Über die Lage der Wurzeln von linearen Verknüpfungen algebraischer Gleichungen.

Von JULIUS v. SZ. NAGY in Kolozsvár.

Vorliegende Abhandlung behandelt die Frage nach der Lage der Wurzeln der Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{s} a_k f_k(x) = 0, \quad \sum_{k=1}^{s} a_k \frac{1}{f_k(x)} = 0, \quad \sum_{k=1}^{s} a_k \frac{f_k(x)}{g_k(x)} = 0,$$

wo die Koeffizienten a_k nichtnegativ sind, wenn die Wurzeln der Gleichungen n-ten Grades

$$f_k(x) = (x-\alpha_{k1})(x-\alpha_{k2}) \dots (x-\alpha_{kn}) = 0,$$
$$g_k(x) = (x-\beta_{k1})(x-\beta_{k2}) \dots (x-\beta_{kn}) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, s)$$

bekannt sind.

Bezüglich Litteratur verweisen wir auf zwei Abhandlungen des Verfassers, in denen speziellere oder verwandte Fragen behandelt wurden.[1])

1. In diesen Untersuchungen spielt ein dem konvexen Polygon P zugeordnetes, von Kreisbögen begrenztes Gebiet T_n eine wichtige Rolle. Dieses Gebiet ist dadurch gekennzeichnet, dass aus jedem Randpunkte desselben das Polygon unter dem Winkel $\frac{\pi}{n}$ zu sehen ist, d. h. aus jedem Randpunkte kann man an das Polygon solche Stützgerade ziehen, die einen Winkel $= \frac{\pi}{n}$ miteinander bilden.

---

[1]) Geometrische Relationen zwischen den Nullstellen einer ganzen rationalen Funktion und ihrer logarithmischen Derivierten (ungarisch); Über die Lage der Wurzeln von polaren Gleichungen (ungarisch), Mathematikai és Természettudományi Értesitő, Bd. 38 (1922), S. 429—441 bezw. 441—455.

Aus dieser Definition folgt, dass das Polygon P im Gebiete T_n liegt, wenn $n \geqq 1$ ist. Im Falle $n = 1$ stimmen die Bereiche P und T_n überein.

Ist C_n die Randkurve von T_n, so wird sie von jeder Geraden, die wenigstens einen Punkt mit P gemeinsam hat, in zwei Punkten geschnitten, welche durch das Polygon voneinander getrennt werden.

Dies folgt aus dem leicht beweisbaren Satze:

Ist Q ein ausserhalb des konvexen Gebietes G liegender Punkt einer Geraden q, von der das Gebiet G wenigstens in einem Punkte getroffen wird, so nimmt der Winkel der Stützgeraden aus Q an G beständig zu, wenn Q sich entlang q dem Gebiete G nähert.

Die Kurve C_n kann sich also in keinem Punkte kreuzen. Das Gebiet T_n ist einfach zusammenhängend.

Sind $A_1, A_2, \ldots, A_m$ die nacheinander folgenden Ecken des m-seitigen konvexen Polygons P und bezeichnet $\overrightarrow{A_h A_k}$ den die Strecke $A_h A_k$ enthaltenden Halbstrahl mit dem Anfangspunkte A_h, so kann man den Bogen $B_1 B_2$ von C_n, der in dem von den Halbstrahlen $\overrightarrow{A_m A_1}$ und $\overrightarrow{A_1 A_2}$ begrenzten Winkelraume liegt, auf folgende Weise konstruieren:

