Bemerkung zu einem Unitätssatze der konformen Abbildung.

Von Tibor Radó in Szeged.

Bekanntlich besteht der folgende Unitätssatz:

Eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung des Innern des Einheitskreises auf sich selbst, bei welcher der Nullpunkt und die reelle positive Richtung fest bleiben, ist die Identität.

Gilt ein solcher Unitätssatz ganz allgemein für jede, beliebig zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit? Betrachtet man die Abbildung

$$z' = 2z$$

so erkennt man, dass für die Vollebene und für die punktierte Ebene der Unitätssatz jedenfalls ungültig ist. Der folgende Satz besagt nun, dass diese beiden Gebiete die einzigen Ausnahmefälle bilden.

Sieht man von der Vollebene und von der punktierten Ebene ab, so kann man behaupten, dass eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit auf sich selbst, bei welcher ein Richtungselement fest bleibt, die Identität ist.

Wenn man die Fundamentalabbildung der vorgelegten Mannigfaltigkeit heranzieht, leuchtet der Satz unmittelbar ein. Wir wollen bei dem allgemeinen Falle deshalb nicht länger verweilen, vielmehr für den speziellen Fall eines gewöhnlichen schlichten Gebietes einen Beweis mitteilen, der wegen seiner Einfachheit einiges Interesse beanspruchen dürfte. Der Beweis gründet sich auf die Betrachtung der Iterierten der Abbildungsfunktion. Herr *F. Riesz* hat mich aufmerksam gemacht, dass eine analoge Schlussweise bei Herrn *Bieberbach* vorkommt[1]), und Herrn *Koebe* verdanke ich die Bemerkung, dass der ursprünglich von mir verwendete Picardsche Satz beim Beweise gar nicht nötig ist. Auf diese Weise ist der folgende elementare Beweis zustande gekommen.

Sei B das fragliche Gebiet, welches den Nullpunkt enthalten möge, den unendlichfernen Punkt nicht, und welches wenigstens einen endlichen Randpunkt hat. Sei ferner $f(z)$ die in B reguläre Funktion, welche B ein-eindeutig und konform auf sich selbst abbildet, und für welche

$$f(0) = 0, f'(0) > 0$$

ist. Es soll bewiesen werden, dass $f(z) \equiv z$.

Um $z = 0$ schlagen wir einen Kreis K mit dem Radius ϱ, der ganz innerhalb B verläuft. In diesem Kreise besitzt $f(z)$ eine Entwicklung

$$f(z) = cz + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots \quad c > 0.$$

wobei a_n den ersten nicht verschwindenden Koeffizienten bedeutet; wir werden eben zeigen, dass $a_n = 0$, $c = 1$ sein muss.

Zunächst zeigen wir, dass $c = 1$ ist. Indem wir nötigenfalls zur inversen Abbildung übergehen, können wir $c \geqq 1$ voraussetzen. Setzen wir

$$f_2(z) = f[f(z)], \dots f_n(z) = f[f_{n-1}(z)], \dots$$

so sind $f_2(z), \dots f_n(z), \dots$ ebenfalls in B reguläre Funktionen, welche B ein-eindeutig konform auf sich selbst abbilden und dabei den Nullpunkt und die positive reelle Richtung fest lassen. Für $f_n(z)$ gilt dabei im Kreise K eine Entwicklung:

$$f_n(z) = c^n z + \dots$$

Sei K_n das Gebiet, auf welches $f_n(z)$ das Innere von K abbildet, und d_n die Entfernung des Nullpunktes vom Rande von K_n. K_n enthält also einen Kreis um den Nullpunkt mit dem Ra-

[1]) L. *Bieberbach*, Über einen Satz des Herrn Carathéodory, Göttinger Nachrichten, 1913, S. 552–560. Für den Fall eines beschränkten Gebietes ist unser Satz in dem daselbst S. 556–557. bewiesenen Eindeutigkeitssatze enthalten.

dius d_n im Innern; und da K_n selbst in B enthalten ist, liegt der erwähnte Kreis auch in B. Nach dem Verzerrungssatze ist nun:

$$\varrho \leqq C \frac{d_n}{c^n}$$

wo ϱ der Radius von K und C eine absolute Konstante, bekanntlich gleich vier, ist. Man hat also:

$$d_n \geqq \frac{\varrho}{C} c^n$$

Setzt man $c > 1$ voraus, so folgt $d_n \longrightarrow +\infty$. Von B ist aber angenommen worden, dass es wenigstens einen endlichen Randpunkt hat; d_n kann deswegen höchstens gleich der Entfernung dieses Randpunktes vom Nullpunkte sein. Es muss also $c = 1$ sein. Die Entwicklung von $f(z)$ lautet hiernach:

$$f(z) = z + a_n z^n + \dots$$

Für die Iterierten erhalten wir:

$$\begin{aligned} f_2(z) &= z + 2\, a_n z^n + \dots \\ f_4(z) &= z + 4\, a_n z^n + \dots \\ f_8(z) &= z + 8\, a_n z^n + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Alle diese Funktionen sind im Kreise K regulär und schlicht und im Mittelpunkte normiert. Nach dem Verzerrungssatze muss hiernach der Koeffizient von z^n für alle diese Funktionen unterhalb einer festen Schranke bleiben: $2^m \mid a_n \mid < A$, für alle Werte von m. Deswegen kann a_n nur gleich Null sein. In der Entwicklung von $f(z)$ kommt also eben nur das Glied z vor, d. h. $f(z) \equiv z$ w. z. b. w.

Jena, den 8. November 1922.