Sur la sommation des séries de Fourier.

Par M. MARCEL RIESZ à Stockholm.

1. Soit $f(x)$ une fonction périodique de période 2π intégrable au sens de M. *Lebesgue*. Concernant la série de *Fourier* d'une telle fonction, on connaît le théorème important de M. *Fejér*[1]) que voici:

La série de Fourier de $f(x)$ est sommable par le procédé des moyennes arithmétiques en tout point de continuité de $f(x)$ avec la somme $f(x)$, ou, plus généralement, avec la somme $S(x)$, en tout point x où la limite $S(x) = \lim\limits_{t \to 0} {}^1/_2 (f(x+t) + f(x-t))$ existe.

On connaît aussi la généralisation importante qu'a donnée de ce théorème M. *Lebesgue*[2]):

En posant $\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$ et $\Phi(t) = \int\limits_0^t |\varphi(v)|\, dv$, la série de Fourier de $f(x)$ est sommable par le procédé des moyennes arithmétiques avec la somme $f(x)$ en tout point où l'on a $\Phi'(0) = 0$, c'est-à-dire presque partout.

2. On sait que le procédé des moyennes arithmétiques simples (ce sont les moyennes dont il a été question plus haut) fut généralisé de plusieurs manières. Nous nous restreindrons ici à la généralisation donnée pour des indices entiers par *Cesàro* et étendue à des indices non entiers par MM. *Hadamard* et *Knopp*[3]).

---

1) *L. Fejér*, Untersuchungen über *Fourier*sche Reihen, Math. Ann. 58. (1904) p. 51—69.

2) *H. Lebesgue*. Recherches sur la convergence des séries de *Fourier*, Math. Ann. 61. (1905) p. 251—280; Sur les intégrales singulières, Ann. de Toulouse (3) 1 (1909) p. 25—117, particulièrement p. 88—90.

3) Pour tout ce qui concerne ce sujet, *voir L. Bieberbach*, Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen, Encykl. d. math Wissensch, II. C 4, p. 379—532, partic. p. 477 et suiv.

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ étant une série convergente ou divergente quelconque et k un nombre réel quelconque, posons

$$(1) \qquad (1-x)^{-(k+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)} x^n$$

et écrivons l'égalité formelle

$$(2) \qquad (1-x)^{-(k+1)} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n.$$

D'ici on tire

$$(3) \qquad S_n^{(k)} = \sum_{r=0}^{n} C_{n-r}^{(k)} u_r.$$

Les valeurs

$$(4) \qquad S_n^{(k)} / C_n^{(k)}$$

sont les moyennes de *Cesàro* d'ordre k de la série Σu_n. Si la limite

$$(5) \qquad \lim_{n \to \infty} S_n^{(k)} / C_n^{(k)} = \sigma$$

existe, la série Σu_n est dite sommable par les moyennes d'ordre k avec la somme σ.

On se restreint en général à des valeurs de $k > -1$. Ici, nous ne considérons que les valeurs $k > 0$.

On voit que les moyennes arithmétiques simples, utilisées par M. *Fejér* correspondent à $k = 1$. On sait aussi qu'une série étant sommable par des moyennes d'un certain ordre, il en est de même pour tout ordre supérieur et que les sommes coïncident. Le théorème qui suit, ne donne donc rien de nouveau que pour $0 < k < 1$.

3. En 1909, dans une Note des *Comptes rendus*,[4]) j'ai énoncé sans démonstration une généralisation du théorème de M. *Fejér* qui revient à ceci:

La série de Fourier est sommable par les moyennes d'ordre k avec la somme $S(x)$ en tout point x où la limite

$$S(x) = \lim_{t \to 0} {}^1/_2 (f(x+t) + f(x-t))$$

existe, et cela pour toute valeur positive de k.

---

[4]) *M. Riesz*, Sur les séries de *Dirichlet* et les séries entières, Comptes rendus, 149 (1909) p. 309—312.

Plus tard mais indépendamment de moi, M. *Chapman*[5]) a retrouvé ce théorème et il en publiait aussi une démonstration.

Plus tard encore M. *Hardy* a généralisé le théorème de M. *Lebesgue* dans la même direction que j'ai généralisé le théorème de M *Fejér*, c'est-à-dire qu'il montrait que *dans les conditions posées par M. Lebesgue la série de Fourier est sommable par des moyennes d'ordre k pour toute valeur positive de k.*[6])

4. Au cours des années, on a de plus en plus reconnu l'importance des théorèmes que nous venons de rappeler, importance dont — pourquoi ne pas le dire — je ne me doutais guère lorsque j'ai énoncé le premier de ces théorèmes. Ainsi on a établi des théorèmes plus ou moins analogues portant sur les séries de *Dirichlet*,[7]) séries de *Laplace*[8]) etc. Mais, c'est un autre point sur lequel je veux insister.