Bedeutet $\overrightarrow{A_{r+1} A_r}$ den ersten in der Reihe der Halbstrahlen

$$\overrightarrow{A_2 A_1},\ \overrightarrow{A_3 A_2},\ \overrightarrow{A_4 A_3},\ \ldots;\ \overrightarrow{A_{h+1} A_h},\ \ldots$$

von dem der Halbstrahl $\overrightarrow{A_m A_1}$ entweder nicht geschnitten, oder unter einem Winkel $< \frac{\pi}{n}$ geschnitten wird, und ist $B_1 B_1^{(r)}$ derjenige zwischen $\overrightarrow{A_m A_1}$ und $\overrightarrow{A_{r+1} A_r}$ fallende Kreisbogen, aus dessen Punkten die Strecke $A_1 A_r$ unter dem Winkel $\frac{\pi}{n}$ zu sehen ist, so ist der Bogen $B_1 B_1^{(r)}$ in dem Bogen $B_1 B_2$ enthalten. Um nun den Punkt B_2 zu erhalten, bezeichnen wir mit $B_1^{(r+1)}$ den Schnittpunkt des Halbstrahls $\overrightarrow{A_{r+2} A_{r+1}}$ mit dem Kreise durch die Punkte A_1, A_{r+1}, $B_1^{(r)}$, mit $B_1^{(r+k)}$ den Schnittpunkt des Halbstrahls $\overrightarrow{A_{r+k+1} A_{r+k}}$ mit dem Kreise durch die Punkte A_1, A_{r+k}, $B_1^{(r+k-1)}$. Ist nun $B_1^{(r+s-1)} B_1^{(r+s)}$ der erste in der Reihe der Kreisbögen

$$B_1^{(r)} B_1^{(r+1)},\ B_1^{(r+1)} B_1^{(r+2)},\ \ldots,\ B_1^{(r+k-1)} B_1^{(r+k)},\ \ldots$$

von welchem der Halbstrahl $\overrightarrow{A_1 A_2}$ getroffen wird, so ist B_2 der Treffpunkt und der gesuchte Bogen $B_1 B_2$ besteht aus den s Kreisbögen

$$B_1 B_1^{(r)}, \; B_1^{(r)} B_1^{(r+1)}, \; B_1^{(r+1)} B_1^{(r+2)}, \ldots, \; B_1^{(r+s-1)} B_2$$

Trifft der Halbstrahl $\overrightarrow{A_2 A_3}$ die Kurve C_n (ausserhalb der Strecke $A_2 A_3$) im Punkte B_3, so kann der Bogen $B_2 B_3$ ebenso konstruiert werden, wie der Bogen $B_1 B_2$.

Es ist klar, dass jene Ecken des Polygons P, bei welchen die Winkel grösser als $\frac{\pi}{n}$ sind, für $n > 1$ im Innern des Gebietes T_n liegen, während die übrigen Ecken zugleich auch Ecken der Kurve C_n sind. Es ist auch leicht einzusehen, dass die beiden Punkte, in denen die Kurve C_n $(n > 1)$ von einer verlängerten Seite des Polygons P getroffen wird, für C_n Ecken sind. Daraus folgt der Satz:

Hat das m-seitige konvexe Polygon h Ecken, bei denen die Winkel kleiner als $\frac{\pi}{n}$ *sind und k Seitenpaare, die miteinander den Winkel* $\frac{\pi}{n}$ *bilden, so besteht die Kurve* C_n *aus* $2m - (k + h)$ *Kreisbögen.*

Reduziert sich das Polygon P auf eine Strecke AB, so ist das Gebiet T_n ein symmetrisches Kreisbogenzweieck mit den Ecken A und B und mit dem Winkel $\frac{2n-2}{n}\pi$. Dieses Gebiet wird von den Punkten der beiden Kreise gebildet, die durch die Punkte A und B hindurchgehen und mit der Strecke AB den Winkel $\frac{\pi}{n}$ bilden. Dieses Gebiet wird im Folgenden *Kreispaar* genannt und mit K^n bezeichnet.

Wir „legen über die Punkte A und B das Kreispaar K^n“, wenn wir das Kreispaar K^n mit den Ecken A und B konstruieren.

