Sur les suites de fonctions analytiques.

Par M. FRÉDÉRIC RIESZ à Szeged.

1. Dans une conférence faite au congrès des mathématiciens scandinaves, tenu à Stockholm en 1916, M. Marcel *Riesz* et l'auteur ont démontré le théorème suivant:

I. *Pour une fonction $f(z)$ holomorphe et bornée à l'intérieur d'un cercle, les valeur limites aux points de la circonférence du cercle ne peuvent s'annuler que sur un ensemble de mesure nulle, sauf dans le cas évident où $f(z) \equiv 0$.*[1])

Par valeurs limites d'une fonction aux points d'une circonférence de cercle nous entendons — ici et dans la suite — les valeurs limites radiales c'est-à dire les limites formées suivant les rayons aboutissant aux points considérés. Il convient d'observer que, pour les fonctions en question ce n'est pas essentiel de se borner aux valeurs limites radiales, puisque d'aprés un théorème de M. *Fatou* on obtient la même limite — au moins presque partout — sur tout chemin faisant un angle $< \frac{\pi}{2}$ avec le rayon.[2])

M. *Ostrowski* vient de généraliser le théorème I en énonçant — sans démonstration — le théorème que voici:

II. *Étant donnée une suite indéfinie de fonctions $f_n(z)$, holo-*

---

[1]) F. u. M. *Riesz*, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, Compte rendu du quatrième congrès des mathématiciens scandinaves (1916), p. 27—44, cf. p. 32.

[2]) P. *Fatou*, Séries trigonométriques et series de Taylor, Acta math. *30* (1906), p. 335—400, cf. p. 348 et 357. E. *Lindelöf*, Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme, Acta Soc. Scient. Fennicae *46* (1915), n° 4, cf. p. 10, a démontré que, pour $f(z)$ bornée, le fait indiqué suit déjà si l'on suppose seulement qu'il existe un chemin quelconque (ligne de Jordan simple), aboutissant au point considéré et sur lequel $f(z)$ tend vers une valeur limite. Voir aussi P. *Montel*, Sur la représentation conforme, Journal des math. pures et appl. 7e série, *3* (1917), p. 1—54; cf. p. 19.

morphes et bornées dans leur ensemble à l'intérieur d'un cercle, supposons que la suite des valeurs limites respectives soit convergente sur un ensemble de mesure positive; alors la suite des $f_n(z)$ est convergente dans tout l'intérieur du cercle.[3])

On montre aisément que le théorème II est compris dans le suivant qui d'ailleurs montre d'une façon plus nette l'analogie avec le théorème I:

III. *Étant donnée une suite indéfinie de fonctions $f_n(z)$, holomorphes et bornées dans leur ensemble à l'intérieur d'un cercle, supposons que les valeurs limites respectives tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$ sur un ensemble de mesure positive; alors les $f_n(z)$ tendent vers zéro dans tout l'intérieur du cercle.*

En effet, pour obtenir II, il suffit d'appliquer le théorème III aux suites de la forme $\{f_m(z) - f_n(z)\}$, m et n allant à l'infini indépendemment. Il convient d'observer que, en réalité, les théorèmes II et III sont équivalents c'est-à-dire que l'on peut aussi déduire III de II; pour cela, on n'a qu'à appliquer le théorème II à la suite $f_1(z)$, 0, $f_2(z)$, 0, ...