Ces théorèmes sur la sommation à indices non entiers conduisent bien souvent a des théorèmes sur la convergence ordinaire ou sur la sommation à indices entiers. Tel est le cas p. ex. pour les séries de Dirichlet où j'ai démontré[9]) que, *la série* Σa_n *étant sommable par les moyennes d'ordre k, la série* $\Sigma a_n n^{-s}$ *sera convergente dès que la partie réelle de s est plus grande que k.* Ce théorème est bien utilisable dans la théorie des séries de *Dirichlet.* Mais il y a plus. M. *Hardy* a remarqué que la combinaison de ce théorème avec la généralisation mentionnée qu'il a donné du théorème de M. *Lebesgue*, conduisait immédiatement au théorème très intéressant, dû à M. *Young*, que voici:

$\Sigma a_n \cos nx + b_n \sin nx$ *étant la série de Fourier d'une fonction*

---

[5]) *S. Chapman*, On non-integral orders of summability of series and integrals, Lond. Math. Soc. Proc. (2) 9 (1910—11) p. 369—409.

[6]) *G. H. Hardy*, On the summability of *Fourier*'s series, Lond. Math. Soc. (2) 12 (1913) p. 365—372.

[7]) *Voir G. H. Hardy* and *M. Riesz*, The general theory of *Dirichlet*'s series, Cambridge Tracts of Math. No. 18 (1915).

[8]) *E. Hilb*, Über die *Laplace*sche Reihe, Math. Zschrft, t. 5 (1919) p. 17—25 et t. 8 (1920) p. 79—90. M. *Hilb* travaille, comme M. *Hardy*, avec les moyennes dont j'ai démontré l'équivalence aux moyennes de *Cesàro*. (Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques, Comptes rendus 152 (1911) p. 1651—1654). Pour la série de *Laplace*, *voir* encore *F. Lukács*, Über die *Laplace*sche Reihe, Math. Zschrft, t. 14 (1922) p. 250—262.

[9]) *G. H. Hardy* and *M. Riesz* l. c. p. 57—59.

intégrable au sens de Lebesgue, la série $\Sigma \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^\epsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ *convergera presque partout.*[10])

5. Voici maintenant un résultat de MM. *Hardy* et *Littlewood* qui, avec sa démonstration, met le mieux en évidence le rôle de la sommation d'ordre non entier :

La fonction $f(x)$ étant bornée au voisinage d'un certain point x, sa série de Fourier est sommable au point x par les moyennes d'ordre k ou pour toute valeur positive de k ou bien pour aucune valeur de k.[11])

Voici l'idée de la démonstration. On a d'abord le théorème suivant, qui se démontre de la même manière et même un peu plus simplement que notre généralisation du théorème de M. *Fejér* :

Si la fonction $f(x)$ est bornée dans un certain intervalle, les moyennes d'ordre k $(k > 0)$ de sa série de Fourier sont uniformément bornées dans tout intervalle intérieur à cet intervalle.

Il en résulte, en particulier, que ces moyennes sont bornées au point x dont il est question dans le théorème de MM. *Hardy* et *Littlewood*, et cela pour une valeur positive quelconque d'ailleurs arbitrairement petite de k.

D'autre part, on a le théorème suivant que j'ai démontré il y a une dizaine d'années, mais dont la démonstration, que j'ai communiquée à MM. *Hardy* et *Littlewood*, n'a pas encore paru :[12])

Admettons qu'une série est sommable par les moyennes d'un certain ordre et que ses moyennes d'ordre k sont bornées. Alors la série est sommable par des moyennes d'ordre quelconque $> k$.[13])

---

[10]) *G. H. Hardy*, dans le travail cité dans la note[3]) de la p. 2. Toutefois, pour améliorer le résultat de M. *Young* en remplaçant n^ϵ par $\log n$, M. *Hardy* devait recourir à un examen plus direct des sommes partielles de la série de Fourier.

[11]) MM. *Hardy* et *Littlewood* donnent l'énoncé de ce théorème dans leur travail, *Abel*'s theorem and its converse, Lond. Math. Soc. Proc. (2) t. 18 (1918) p. 205—235, *voir* p. 235. La démonstration se trouve dans la Note, On the *Fourier* series of a bounded function, ibid, t. 17 (1917) p. XIII—XV. (Records of Proceedings at Meetings). Nous ne reproduisons ici qu'une partie du résultat en question. Je viens d'apprendre que, tout récemment, MM. *Hardy* et *Littlewood* ont poussé plus loin leurs recherches concernant ce sujet.