2. Es gilt der

Satz I. *Ist P das kleinste konvexe Gebiet, in dem alle Wurzeln der Gleichungen n-ten Grades*

$$f_k(x) = (x - \alpha_{k1})(x - \alpha_{k2}) \ldots (x - \alpha_{kn}) = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, s)$$

enthalten sind, so liegt jede Wurzel der Gleichungen

(1) $$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_s f_s(x) = 0$$

oder

(2) $$\frac{a_1}{f_1(x)} + \frac{a_2}{f_2(x)} + \ldots + \frac{a_s}{f_s(x)} = 0,$$

wo die Koeffizienten a_k beliebige nichtnegative reelle Zahlen sind (unabhängig von der Zahl s) *im Gebiete T_n*, (aus dessen Randpunkten das Polygon P unter dem Winkel $\frac{\pi}{n}$ zu sehen ist).

Dieses Gebiet, in dem alle Wurzeln der Gleichungen (1) und (2) enthalten sind, kann im allgemeinen nicht verkleinert werden.

Es seien

$$x-\alpha_{kh}=r_{kh}\,e^{-i\varphi_{kh}} \text{ und } \varphi_k=\frac{\varphi_{k1}+\varphi_{k2}+\dots+\varphi_{kn}}{n}$$

$$(k=1, 2, \dots, s,\ h=1, 2, \dots, n),$$

so erhält man durch Multiplikation mit $e^{in\delta}$ bezw. $e^{-in\delta}$ (wo δ einen Winkel bedeutet) aus der Gleichung (1) bezw. (2) die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{s} a_k r_{k1} r_{k2} \dots r_{kn}\,[\cos n(\varphi_k-\delta)-i\sin n(\varphi_k-\delta)]=0$$

und

$$\sum_{k=1}^{s} a_k \frac{\cos n(\varphi_k-\delta)+i\sin n(\varphi_k-\delta)}{r_{k1} r_{k2} \dots r_{kn}}=0.$$

In diesen Gleichungen kann nicht jeder der Werte $\sin n(\varphi_k-\delta)$ positiv ausfallen. Es kann also nicht für jeden Winkel φ_k die Ungleichung

$$(3) \qquad \delta<\varphi_k<\delta+\frac{\pi}{n} \quad (k=1, 2, \dots, s)$$

und somit auch nicht für jede φ_{kh} die Ungleichung

$$\delta<\varphi_{kh}<\delta+\frac{\pi}{n} \quad (k=1, 2, \dots, s;\ h=1, 2, \dots, n)$$

bestehen. Damit ist bewiesen, dass die Wurzeln von (1) und (2) im Gebiete T_n liegen.

Der Satz I ist genau. Betrachten wir nämlich die Gleichung

$$(4) \qquad a_1(x+1)^n+a_2(x-1)^n=0,$$

so folgt aus derselben:

$$\frac{x-1}{x+1}=\left|\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}}\right| e^{\frac{k}{n}\pi i} \quad (k=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots).$$

Die Gleichungen

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{k}{n}\pi \quad (k=\pm 1, \pm 3, \dots)$$

stellen $\frac{n}{2}$ Kreise bezw. $\frac{n-1}{2}$ Kreise und die Strecke $(-1, +1)$ dar, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Die Wurzeln der Gleichung (4) sind die Schnittpunkte der $\frac{n}{2}$ Kreise bezw. der $\frac{n-1}{2}$ Kreise und der Strecke $(-1, +1)$ mit dem Orthogonalkreise

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \left|\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}}\right|.$$

Verändert sich der Quotient $\frac{a_1}{a_2}$ von Null bis $+\infty$ stetig, so beschreiben die beiden dem Betrage nach grössten Wurzeln der Gleichung (4) den Rand C_n des Gebietes T_n, d. h. den Rand des Kreispaares K^n über die Punkte -1, 1.

