Über Zwischenwerte bei komplexen Polynomen.

Von M. FEKETE in Budapest.

1. Eine fundamentale — sozusagen Namen ergebende — Eigenschaft der für $a \leqq x \leqq b$ *stetigen* reellen Funktion $f(x)$ der reellen Veränderlichen x besteht im Folgenden: Ist $f(a) \neq f(b)$ und liegt χ zwischen $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$, so nimmt $f(x)$ den Wert γ mindestens in einem Punkte c zwischen a und b an.

Lässt man die Voraussetzung der *Realität* der Veränderlichen und ihrer Funktion fallen (und deutet dabei die Ausdrucksweise: „z liegt zwischen u und v" für komplexe Werte von u, v, z naturgemäss dahin, dass z ein Punkt der Strecke von u nach v ist), so verliert im Allgemeinen die Funktion — wenn auch stetig — die obige Eigenschaft. Das zeigt schon das Beispiel der Funktion e^x, für welche $e^{i\pi} = -1$, $e^0 = 1$ und doch nirgends $e^x = 0$ ist.

Wie in manchen anderen Fällen,[1] sind es wiederum die Polynome, welche die Eigenschaften der allgemeinen reellen stetigen Funktion einer reellen Veränderlichen — mutatis mutandis — im Komplexen erben. Es gilt nämlich der

Satz I. *Ein Polynom*

$$P(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n, \quad n \geqq 2 \tag{1}$$

nehme für $x = a$ und $x = b$ die nicht gleichen Werte α und β an.

---

[1]) Vgl. die Sätze von *Gauss, Jensen, Grace-Heawood* über die Wurzeln der Derivierten eines Polynoms (*Jensen,* Recherches sur la théorie des équations, [Acta Math. 36 (1912), S. 181—195], S. 190; *Grace,* The zeros of a polynomial [Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 11 (1900—1902), S. 352—357]; *Heawood,* Geometrical relations between the roots of $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$, [Quart. Journ. of Math. 38 (1907), S. 84—107]). S. auch [2]). Vgl. auch *Fekete,* Beweis eines Satzes von Jentzsch [Jahresber. der Deutschen Math. Verein. 31 (1922), S. 42—48]; *Fekete,* 5. Aufgabe [Ebenda. S. 65—66].

Dann nimmt es jeden zwischen α und β liegenden Wert γ innerhalb oder am Rande des Kreises an, der um den Punkt $x = \frac{a+b}{2}$ *mit dem Radius* $\frac{|a-b|}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$ *geschlagen wird.*

2. Der Zweck der vorliegenden Note ist der Beweis dieses Satzes. Wir gewinnen ihn durch die Anwendung eines von *Grace* entdeckten, von *Egerváry* wiedergefundenen, durch ihn und *Szegő* neubewiesenen, wichtigen Tatsache.[2]) Diese kann in einer *Szegő*-schen Formulierung folgendermassen ausgesprochen werden:

Satz II. *Es seien* $l_0, l_1, \ldots, l_n$ *gegebene Konstanten, die nicht sämtlich verschwinden und*

$$Q(x) = q_0 + q_1 x + \ldots + q_n x^n = 0, \quad q_n \neq 0$$

sei eine algebraische Gleichung, deren Koeffizienten der Bedingung

$$l_n q_0 + l_{n-1} q_1 + \ldots + l_0 q_n = 0$$

genügen. Dann liegt wenigstens eine der Wurzeln von $Q(x) = 0$ *in jedem Kreisbereiche, der sämtliche Wurzeln der Gleichung*

$$l_0 - \binom{n}{1} l_1 z + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} l_n z^n = 0$$

enthält.

Hierbei ist unter einem Kreisbereiche entweder der abgeschlossene Innenbereich, oder der abgeschlossene Aussenbereich eines Kreises oder aber eine abgeschlossene Halbebene verstanden.

3. Mit Hilfe dieses Satzes kann der gewünschte Beweis etwa so geführt werden:

Ist $P(a) = \alpha$, $P(b) = \beta$, so lässt jedes zwischen α und β liegendes γ die folgende Darstellung zu:

(2) $$\gamma = \lambda P(a) + \mu P(b),$$

wobei

(3) $$0 < \lambda < 1, \quad 0 < \mu < 1, \quad \lambda + \mu = 1$$

ist. Nach (1) und (3) ist (2) gleichbedeutend mit

$$(\lambda + \mu)(p_0 - \gamma) + (\lambda a + \mu b) p_1 + \ldots + (\lambda a^n + \mu b^n) p_n = 0,$$

[2]) *Grace* a. a. O. [1]); *Szegő*, Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen [Math. Zeitschrift, 13 (1922), S. 28—55]; *Egerváry*, On a maximum-minimum problem and its connexion with the roots of equations [Diese Zeitschrift 1 (1922), S. 39—45]; *Egerváry*, Egy a symmetrikus, multilineáris formára vonatkozó minimum-feladat. [Math. és phys. lapok, 29 (1922), S. 21—43].

also besitzt, nach Satz II, das Polynom $Q(x) = P(x) - \gamma$ wenigstens eine Nullstelle in jedem Kreisbereich, der sämtliche Wurzeln z_ν der Gleichung

$$\lambda a^n + \mu b^n - \binom{n}{1}(\lambda a^{n-1} + \mu b^{n-1}) z + \ldots + (-1)^n (\lambda + \mu) z^n = 0,$$

d. h. der Gleichung

$$\lambda (z-a)^n + \mu (z-b)^n = 0$$

enthält. Nun liegen diese Wurzeln, der Relation

$$\left(\frac{z_\nu - a}{z_\nu - b}\right)^n = -\frac{\mu}{\lambda}$$

zufolge, sämtlich in einem Kreiszweieck, gebildet durch die beiden Kreisbögen, aus deren Punkten die gemeinsame Sehne $\overline{ab}$ unter einem Winkel $= \frac{\pi}{n}$ zu sehen ist,[3]) also sind diese Wurzeln gewiss in dem um den Mittelpunkt der Sehne mit dem Radius $\frac{|a-b|}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$ geschlagenen Kreise enthalten. Damit ist Satz I bewiesen.

Zusatz. *Der eben genannte Kreis kann durch keinen kleineren ersetzt werden.*

In der Tat, ist $a \neq b$, sonst beliebig, ferner $n \geqq 2$ und setzt man

$$P(x) = (x-c)^n, \ c = \frac{a+b}{2} \pm i \frac{a-b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n},$$

so besteht offenbar

$$P(a) + P(b) = (a-c)^n + (b-c)^n = 0,$$

also ist c die (einzige) Wurzel der Gleichung

$$P(x) = \frac{P(a) + P(b)}{2}. \quad \text{W. z. b. w.}$$

Budapest, den 20. Dez. 1922.

---

[3]) Vgl. *Fekete*, 6. Aufgabe [Jahresb. d. Deutschen Math. Verein., 31 (1922), S. 66]; *J. Nagy v. Sz.*, A polaris egyenletek gyökeinek helyzetéről [Math. és term.-tud. ért. 39 (1922), S. 442–455].