[12]) La démonstration d'un théorème général embrassant ce théorème paraîtra bien prochainement.

[13]) Pour des ordres entiers de sommation, ce théorème fut donné par MM. *Hardy* et *Littlewood* eux-mêmes.

En choisissant maintenant k arbitrairement petit, le théorème de MM. *Hardy* et *Littlewood* résulte par la combinaison des deux derniers théorèmes.

Ce qu'il y a de plus intéressant dans la démonstration précédente, c'est, à mon avis, qu'il fait ressortir le point suivant: même, si l'on ne s'intéresse qu'aux résultats concernant la sommation à indices entiers,[14]) on ne peut se passer de théorèmes sur la sommation à indices non entiers.

6. Dans ces derniers temps, en écrivant avec M. *Hilb* un rapport sur la théorie des séries trigonométriques pour l'édition allemande de l'Encyclopédie, j'ai eu l'occasion de lire ou de relire les différentes démonstrations qu'on a données de la généralisation du théorème de M. *Fejér* que j'ai cité au début. J'ai constaté que toutes ces démonstrations sont moins simples[15]) que celle que je possède et que je me permets d'exposer ici.

Nous donnons d'abord quelques formules concernant les nombres $C_n^{(k)}$. De (1) on tire

$$C_n^{(k)} = \frac{(k+1)(k+2)\dots(k+n)}{n!} = \frac{\Gamma(k+n+1)}{\Gamma(k+1)\,n!} \tag{6}$$

d'où il vient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_n^{(k)}}{n^k} = \frac{1}{\Gamma(k+1)}. \tag{7}$$

En multipliant la relation (1) par $(1-x)$, on obtient

$$C_n^{(k)} - C_{n-1}^{(k)} = C_n^{(k-1)}. \tag{8}$$

D'autre part, en écrivant $(1-x)^{-(k+1)} = (1-x)^{-k}(1-x)^{-1}$, il vient par (2)

$$S_n^{(k)} = \sum_{r=0}^{n} C_{n-r}^{(k-1)}\, S_r^{(0)} = \sum_{r=0}^{n} C_{n-r}^{(k-1)}\,(u_0+u_1+\dots+u_r). \tag{9}$$

---

[14]) Bien entendu, ce n'est pas le cas de MM. *Hardy* et *Littlewood.* Disons encore que MM. *Hardy* et *Littlewood,* en combinant leur résultat avec un résultat de M. *Lebesgue* sur la sommabilité de la série de Fourier par les moyennes d'ordre 2, trouvent un nouveau théorème remarquable, concernant les moyennes les plus intéressantes, les moyennes simples.

[15]) Outre les démonstrations citées *voir T. H. Gronwall,* On the summability of *Fourier*'s series. Am. Math. Soc. Bull. t. 20 (1913—1914) p. 139—146. Une généralisation intéressante du théorème en question fut encore donnée par M. *F. Nevanlinna,* Über die Summation der *Fourier*schen Reihen und Integrale, Övers. av Finska Vetensk. Soc. Förhandl. t. LXIV. 1920—1921. Avd. A. No. 3, p. 1—14.

Cela posé et la série de *Fourier* de $f(x)$ étant

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n x+b_n \sin n x),$$

on a pour les moyennes d'ordre k de cette série

$$S_n^{(k)}(x)=\frac{C_n^{(k)} a_0}{2}+\sum_{r=1}^{n} C_{n-r}^{(k)}(a_r \cos r x+b_r \sin r x)=$$

$$(10)\qquad =\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\alpha)\left\{\frac{C_n^{(k)}}{2}+\sum_{r=1}^{n} C_{n-r}^{(k)} \cos r(\alpha-x)\right\} d\alpha=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))\left\{\frac{C_n^{(k)}}{2}+\sum_{r=1}^{n} C_{n-r}^{(k)} \cos r t\right\} d t=$$

$$=\frac{C_n^{(k)}}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t)) H_n(t)\, dt$$

où l'on a posé

$$(11)\qquad C_n^{(k)} H_n(t)=\frac{C_n^{(k)}}{2}+\sum_{r=1}^{n} C_{n-r}^{(k)} \cos r t.$$

La différence essentielle entre le cas traité par M. *Fejér* et celui qui nous occupe c'est que, là, le noyau était positif, tandis qu'ici, le nombre des changements de signe de $H_n(t)$ croît indéfiniment avec n.