Aus dem Satze I folgt der

Satz II. *Liegen alle Wurzeln der Gleichungen n-ten Grades $f_k(x) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$, in denen die Koeffizienten von x^n positiv sind in einem Kreise vom Radius r, so liegen die Wurzeln der Gleichungen*

$$\sum_{k=1}^{s} a_k f_k(x) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{s} \frac{a_k}{f_k(x)} = 0,$$

wo die Koeffizienten a_k nichtnegativ sind, alle in dem konzentrischen Kreise mit dem Radius $\frac{r}{\sin\frac{\pi}{2n}}$.

Aus den Punkten des Direktorkreises einer Ellipse wird die Ellipse unter rechtem Winkel gesehen, also gilt der folgende Satz:

Liegen die Wurzeln der Gleichungen zweiten Grades $f_k(x) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$, in denen die Koeffizienten von x^2 positiv sind, alle in einer Ellipse, so liegen die Wurzeln der Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{s} a_k f_k(x) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{s} a_k \frac{1}{f_k(x)} = 0,$$

wo die Koeffizienten a_k nichtnegativ sind, alle im Direktorkreise der Ellipse.

3. Es gilt auch der folgende Satz:

Satz III. *Ist P das kleinste konvexe Gebiet, in dem alle Wurzeln der Gleichungen n-ten Grades*

$$f_k(x) = (x-\alpha_{k1})(x-\alpha_{k2})\ldots(x-\alpha_{kn}) = 0,$$
$$g_k(x) = (x-\beta_{k1})(x-\beta_{k2})\ldots(x-\beta_{kn}) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, s)$$

enthalten sind, so liegt jede Wurzel der Gleichungen

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{s} a_k \frac{f_k(x)}{g_k(x)} = 0, \quad \sum_{k=1}^{s} a_k \frac{g_k(x)}{f_k(x)} = 0,$$

wo die Koeffizienten a_k nichtnegativ sind, in dem Gebiete T_{2n}.

Es seien

$$x - \alpha_{kh} = r_{kh} e^{-i\varphi_{kh}}, \; x - \beta_{kh} = \varrho_{kh} e^{-i\psi_{kh}}, \; \varphi_k = \frac{\varphi_{k1} + \varphi_{k2} + \dots + \varphi_{kn}}{n}$$

$$\psi_k = \frac{\psi_{k1} + \psi_{k2} + \dots + \psi_{kn}}{n} \; (h = 1, 2, \dots, n; \; k = 1, 2, \dots, s),$$

so können aus (5) die Gleichungen

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{s} a_k \frac{r_{k1} r_{k2} \dots r_{kn}}{\varrho_{k1} \varrho_{k2} \dots \varrho_{kn}} [\cos n(\varphi_k - \psi_k) + i \sin n(\varphi_k - \psi_k)] = 0, \\ &\sum_{k=1}^{s} a_k \frac{\varrho_{k1} \varrho_{k2} \dots \varrho_{kn}}{r_{k1} r_{k2} \dots r_{kn}} [\cos n(\varphi_k - \psi_k) + i \sin n(\varphi_k - \psi_k)] = 0 \end{aligned}$$

abgeleitet werden.

Besteht für jede positive Zahl $k (\leq s)$ die Ungleichung

$$(7) \qquad -\frac{\pi}{2n} < \varphi_k - \psi_k < \frac{\pi}{2n},$$

so sind die reellen Teile der Glieder in den Gleichungen (6) alle positiv, die linke Seite kann also nicht verschwinden. Daraus folgt der Satz III.

Der Satz III ist genau, wie aus der Gleichung

$$a_1 (x+1)^{2n} + a_2 (x - 1^{2n} = 0$$

folgt, die sich auch in der Form

$$a_1 \frac{(x+1)^n}{(x-1)^n} + a_2 \frac{(x-1)^n}{(x+1)^n} = 0$$

darstellen lässt.

