{\nu-1}}{a_\nu}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\nu-1} + \ldots + \frac{1}{a_\nu} = 0\ (p).$$

da die Zahl $\frac{1}{a_\nu}$ keine ganze Zahl ist, wird auch $\frac{1}{\pi}$ keine ganze Grösse von $K(\omega,\,p)$ bilden.

5. Die Zahl ω genügt einem irreduziblen Faktor der Gleichung (1). Es sei

$$(6) \qquad g(x) = x^m + p_1\,x^{m-1} + \ldots + p_m = 0\ (p)$$

die irreduzible p-adische Gleichung, deren Wurzel ω ist.[7]) Wir werden die Anzahl der (mod. p) inkongruenten ganzen Zahlen

---

[6]) Es ist nämlich $\frac{a_\nu^g}{p}$ aequivalent einer nicht negativen Potenz von π.

[7]) Die Gleichung hängt von $\mathfrak{p}$ ab, es handelt sich um die Entwickelung von ω nach $\mathfrak{p}$. Vgl. meine Arbeit [1]).

des Körpers $K(\mathfrak{p}) = K(\omega, p)$ nach Herrn *Hensel* auf zweierlei Weise bestimmen. Man kann zunächst ohne weitere Adjunktion beweisen[8]), dass ein Fundamentalsystem der ganzen Zahlen existiert, welche aus m Grössen besteht, also ist die fragliche Anzahl gleich p^m. Andererseits folgt aus (1*) und der additiven Darstellung (2), dass die Anzahl der (mod. p) inkongruenten ganzen Grössen gleich p^{fg} ausfällt; es ist also $m = fg$, was zu beweisen war.

Ist die Gleichung (1) eine Galoissche Gleichung, so besitzt sie in den Körpern $K(\omega)$ und $K(\mathfrak{p}) = K(\omega, p)$ dieselben n verschiedenen Wurzeln. Da sämtliche Wurzeln rationale Funktionen von einander sind, wird (1) im Körper der rationalen p-adischen Zahlen gleich dem Produkte von einander verschiedenen irreduziblen Faktoren des Grades fg ausfallen.[9])

6. Nun werden wir nachträglich ohne weitere Adjunktion beweisen, dass die ganzen Zahlen des Körpers $K(\omega)$, bzw. des Körpers $K(\mathfrak{p}) = K(\omega, p)$ Fundamentalsysteme aufweisen.[10]) Es sind einige einfache Betrachtungen über sog. endliche Erweiterungen erforderlich.[11]) Wenn $\mathfrak{K}$ eine endliche Erweiterung des Körpers K bildet und die Grössen

$$(7) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

in bezug auf K linear unabhängige Grössen sind, deren Anzahl eine maximale ist, dann lässt sich jede Grösse Ω des Körpers $\mathfrak{K}$ eindeutig in der Form

$$(7^*) \qquad \Omega = r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + \ldots, + r_n \alpha_n$$

---

[8]) Dieser Satz wird auch aus den Betrachtungen des Punktes 6. folgen. Vgl. die Fussnote [3]).

[9]) Da sämtliche Wurzeln in Betracht kommen, ist es unnötig in diesem Falle die Konjugierten zu vermeiden. Es ist zu betonen, dass man auf diese Weise den tieferen Zusammenhang zwischen einer Zahl und ihren „Bildern", sowie andere Tatsachen nicht bekommt. Die Untersuchungen sind auf Relativkörper ausdehnbar.

[10]) Ich glaube die für uns wichtigen Beweise genau angeben zu müssen, zumal dieselben bei *Hensel* nicht ausgeführt sind. Vgl. Eine neue Theorie der alg. Zahlen. Math. Zeitschrift. Bd. 2 (1918), S. 433—452, bzw. S. 442—443. Neue Begründung etc. Math. Zeitschrift. Bd. 5 (1919), S. 118—131, bzw. S. 127.

[11]) Die Terminologie ist die *Steinitz*'sche. Vgl. seine grosse Abhandlung: Algebraische Theorie der Körper. Journal für Math. Bd. 137 (1910), S. 167—309, § 7.

darstellen, wo $r_1, r_2, \ldots, r_n$ Grössen von K sind. Aus den Relationen

$$\Omega \alpha_i = r_{i1} \alpha_1 + r_{i2} \alpha_2 + \ldots + r_{in} \alpha_n, \quad (8)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$
$$(r_{ik} \text{ Gr. von } K)$$

erhält man bekannterweise die charakteristische Gleichung für Ω, ihre Norm und Spur durh die Formeln :

$$(8^*) \quad F(\Omega) = |r_{ik} - \Omega| = 0, \; N(\Omega) = |r_{ik}|, \; S(\Omega) = r_{11} + r_{22} + \ldots + r_{nn}$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

und es ist

$$F(x) = N(\Omega - x).$$

Diese Begriffe sind von der Wahl der Basis (7) unabhängig.