On a évidemment

$$(12)\qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} H_n(t)\, dt=1.$$

Désignons alors par S un nombre qu'on va préciser plus loin, mais qui jusqu'à nouvel ordre reste arbitraire. En posant alors

$$(13)\qquad \varphi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2 S,$$

les relations (10) et (12) donneront

$$(14)\qquad \frac{S_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}}-S=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(t) H_n(t)\, dt.$$

Cela posé, toute la démonstration du théorème en question se basera sur les deux inégalités suivantes.

On a pour $0 \leq t \leq \pi, 0 < k < 1$[16])

(15) $$| H_n(t) | < An$$
et

(16) $$| H_n(t) | < Bt^{-(k+1)} n^{-k},$$

A et B étant deux nombres ne dépendant que de k.

L'inégalité (15) résulte immédiatement de la relation (11) et du fait que les nombres $C_n^{(k)}$ forment une suite croissante. On trouve en effet

$$| H_n(t) | < {}^1\!/_2 + n < An.$$

Pour établir (16), désignons par $K_n(t)$ le second membre de (11) et écrivons d'après (9)

$$K_n(t) = \sum_{r=0}^{n} C_{n-r}^{(k-1)} \left({}^1\!/_2 + \cos t + \ldots + \cos r t \right) = \sum_{r=0}^{n} C_{n-r}^{(k-1)} \frac{\sin (r + {}^1\!/_2) t}{\sin {}^t\!/_2} =$$

$$= \frac{1}{\sin {}^t\!/_2} \mathfrak{J} \left\{ \sum_{r=0}^{n} C_{n-r}^{(k-1)} e^{(r+{}^1\!/_2) i t} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sin {}^t\!/_2} \mathfrak{J} \left\{ e^{(n+{}^1\!/_2) i t} \sum_{r=0}^{n} C_r^{(k-1)} e^{-r i t} \right\} \text{ [17])}$$

Par conséquent

$$\left| K_n(t) \right| \sin \frac{t}{2} \leq \left| \sum_{r=0}^{n} C_r^{(k-1)} e^{r i t} \right| = \left| (1 - e^{i t})^{-k} - \sum_{r=n+1}^{\infty} C_r^{(k-1)} e^{r i t} \right|$$

$$\leq \left| 1 - e^{i t} \right|^{-k} + \left| \sum_{r=n+1}^{\infty} C_r^{(k-1)} e^{r i t} \right|$$

Les nombres positifs $C_r^{(k-1)}$ formant une suite décroissante et tendant vers zéro, on peut écrire

$$\left| \sum_{r=n+1}^{\infty} C_r^{(k-1)} e^{r i t} \right| = \left| \sum_{r=n+1}^{\infty} (C_r^{(k-1)} - C_{r+1}^{(k-1)}) (e^{(n+1) i t} + \ldots + e^{r i t}) \right| =$$

$$= \left| \sum_{r=n+1}^{\infty} (C_r^{(k-1)} - C_{r+1}^{(k-1)}) \frac{e^{(r+1) i t} - e^{(n+1) i t}}{e^{i t} - 1} \right| <$$

$$< \frac{2}{|e^{i t} - 1|} \sum_{r=n+1}^{\infty} (C_r^{(k-1)} - C_{r+1}^{(k-1)}) = \frac{2 C_{n+1}^{(k-1)}}{|e^{i t} - 1|} < \frac{B_1 n^{k-1}}{|e^{i t} - 1|} \text{ [18])}$$

---

[16]) Ces inégalités subsistent encore pour d'autres valeurs de k. Pour $k = 0$ et pour $k = 1$, on les tire de formules explicites bien connues.

[17]) Nous posons comme d'ordinaire $\mathfrak{J}(a + i b) = b$.

[18]) Nous désignons par $B_1, B_2, \ldots$ des nombres finis ne dépendant que de k.

Par suite

$$\left|K_n(t)\right| < \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\left(\left|1-e^{it}\right|^{-k}+B_1 n^{k-1}\left|1-e^{it}\right|^{-1}\right),$$

et puisque

$$\left|1-e^{it}\right| = 2\sin\frac{t}{2},$$

il vient

$$\left|K_n(t)\right| < 2^{-k}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{-(k+1)}+\frac{B_1}{2}n^{k-1}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{-2}$$

On a maintenant pour $\frac{1}{n} < t$, $n^{k-1} < t^{1-k}$. Par conséquent, d'après la dernière inégalité

$$\left|K_n(t)\right| < 2^{-k}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{-(k+1)}+\frac{B_1}{2}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{-2}t^{1-k} < B_2\, t^{-(k+1)},$$

D'autre part, pour $0 \leqq t \leqq \frac{1}{n}$, on a d'après (15)

$$\left|K_n(t)\right| < An^{k+1} \leqq At^{-(k+1)}.$$

Les deux derniéres inégalités et la formule (7) montrent que (16) est valable pour tout l'intervalle $0 \leqq t \leqq \pi$.