Bestehen die Ungleichungen

$$(8) \qquad -\frac{\pi}{2n} < \varphi_{kh} - \psi_{kh} < \frac{\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \dots, s; \; h = 1, 2, \dots, n),$$

so bestehen auch die Ungleichungen (7). Daraus folgt der

Satz IV. *Sind*

$$f_k(x) = (x - \alpha_{k1})(x - \alpha_{k2}) \dots (x - \alpha_{kn}),$$

$$g_k(x) = (x - \alpha_{k1})(x - \alpha_{k2}) \dots (x - \alpha_{kn}) \quad (k = 1, 2, \dots, s)$$

und bedeutet K_{kh}^{2n} das Kreispaar K^{2n} über die Punkte α_{kh} und β_{kh}, *so liegt keine Wurzel der Gleichungen mit nichtnegativen Koeffizienten* a_k

(5) $$\sum_{k=1}^{s} a_k \frac{f_k(x)}{g_k(x)} = 0, \quad \sum_{k=1}^{s} a_k \frac{g_k(x)}{f_k(x)} = 0,$$

ausserhalb der ns *Kreispaare* K_{kh}^{2n}.

Wir bezeichnen die Menge der Punkte der ns *Kreispaare mit* M. *Vertauscht man die Reihenfolge der Wurzeln der Gleichungen* $f_k(x) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$, *so erhält man verschiedene* [im Allgemeinen $(n!)^s$] *Punktmengen* M.

Sind $M_1, M_2, \ldots, M_v$ *verschiedene* M-*Punktmengen und ist* M^* *ihre Durchschnittsmenge, so liegt keine Wurzel der Gleichungen* (5) *ausserhalb* M^*.

Die Sätze III und IV lassen sich auf folgende Weise verallgemeinern:

Satz V. *Ist* P *das kleinste konvexe Gebiet, in dem alle Wurzeln der Gleichungen*

(9) $$f_k(x) = (x-\alpha_{k1})(x-\alpha_{k2}) \ldots (x-\alpha_{kn_k}) = 0$$
$$g_k(x) = (x-\beta_{k1})(x-\beta_{k2}) \ldots (x-\beta_{kn_k}) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, s)$$

enthalten sind, sind

$$n_1 - m_1 = n_2 - m_2 = \ldots = n_s - m_s = p \geqq 0$$

und ist n *die grösste der Zahlen* n_k, *so liegt jede Wurzel der Gleichungen*

(10) $$\sum_{k=1}^{s} a_k \frac{f_k(x)}{g_k(x)} = 0, \quad \sum_{k=1}^{s} a_k \frac{g_k(x)}{f_k(x)} = 0,$$

mit nichtnegativen Koeffizienten a_k *in dem zu* P *gehörigen Gebiete* T_{2n}.

Ordnet man die m_k *ersten Wurzeln der Gleichungen* $f_k(x) = 0$ *und* $g_k(x) = 0$ *paarweise einander zu, ordnet man den übrigen* p *Wurzeln der Gleichung* $f_k(x) = 0$ *eine beliebige komplexe Zahl* γ *zu und legt man über diese* n_k *Punktpaare je ein* K^{2n_k} $(k = 1, 2, \ldots, s)$, *so liegt keine Wurzel der Gleichungen* (10) *ausserhalb der* $n_1 + n_2 + \ldots + n_s$ *Kreispaare.*

Bezeichnet M *die Menge der Punkte dieser Kreispaare, so verändert sie sich durch die Veränderung des beliebig angenommenen Punktes* γ *und der Zuordnung der Wurzelpaare von den Gleichungen* $f_k(x) = 0$ *und* $g_k(x) = 0$.

Sind $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$ verschiedene M-Punktmengen und ist M^* ihre Durchschnittsmenge, so liegt jede Wurzel der Gleichungen (10) in der Punktmenge M^*.