Au premier abord, la relation entre les théorèmes I et III semble d'être évidente. En effet, depuis les recherches bien connues de MM. *Vitali* et *Montel* sur les familles normales de fonctions on s'est servi bien de fois, pour des généralisations de cette sorte, de l'ordre d'idées suivant: Supposons que les $f_n(z)$, appartenant à une famille normale, par exemple holomorphes et bornées dans leur ensemble à l'intérieur d'un certain domaine D, tendent vers zéro aux points d'un ensemble E sans tendre vers zéro partout en D; alors il y a en D une valeur $z = z_0$ telle que la suite $f_n(z)$ ou une suite partielle convenablement choisie tende, pour $z = z_0$, vers une limite $\neq 0$, et par un second choix on parvient àune suite partielle convergeant, dans tout l'intérieur de D, vers une fonction holomorphe $f^*(z)$ s'annulant aux points de l'ensemble E, mais ne s'annulant pas pour $z = z_0$. Mais cela implique contradiction dans tous les cas où l'on a choisi l'ensemble E de sorte que

---

3) Auszug aus einem Briefe von A. *Ostrowski* an L. Bieberbach, Jahresbericht d. deutschen Math.-Vg., *31* (1922), p. 82—85; cf. p. 85.

Dans une conférence faite à la réunion annuelle des mathématiciens allemands, tenue à Leipzig en septembre 1922, M. Ostrowski a donné quelques indications relatives à la démonstration.

l'évanouissement de $f^*(z)$ sur E entraîne l'évanouissement dans tout le domaine D, p. ex. dans le cas où l'ensemble E admet un point limite intérieur à D.

Or si l'on voulait appliquer cette recette au cas considéré, comme dans ce cas E appartient à la frontière du domaine D, il faudrait tout d'abord se demander s'il est permis d'intervertir l'ordre des deux passages à la limite $r \to 1$ et $n \to \infty$ Il n'en est rien, comme le montre l'exemple: $f_n(z) = (1-z)^{\frac{1}{n}}, f^*(z) = 1, f_n(1) = 0$, $f^*(1) = 1$.

On voit par ces remarques que le théorème de M. *Ostrowski* n'est pas une conséquence de notre théorème I et du théorème de choix de M. *Vitali* ou au moins qu'il n'en est pas une conséquence évidente. Il ne sera donc pas sans intérêt de voir comment le raisonnement dont nous nous sommes servis dans la conférence indiquée, pour obtenir le théorème I, conduit aussi, presque sans modification, au théorème III.

2. Supposons, ce qui ne restraint pas la généralité, qu'il s'agisse du cercle-unité et soit $m > 0$ la mesure de l'ensemble E, appartenant à la circonférence du cercle et sur lequel les valeurs limites des fonctions $f_n(z)$ tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Désignons par A une quantité positive dont nous disposerons plus tard. Soit $u(x, y)$ la fonction harmonique qui correspond, par l'intégrale de *Poisson*, aux valeurs suivantes: $\frac{A}{m}$ pour l'ensemble E, $\frac{A}{m-2\pi}$ pour l'ensemble complémentaire E^*. D'après M. *Fatou*, cette fonction aura les valeurs données pour valeurs limites radiales, sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle.[4]) De plus, comme l'intégrale des valeurs données s'annule, on aura $u(0, 0) = 0$. En introduisant encore la fonction harmonique conjuguée $v(x, y)$ dans laquelle on dispose de la constante additive arbitraire de sorte que $v(0, 0) = 0$, la fonction

$$g(z) = g(x+iy) = e^{u(x,y)+iv(x,y)}$$

sera holomorphe et bornée à l'intérieur du cercle-unité, elle sera égale à 1 pour $z = 0$ et ses valeurs limites radiales seront égales en module, presque partout, à $e^{\frac{A}{m}}$ ou à $e^{\frac{A}{m-2\pi}}$ suivant que le

[4]) l. c., p 366/7.

point en question appartient à l'ensemble E ou à son complément E^*.