7. Ce point établi, la démonstration de la généralisation que nous avons donnée du théorème de M. *Fejér*, s'achève dans la voie ordinaire.

Montrons d'abord que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left|H_n(t)\right| dt$$

reste borné, lorsque n tend vers l'infini. Écrivons pour cela, en nous appuyant sur (15), (16) et sur (7)

$$(17)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left|H_n(t)\right| dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} < \frac{A}{\pi}\frac{n}{n} + \frac{B\,n^{\,k}}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} t^{-(k+1)}\,dt < B_4.\text{[19]}$$

[19]) On voit par ce qui précède que les conditions d'un théorème général bien connu concernant les intégrales singulières et dû à M. *Lebesgue* et à M. *Haar* sont toutes remplies. Au lieu d'appliquer ce théorème, nous exécutons le raisonnement qui y conduit, dans le cas particulier qui nous occupe.

Admettons maintenant avec M. *Fejér* que $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{2} (f(x+t) + f(x-t)) = S(x)$ existe. En introduisant dans $\varphi(t)$ (*voir* (13)) cette valeur de S, on aura $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t) = 0$. En choisissant alors ε arbitrairement petit et en déterminant δ de façon que $|\varphi(t)| < \varepsilon$ pour $0 \leqq t \leqq \delta$, on aura d'après (14)

$$\left| \frac{S_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}} - S(x) \right| \leqq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\varphi(t)|\,|H_n(t)|\,dt \leqq$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^\delta |H_n(t)|\,dt + \frac{B\,\delta^{-(k+1)}\,n^{-k}}{\pi} \int_\delta^\pi |\varphi(t)|\,dt.$$

La fonction $f(t)$ étant intégrable au sens de Lebesgue, il en sera de même de la fonction $\varphi(t)$ et l'on aura $\int_\delta^\pi |\varphi(t)|\,dt \leqq \int_0^\pi |\varphi(t)|\,dt < C$, C étant une constante. Il vient alors d'après (17)

$$\left| \frac{S_n^{(k)}(x)}{C_n^{(k)}} - S(x) \right| < B_4\,\varepsilon + C\,\frac{B\,\delta^{-(k+1)} n^{-k}}{\pi}$$

Le dernier terme du second membre tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, ce second membre devient pour n assez grand $< B_5\,\varepsilon$.

8. Plaçons nous maintenant dans les hypothèses du théorème de M. *Lebesgue* et démontrons la généralisation que M. *Hardy* a donnée de ce théorème. Soit $\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$, $\Phi(t) = \int_0^t |\varphi(v)|\,dv$ et $\Phi'(0) = 0$. Le nombre ε étant arbitrairement petit, déterminons δ de façon que $|\Phi(t)| < \varepsilon t$ pour $0 < t < \delta$. Écrivons enfin $S = f(x)$ dans (13). Il n'y a rien à changer à l'évaluation de l'intégrale $\int_\delta^\pi$. Quant à l'intégrale $\int_0^\delta$, écrivons

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} |\varphi(t)|\,|H_n(t)|\,dt < B\,n^{-k} \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} |\varphi(t)|\; t^{-(k+1)}\,dt =$$

$$= B\,n^{-k} \left[\Phi(t)\, t^{-(k+1)}\right]_{\frac{1}{n}}^{\delta} + B(k+1)\,n^{-k} \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \Phi(t)\, t^{-(k+2)}\,dt <$$

$$< B\varepsilon + \varepsilon B(k+1)n^{-k}\int_{\frac{1}{n}}^{\delta} t^{-(k+1)}\,dt < B_6\,\varepsilon.$$

Enfin

$$\int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(t)|\;|H_n(t)|\,dt < A\,n\int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(t)|\,dt = A\,n\,\Phi\left(\tfrac{1}{n}\right) < A\,\varepsilon.$$

En résumé, on voit que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} |\varphi(t)|\;|H_n(t)|\,dt < B_7\,\varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration.

Les théorèmes précédents et leurs démonstrations subsistent — *mutatis mutandis* — si $\Sigma\,(a_n \cos n\,x + b_n \sin n\,x)$, au lieu d'être la série de *Fourier* d'une fonction intégrable au sens de *Lebesgue*, est la dérivée formelle de la série de *Fourier* d'une fonction à variation bornée.