Multipliziert man in der ersten (zweiten) der Gleichungen (10) den Nenner bezw. Zähler (den Zähler bezw. Nenner) des k-ten Gliedes mit $(x-\gamma)^{n-n_k+p}$ bezw. mit $(x-\gamma)^{n-n_k}$, wo γ eine in dem Gebiete T liegende komplexe Zahl bedeutet, so haben die Gleichungen (10) die Form (5). Damit ist der Satz V bewiesen.

4. Dividiert man die Gleichung (1) und multipliziert man die Gleichung (2) mit einer beliebigen Funktion n-ten Grades

$$g(x) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n),$$

die mit einer der Funktionen $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ zusammenfallen kann, so erhält man eine Gleichung von der Form (5). Also gilt der folgende

Satz V. *Sind*

$$f_k(x) = (x-\alpha_{k1})(x-\alpha_{k2})\ldots(x-\alpha_{kn}) \quad (k = 1, 2, \ldots, s),$$

bedeuten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ beliebige Zahlen und bezeichnet K^{2n}_{kh} das Kreispaar K^{2n} über die Punkte α_{kh} und β_h, so liegt keine Wurzel der Gleichungen mit nichtnegativen Koeffizienten

$$(11) \qquad \sum_{k=1}^{s} a_k f_k(x) = 0, \quad \sum_{k=1}^{s} \frac{a_k}{f_k(x)} = 0$$

ausserhalb der Menge M, bestehend aus den Punkten der ns Kreispaare K^{2n}_{kh}.

Sind $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$ verschiedene M-Punktmengen mit der Durchschnittsmenge M^*, so liegt jede Wurzel der Gleichungen (11) *in der Menge M^*.*

Satz VI. *Zerfällt die durch den vorigen Satz definierte Punktmenge M^* in μ zusammenhängende Bereiche $B_1, B_2, \ldots, B_\mu$, so hat die Gleichung*

$$(1) \qquad a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_s f_s(x) = 0$$

im Bereiche B_h für jedes System nichtnegativer Zahlen a_k (die nicht alle verschwinden) eine feste Anzahl Wurzeln. Im Bereiche B_h haben also auch die Gleichungen $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0, \ldots, f_s(x) = 0$ die gleiche Anzahl Wurzeln.

Lässt man nämlich in der Gleichung (1) die nichtnegativen Zahlen a_k sich stetig verändern, so kann keine Wurzel von (1) aus einem Bereich B_h heraustreten, ohne zugleich auch M^* zu verlassen, was jedoch nach Satz V ausgeschlossen ist. Damit ist der Satz bewiesen.

5. Wir wollen nun die obigen Resultate für den Spezialfall $s=2$, d. h für die Gleichung

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) = 0, \tag{12}$$

wo

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n), \\ f_2(x) &= (x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n) \end{aligned} \tag{13}$$

und die Koeffizienten a_1 und a_2 nichtnegativ $(a_1 + a_2 > 0)$ sind, weiterführen.

Die Gleichung (12) lässt sich in der Form

$$\begin{aligned} & a_1 \frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)}{(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_k)} + \\ & + a_2 \frac{(x-\beta_{k+1})(x-\beta_{k+2}\ldots(x-\beta_n)}{(x-\alpha_{k+1})(x-\alpha_{k+2}\ldots(x-\alpha_n)} = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

im Falle $n=2m+1$ auch in der Form

$$\begin{aligned} & a_1 \frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_m)}{(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_m)} \sqrt{\frac{x-\alpha_{m+1}}{x-\beta_{m+1}}} + \\ & + a_2 \sqrt{\frac{x-\beta_{m+1}}{x-\alpha_{m+1}}} \frac{(x-\beta_{m+2})(x-\beta_{m+3})\ldots(x-\beta_n)}{(x-\alpha_{m+2})(x-\alpha_{m+3})\ldots(x-\alpha_n)} = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

darstellen.