Envisageons maintenant les fonctions $f_n(z)\,g(z)$; ces fonctions sont holomorphes et bornées dans leur ensemble tout comme les $f_n(z)$; on y peut donc appliquer les formules de *Cauchy* non seulement en intégrant le long d'une circonférence $|z| = r < 1$, mais aussi pour $|z| = 1$, ce qui vient immédiatement du théorème de M. *Lebesgue* concernant l'intégration terme à terme des suites bornées. En particulier on a

$$f_n(0) = f_n(0)\,g(0) = \frac{1}{2\,i\,\pi}\int\limits_{|z|=1}\frac{f_n(z)\,g(z)}{z}\,dz = \frac{1}{2\,i\,\pi}\left\{\int\limits_{E} + \int\limits_{E^*}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\,i\,\pi}(I_1 + I_2).$$

Nous allons montrer que $f_n(0) \to 0$ c'est-à-dire que, en choisissant arbitrairement une quantité positive ε, on aura $|f_n(0)| < \varepsilon$ pour n suffisamment grand. Dans ce but, commençons par évaluer l'intégrale I_2. On a

$$|I_2| \leqq e^{\frac{A}{m-2\pi}}\int\limits_{E^*}|f_n(z)|\,|dz| \leqq e^{\frac{A}{m-2\pi}}\int\limits_{|z|=1}|f_n(z)|\,|dz|$$

et comme les fonctions $f_n(z)$ sont bornées dans leur ensemble, il vient

$$|I_2| \leqq C\,e^{\frac{A}{m-2\pi}}$$

où la constante C ne dépend ni de n ni du paramètre A. Par suite, nous pouvons disposer de A de sorte que le second membre de la dernière inégalité devienne $< \pi\,\varepsilon$; alors on aura

$$\frac{1}{2\pi}\,|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et cela pour tous les n.

Pour évaluer I_1, observons que, A une fois choisi, les fonctions sous le signe d'intégration restent bornées dans leur ensemble et que, sur E, elles tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Par conséquent, en vertu du théorème de M. *Lebesgue*, $I_1 \to 0$. C'est-à-dire que, pour n suffisamment grand, on aura

$$\frac{1}{2\pi}\,|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et en somme, on aura $|f_n(0)| < \varepsilon$, c. qu. f. d.

La démonstration du fait que $f_n(z) \to 0$ dans tout l'intérieur du cercle-unité s'achève maintenant comme il suit. Il suffit de prouver que l'on a aussi $f'_n(0) \to 0$, $f''_n(0) \to 0$ et, en général, $f_n^{(k)}(0) \to 0$ pour tous les k; la relation $f_n(z) \to 0$ s'ensuit par un théorème classique. En raisonnant par récurrence, il suffit donc de montrer que les relations $f_n^{(k)}(0) \to 0$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1$ entraînent $f_n^{(\nu)}(0) \to 0$. Pour cela, considérons les polynomes

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} z^k;$$

d'après l'hypothèse faite, les coefficients de ces polynomes et alors les polynomes eux-mêmes tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$, la convergence étant uniforme dans tout domaine fini; en particulier, les polynomes $p_n(z)$ restent, pour $|z| \leqq 1$, inférieures à une constante K. Les fonctions $f_n(z)$ étant inférieures, selon l'hypothése, à une constante L, la différence $f_n(z) - p_n(z)$ sera, pour $|z| < 1$, inférieure à $K + L$ et comme $z = 0$ en est un zéro d'ordre $\geqq \nu$, la fonction

$$\varphi_n(z) = \frac{f_n(z) - p_n(z)}{z^\nu}$$

sera aussi holomorphe et inférieure à $K + L$ pour $|z| < 1$. C'est-à-dire que les fonctions $\varphi_n(z)$ remplissent les mêmes hypothéses que les $f_n(z)$; il s'ensuit que

$$f_n^{(\nu)}(0) = \nu!\, \varphi_n(0) \to 0$$

et la démonstration est achevée.

Au lieu de passer aux dérivées, on aurait pu aussi démontrer la relation $f_n(z_0) \to 0$ pour toute valeur z_0 intérieure au cercle-unité en partant de la remarque que l'on peut effectuer une transformation linéaire de ce cercle en lui-même et cela de sorte que le point z_0 passe au point $z = 0$; alors aux ensembles de mesure positive, il y corresponde des ensembles de même nature et réciproquement; enfin les valeurs limites radiales seront les mêmes en des points correspondants. Grâce à cette remarque, le cas général se réduit au cas $z = 0$.