Sind $r, r_1, r_2, \ldots r_n$ Grössen von K und Ω_1, Ω_2 Grössen von $\mathfrak{K}$, dann wird:

$$(9) \quad \left. \begin{array}{c} N(r) = r^n, \; S(r) = nr, \; S(r_1 \Omega_1 + r_2 \Omega_2) = r_1 S(\Omega_1) + r_2 S(\Omega_2) \\ N(\Omega_1 \Omega_2) = N(\Omega_1) N(\Omega_2) \end{array} \right\}$$[12].

und wenn

$$\triangle(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = |S(\alpha_i \alpha_k)|$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

gesetzt wird, hat man:

$$(10) \quad \left. \begin{array}{l} \triangle(\alpha_1, \alpha_2 + r \alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = \triangle(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \\ \triangle(r_1 \alpha_1 + \ldots + r_n \alpha_n, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = r_1^2 \triangle(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \end{array} \right\}$$

Es besteht der folgende Satz. Die Grössen des Körpers $\mathfrak{K}$

$$(11) \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

sind dann und nur dann in bezug auf K linear unabhängig, wenn

$$(11^*) \quad \triangle(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq 0$$

ausfällt.

Sind zunächst die Grössen (11) linear unabhängig und $\Omega' \neq 0$, so hat man :

---

[12]) Aus der Formel ist ersichtlich, dass aus $N(\Omega) = 0$, die Relation $\Omega = 0$ folgt. Man kann noch beweisen, dass die charakteristische Gleichung immer die Potenz einer irreduziblen Gleichung ist.

$$\Omega = r_1 \alpha_1 \quad r_2 \alpha_2 + \ldots + r_n \alpha_n, \quad \frac{1}{\Omega} = r_1' \alpha_1 + r_2' \alpha_2 + \ldots + r_n' \alpha_n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i' \, S(\Omega \, \alpha_i) = S(1) \neq 0,$$

folglich besitzt das Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, S(\alpha_i \, \alpha_k) = 0 \qquad (12)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

nur die Lösung $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, woraus $|S(\alpha_i \, \alpha_k)| \neq 0$ folgt.

Es seien jetzt $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ in bezug auf K linear unabhängige Grössen, dann hat man:

$$\alpha_i \, \alpha_k = (v_{i1} \beta_1 + v_{i2} \beta_2 + \ldots, + v_{in} \beta_n)(v_{k1} \beta_1 + v_{k2} \beta_2 + \ldots + v_{kn} \beta_n),$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

woraus die Relation

$$|S(\alpha_i \, \alpha_k)| = |S(\beta_i \, \beta_k)| \, |v_{ik}|^2 \qquad (12^*)$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

folgt, wo die Grössen v_{ik} zum Körper K gehören. Ist nun $|S(\alpha_i \, \alpha_k)| \neq 0$, so wird $|v_{ik}| \neq 0$, die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sind in bezug auf K linear unabhängig.

*W*ir bekommen ein Fundamentalsystem der ganzen Zahlen der Körper $K(\omega)$, bzw. $K(\mathfrak{p}) = K(\omega, p)$, wenn die Grössen der betreffenden Basen ganze Grössen sind und die zugehörigen Determinanten $\triangle$ einen minimalen absoluten Wert, bzw. eine minimale Ordnung in bezug auf p aufweisen.[13])

---

[13]) Im Falle eines gewöhnlichen algebraischen Zahlkörpers n-ten Grades, lassen sich ausser der Existenz des Fundamentalsystems, noch weitere Sätze ohne Anwendung der Konjugierten ableiten. Ist Ω eine ganze Zahl und bilden $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ein Fundamentalsystem der ganzen Zahlen, so folgt aus

$$\Omega \, \omega_i = c_{i1} \, \omega_1 + c_{i2} \, \omega_2 + \ldots + c_{in} \, \omega_n, \; c_{ik} \text{ rat. ganz}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

$N(\Omega) \cdot \omega_i = \Omega \gamma_i$ wo γ_i eine ganze Zahl ist. Da Eins eine ganze Zahl bildet, bekommt man, dass die Norm einer ganzen Zahl durch dieselbe teilbar ist. Man kann auch Normen der Formen und Ideale in der angedeuteten Weise in Betracht ziehen und durch Anwendung der bekannten Literatur ist eine Reihe von Sätzen ohne Benützung der Konjugierten ableitbar. Solche Sätze sind: der Hauptsatz der Idealtheorie, die Endlichkeit der Klassenanzahl, der Zusammenhang zwischen der Grundgleichung (mod. p) mit den Primfaktoren von p. (Natürlich ist nicht ein jeder der bekannten Beweise zu diesem Zwecke geeignet.)