Es seien

$$x-\alpha_k = r_k e^{-i\varphi_k}, \quad x-\beta_k = \varrho_k e^{i\psi_k},$$

so haben die einen Glieder von (14) bezw. (15) Argumente gleich

$$\begin{aligned} & -[(\varphi_1-\psi_1)+(\varphi_2-\psi_2)+\ldots+(\varphi_k-\psi_k)], \\ & -[(\varphi_{k+1}-\psi_{k+1})+(\varphi_{k+2}-\psi_{k+2})+\ldots+(\varphi_n-\psi_n)] \end{aligned} \tag{16}$$

bezw.

$$\begin{aligned} & -\left[(\varphi_1-\psi_1)+(\varphi_2-\psi_2)+\ldots+(\varphi_m-\psi_m)+\frac{\varphi_{m+1}-\psi_{m+1}}{2}\right], \\ & \left[\frac{\varphi_{m+1}-\psi_{m+1}}{2}+(\varphi_{m+2}-\psi_{m+2})+(\varphi_{m+3}-\psi_{m+3})+\ldots+(\varphi_n-\psi_n)\right] \end{aligned} \tag{17}$$

Bestehen für (16) die Ungleichungen

$$-\frac{\pi}{2k} < \varphi_h - \psi_h < \frac{\pi}{2k} \text{ und } -\frac{\pi}{2(n-k)} < \varphi_{k+l} - \psi_{k+l} < \frac{\pi}{2(n-k)} \tag{18}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, k;\ l = 1, 2, \ldots, n-k),$$

oder bestehen für (17) die Ungleichungen

$$(19) \qquad -\frac{\pi}{n} < \varphi_h - \psi_h < \frac{\pi}{n} \quad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

so liegen beide Argumente in (16) und (17) zwischen $\frac{-\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$. Der reelle Teil der Gleichungen (14) und (15) kann also nicht verschwinden. Daraus folgt der

Satz VI. *Ordnet man die Wurzeln der Gleichungen*

$$f_1(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n) = 0,$$
$$f_2(x) = (x-\beta_1)(x-\beta_2\ldots(x-\beta_n) = 0$$

auf eine beliebige Weise paarweise einander zu und legt man über jedes der n Wurzelpaare α_h, β_h je ein Kreispaar K^n, so liegen alle Wurzeln der Gleichung

$$(12) \qquad a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) = 0$$

mit nichtnegativen Koeffizienten a_1, a_2 in den n Kreispaaren.

Legt man über k der Wurzelpaare α_h, β_h je ein Kreispaar K^{2k}, über die übrigen $n-k$ Paare der Wurzeln je ein Kreispaar $K^{2(n-k)}$, so enthalten auch diese n Kreispaare jede Wurzel von (12).

Bezeichnet M die Menge der Punkte eines Systems von n Kreispaaren, die jede Wurzel der Gleichung (12) enthalten und sind M_1, M_2, ..., M_ν verschiedene M-Punktmengen mit der Durchschnittsmenge M^*, so liegt keine Wurzel von (12) ausserhalb der Punktmenge M^*.

Ebenso, wie der Satz VI, ergeben sich auch die folgenden beiden Sätze.

Satz VII. *Hat ein Kreispaar keinen gemeinsamen Punkt mit irgend einem der übrigen $n-1$ Kreispaare des Systems, so enthält das Kreispaar genau eine Wurzel der Gleichung. Bilden h Kreispaare einen zusammenhängenden Bereich B und hat B keinen gemeinsamen Punkt mit irgend einem der übrigen $n-h$ Kreispaare des Systems, so hat die Gleichung (12) genau h Wurzeln im Gebiete B*

Satz VIII. *Zerfällt die durch den Satz VI definierte Punktmenge M^* in μ verschiedene zusammenhängende Bereiche B_1, B_2, ..., B_μ, die miteinander nicht zusammenhängen, so hat jede der Gleichungen (12) mit beliebigen nichtnegativen Koeffizienten a_1, a_2 im Gebiete B_h dieselbe Anzahl Wurzeln.*

An den Nullstellen der Gleichung (12) nimmt die rationale Funktion

$$F(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

einen reellen nichtpositiven Wert an. Die Sätze VI, VII und VIII gelten also auch für diejenigen Stellen, in denen die Funktion $F(x)$ einen nichtpositiven reellen Wert annimmt.