3. *Le théorème I reste vrai quand on y remplace l'hypothèse que la fonction $f(z)$ soit bornée, par l'hypothèse plus générale que les valeurs moyennes*

$$\mu_\delta(r) = \mu_\delta(f; r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\vartheta}) \right|^\delta d\vartheta$$

restent, pour une certaine valeur positive de l'exposant δ, et pour $r < 1$, inférieures à une borne qui ne dépend pas de r. L'intérêt que l'on apporte à ces valeurs moyennes est motivé en premier lieu par un théorème de M. *Hardy*;[5]) ce théorème dit entre autres que les valeurs moyennes $\mu_\delta(r)$ vont en croissant avec r et que, par conséquent, pour $\delta > 0$ donné, il ne peuvent se présenter que deux cas: ou bien les $\mu_\delta(r)$ vont à l'infini pour $r \to 1$ ou bien elles restent bornées et tendent vers une limite $\mu^*_\delta = \mu^*_\delta(f)$; alors cette limite est une borne supérieure des quantités $\mu_\delta(r)$.

Comme m'a fait observer M. *Ostrowski*,[6]) *le théorème II* (et alors évidemment le théorème III) *peuvent être généralisés d'une façon analogue,* savoir en remplaçant l'hypothèse que les fonctions $f_n(z)$ soient bornées dans leur ensemble par l'autre qu'il en soit ainsi pour les valeurs moyennes $\mu_\delta(f_n; r)$ qui correspondent à un certain exposant δ, c'est-à-dire que les quantités $\mu^*_\delta(f_n)$ forment une suite bornée.

Dans le cas où $\delta \geqq 1$, ces généralisations suivent par l'ordre d'idées que nous venons d'exposer, en y faisant seulement très peu de modifications d'ailleurs évidentes. Je n'y insiste pas et je passe à un ordre d'idées différent, *embrassant aussi les cas où $\delta < 1$* et qui met en évidence la source commune de tous ces théorèmes.

4. C'est M. *Szegő* qui a précisé le théorème I d'une façon surprenante, en démontrant que *le logarithme du module des valeurs limites est toujours une fonction sommable,* sauf naturellement dans le cas évident où $f(z) \equiv 0$.[7]) Comme ce logarithme devient infini négatif en tout point où $f(z)$ s'annule, le théorème I n'est qu'un corollaire évident de la découverte de M. *Szegő.* Or ce fait tient non seulement pour les fonctions bornées, mais aussi pour les fonctions à valeurs moyennes bornées dont nous venons de

---

[5]) G. H. *Hardy,* The Mean Value of the Modulus of an Analytic Function, Proceedings of the London Math. Soc., Ser. 2., *14* (1915), p. 269—277.

[6]) Il s'agit d'une communication verbale et c'est seulement en corrigeant les épreuves que j'ai reçu la note précédente que M. *Ostrowski* voulait bien mettre à ma disposition.

[7]) G. *Szegő* et F. *Riesz,* Analytikus függvény kerületi értékeiről, Math. és term. értesítő *38* (1920), p. 113—127; G. *Szegő,* Über die Randwerte einer analytischen Funktion, Math. Annalen *84* (1921), p. 232—244.

parler, comme l'a démontré M. *Szegö* lui-même pour $\delta \geqq 2$ et comme je l'ai démontré dans les autres cas en me servant d'une formule bien connue de M. *Jensen*. Presque en même temps M. *Fatou* est parvenu indépendemment à l'idée de partir de cette formule pour en déduire une démonstration très rapide et élémentaire du théorème I et de sa généralisation pour le cas d'un exposant quelconque $\delta > 0$.[8])