7. Wir beweisen endlich die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von *R. Jentzsch*:[2])

IX. *Es sei T der kleinste konvexe Bereich, der sämtliche Wurzeln der Gleichungen*

$$F_1(x)\equiv f(x)-g_1(x)=0,\quad F_2(x)\equiv f(x)-g_2(x)=0$$

enthält, wo $f(x)$ eine ganze rationale Funktion n-ten Grades ist, $g_1(x)$ und $g_2(x)$ solche ganze rationale Funktionen bedeuten, die höchstens den Grad $m\leq n-1$ haben. Sind a_1 und a_2 beliebige positive Zahlen, so liegen die Wurzeln der Gleichung

$$(13)\qquad a_1 F_1(x)+a_2 F_2(x)\equiv(a_1+a_2)f(x)-a_1 g_1(x)-a_2 g_2(x)=0$$

alle im endlichen Gebiete T_{m+1} (aus dessen Randpunkten der Bereich T unter dem Winkel $\frac{\pi}{m+1}$ erscheint).[3])

Sind

$$F_i(x)=A_i(x-\alpha_{i1})(x-\alpha_{i2})\dots(x-\alpha_{in})\text{ und } F_i^{(k)}(x)=\frac{d^k F_i(x)}{dx^k}\ (i=1,2),$$

so ist

$$\frac{F_i^{(k)}(x)}{F_i(x)}=k\sum\frac{1}{(x-\alpha_{i1})(x-\alpha_{i2})\dots(x-\alpha_{ik})}$$

wo die Summation für alle k-ten Kombinationen der Wurzeln $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}$ zu erstrecken ist.

Daraus folgt, dass die Gleichung

$$a_2\frac{F_1^{(m+1)}(x)}{F_1(x)}+a_1\frac{F_2^{(m+1)}(x)}{F_2(x)}\equiv a_2\frac{f_1^{(m+1)}(x)}{F_1(x)}+a_1\frac{f^{(m+1)}(x)}{F_2(x)}\equiv$$

$$\equiv\frac{a_1 F_1(x)+a_2 F_2(x)}{F_1(x)F_2(x)}f^{(m+1)}(x)=0$$

---

[2]) Archiv d. Math. u. Phys., Bd. 25 (1917), S. 196, Aufgabe Nr. 526. Der Satz wurde von *M. Fekete* im Jahresberichte d. DMV., Bd. 31 (1922), 2. Abt., S. 42 bewiesen.

[3]) Diese Verallgemeinerung, welche auch den (von uns in 1918 bewiesenen) Satz I für $s=2$ in sich enthält, wurde neulich (im Falle $a_1+a_2=1$) durch *M. Fekete* im Jahresberichte d. DMV., Bd. 31 (1922), 2. Abt., S. 66 als Aufgabe gestellt. Eine andere Verallgemeinerung des Satzes von *Jentzsch* wurde von *A. Cohn* bewiesen, Math. Zeitschr. Bd. 14 (1922), S. 138—140.

sich in der Form (2) darstellen lässt, wo die Nennerfunktionen $(m+1)$-ten Grades sind und ihre Nullstellen mit denjenigen der Funktionen $F_1(x)$ oder $F_2(x)$ übereinstimmen. Damit ist der Satz XI auf Grund des Satzes I bewiesen.

Man könnte leicht auf Grund von Satz V für die Lage der Wurzeln der Gleichung (13) einen entsprechenden Satz aufstellen, wo Kreispaare $K^{2(m+1)}$ die Rolle der Kreispaare K^{2n} übernehmen