Au lieu de déduire l'inégalité dont nous aurons besoin de la formule de *Jensen* nous allons l'établir directement ce qui ne coutera pas plus de peine.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe pour $|z| \leqq r$ et supposons pour un instant que $f(z) \mp 0$. Alors $\log |f(z)|$ est une fonction harmonique de x, y $(x+iy=z,\ x^2+y^2 \leqq r^2)$ et par la formule de *Poisson*, on aura pour $z_0 = r_0 e^{i\vartheta_0}$ $(r_0 < r)$:

$$2\pi \log |f(z_0)| = \int_0^{2\pi} P \log |f(re^{i\vartheta})| \, d\vartheta$$

où l'on a posé

$$P = \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0)}.$$

Décomposons l'intervalle $(0, 2\pi)$ en deux ensembles de sorte que ϑ appartienne à l'un ou l'autre suivant que $\log |f(re^{i\vartheta})|$ est positif ou ne l'est pas, c'est-à-dire suivant que $|f| > 1$ ou $|f| \leqq 1$; il vient

$$2\pi \log |f(z_0)| = \int_{|f|>1} P \log |f(re^{i\vartheta})| \, d\vartheta + \int_{|f| \leqq 1} P \log |f(re^{i\vartheta})| \, d\vartheta;$$

comme d'aut·e part on a

$$\int_{|f| \leqq 1} = \int_{|f|>1} - \int_0^{2\pi} P \left| \log |f(re^{i\vartheta})| \right| d\vartheta,$$

on obtient

$$2\pi \log |f(z_0)| = 2 \int_{|f|>1} P \log |f(re^{i\vartheta})| \, d\vartheta - \int_0^{2\pi} P \left| \log |f(re^{i\vartheta})| \right| d\vartheta$$

---

[8]) P. *Fatou*, Sur l'évanouissement d'une branche de fonction uniforme aux points d'une ligne singulière, Bulletin des sciences math., mars 1921

et enfin, en remplaçant P dans ces deux intégrales respectivement par ses valeurs maximée et minimée, il vient

(1) $$2\pi \log |f(z_0)| \leq$$

$$2\frac{r+r_0}{r-r_0}\int\limits_{|f|>1} \log|f(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta - \frac{r-r_0}{r+r_0}\int\limits_0^{2\pi} \big|\log|f(re^{i\vartheta})|\big|\,d\vartheta.$$

Or cette inégalité tient aussi lorsqu'on renonce à l'hypothèse que $f(z) \neq 0$ ce que l'on montre par un raisonnement bien connu, savoir en décomposant $f(z)$ en deux facteurs

$$f(z) = g(z)\,h(z),$$

où $h(z)$ désigne une fonction rationnelle admettant pour $|z| < r$ les mêmes racines que $f(z)$ et égale en module à l'unité pour $|z| = r$ et par conséquent, $g(z) \neq 0$ pour $|z| < r$ et $|g(z)| = |f(z)|$ pour $|z| = r$. En appliquant l'inégalité (1) à la fonction $g(z)$ et en observant que $|h(z_0)| < 1$ et que, par conséquent, $|f(z_0)| < |g(z_0)|$, l'inégalité (1) tiendra a fortiori pour la fonction $f(z)$.

C'est cette inégalité qui est la source commune de tous les résultats indiqués.

5. En effet, supposons que $f(z)$ soit holomorphe pour $|z| < 1$ et faisons l'hypothèse que la première des intégrales qui figurent au second membre de (1), reste $\leq A$ pour tous les $r < 1$. Cela posé, soit E un ensemble mesurable situé sur la circonférence du cercle-unité ou ce qui revient au même, un ensemble de valeurs ϑ entre 0 et 2π, telles que les valeurs limites radiales, pour $r \to 1$, de $f(re^{i\vartheta})$ ou au moins celles de $|f(re^{i\vartheta})|$ existent. Convenons, pour plus de simplicité, de désigner ces dernières par $|f(e^{i\vartheta})|$. Notre inégalité donne a fortiori

$$\int\limits_E \big|\log|f(re^{i\vartheta})|\big|\,d\vartheta \leq 2A\left(\frac{r+r_0}{r-r_0}\right)^2 - 2\pi\frac{r+r_0}{r-r_0}\log|f(z_0)|;$$

en choisissant z_0 de sorte que $f(z_0) \neq 0$, il s'ensuit, grâce à un théorème bien connu de M. *Fatou*, que la fonction $\log|f(e^{i\vartheta})|$ est sommable sur l'ensemble E et que l'on a

$$(2)\quad \int\limits_E \left|\log|f(e^{i\vartheta})|\right| d\vartheta \leqq 2A\left(\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}\right)^2 - 2\pi\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}\log|f(z_0)$$

Pour appliquer cette inégalité aux cas particuliers dont il s'agit, il suffit de remarquer que l'on a $\log x < x$ ou plus généralement $\log x = \frac{1}{\delta}\log x^{\delta} \leqq \frac{1}{\delta} x^{\delta}$ $(\delta > 0)$ et que, par conséquent, pour $f(z)$ bornée, savoir $|f(z)| \leqq M$, on peut prendre $A = 2\pi M$; plus généralement, on pourra poser $A = \frac{2\pi}{\delta}\mu^*_{\delta}$ où μ^*_{δ} est la borne supérieure, pour $r < 1$ (et en même temps la limite, pour $r \to 1$) des valeurs moyennes $\mu_{\delta}(f; r)$. C'est-à-dire que si la fonction $f(z)$ reste bornée ou plus généralement si, pour un certain $\delta > 0$, la valeur moyenne $\mu_{\delta}(f; r)$ reste bornée, le logarithme de $|f(e^{i\vartheta})|$ est une fonction sommable de ϑ sur chaque ensemble mesurable pour lequel ces valeurs limites existent. D'ailleurs, pour certains cas particuliers, par exemple pour le cas où $f(z)$ est bornée ou aussi dans tous les cas où $\delta \geqq 1$, l'existence de ces valeurs limites presque partout, c'est-à-dire sauf peut-être pour un ensemble de mesure nulle, est un fait connu et l'on peut aussi le démontrer dans les autres cas considérés; mais nous n'en avons pas besoin si nous nous contentons d'énoncer le théorème de M. *Szegő* sous la forme suivante: *pour les fonctions considérées, log* $|f(e^{i\vartheta})|$ *est sommable sur tout l'ensemble où les valeurs limites* $|f(e^{i\vartheta})|$ *existent.* En particulier, il s'ensuit que *ces valeurs limites ne peuvent s'annuler que sur un ensemble de mesure nulle.*

6. Pour démontrer le théorème de M. *Ostrowski* ou ce qui revient au même, le théorème III, même sous l'hypothèse plus générale dont nous avons parlé, il suffit d'observer que si les $|f_n(e^{i\vartheta})|$, supposées existantes, tendent vers zéro sur un ensemble E de mesure positive, l'intégrale de $\log|f(e^{i\vartheta})|$ croîtra indéfiniment et que, par conséquent, la valeur du second membre de l'inégalité (2) ira aussi à l'infini. Donc si l'on suppose que la quantité A reste la même pour tous les n ou qu'elle reste inférieure à une certaine borne finie, il s'ensuit que $\log|f_n(z_0)| \to -\infty$, c'est-à-dire que $f_n(z) \to 0$ et cela uniformément pour $|z| \leqq r < 1$.

Or en tenant compte des expressions que nous venons de donner pour A, on voit que ce sera toujours le cas lorsque les fonctions $f_n(z)$ ou plus généralement lorsque, pour un certain $\delta < 0$, les valeurs moyennes $\mu_\delta(f_n; r)$ restent bornées dans leur ensemble. Ainsi le théorème III se trouve démontré non seulement pour les suites bornées, mais aussi pour celles pour lesquelles les quantités $\mu^*_\delta(f_n)$ restent bornées.

Szeged, novembre 1922.