Eine Verallgemeinerung von MOIVREs Problem in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von JOSEF KÜRSCHÁK in Budapest.

§ 1. *Von n Urnen befinden sich in der ersten die Zahlen*

$$0, 1, 2, \ldots, s_1 - 1,$$

in der zweiten die Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots, s_2 - 1,$$

u. s. f.; aus jeder Urne zieht man je eine Zahl x. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogenen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine erzielte Summe k ergeben? (Im Falle $s_1 = s_2 = \ldots = s_n = s$ ist dies die LAPLACEsche Fassung von MOIVREs Problem.[1]))

Die Wahrscheinlichkeit ist gleich dem Quotienten

$$\frac{\left\{s_1, s_2, \ldots, s_n\right\}_k}{s_1 s_2 \ldots s_n},$$

dessen Zähler die Anzahl derjenigen Lösungen der Diophantischen Gleichung

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k \tag{1}$$

bedeutet, in denen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rationale ganze Zahlen sind und die Ungleichungen

$$0 \leqq x_i < s_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

befriedigen.

Im Folgenden soll die Anzahl dieser Lösungen als ein Aggregat von Binomialkoeffizienten dargestellt werden, wie dies für den Fall $s_1 = s_2 = \ldots = s_n = s$ bereits MONTMORT[2]) gelungen ist.

---

[1]) Vgl. E. CZUBER, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Encyklopädie der math. Wiss. I 2, insbesondere S. 746—748.

[2]) [R. DE MONTMORT,] Essay d'analyse sur les jeux de hazard, II. Aufl., Paris (1714), S. 46—50.

Die Formel hat MONTMORT bereits in seinem Briefe vom 15. Nov. 1710 NIKOLAUS BERNOULLI mitgeteilt (abgedruckt im genannten Werke, S. 303—307). Auf diesen Brief machte mich Herr K. JORDAN aufmerksam.

§ 2. Statt (1) gehen wir von der allgemeineren Diophantischen Gleichung

$$(2) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = k$$

aus, in der $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegebene positive ganze Zahlen sind. Die Anzahl derjenigen Lösungen, in denen die rationalen ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Ungleichungen

$$0 \leqq x_i < s_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

befriedigen, bezeichnen wir durch

$$\begin{bmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_n \\ s_1, s_2, \ldots, s_n \end{bmatrix}_k.$$

Hier können und wollen wir auch die Fälle

$$k < 0 \text{ resp. } k > a_1(s_1 - 1) + \ldots + a_n(s_n - 1)$$

zulassen, in denen die Anzahl der Lösungen gleich Null ist.

Wird für irgend ein s_i eine grössere Zahl s_i' gesetzt, so kommen zu den früheren Lösungen von (2) noch diejenigen Lösungen, in denen

$$s_i \leqq x_i < s_i'$$

und

$$0 \leqq x_j < s_j \qquad (j \gtrless i)$$

ist. Ihre Anzahl ist gleich der Anzahl derjenigen Lösungen von $a_1 x_1 + \ldots + a_{i-1} x_{i-1} + a_i y + a_{i+1} x_{i+1} + \ldots + a_n x_n = k - a_i s_i$, in denen $0 \leqq y = x_i - s_i < s_i' - s_i$ ist und die Werte der übrigen Unbekannten zwischen die früheren Grenzen fallen.

Demnach ist

$$(3) \qquad \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n \end{bmatrix}_k = \\ = \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i' - s_i, \ldots, s_n \end{bmatrix}_{k - a_i s_i}$$

Insbesondere erhalten wir

$$(4) \qquad \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i', \ldots, s_n \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n \end{bmatrix}_k,$$

wenn

$$a_i s_i' \geqq a_i s_i > k.$$

Bezeichnet man mit w_i eine Zahl, die grösser ist als $\frac{k}{a_i}$, so kann zufolge (4) bei der Berechnung der Differenz

$$\begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, w_i, \ldots, s_n \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n \end{bmatrix}_k$$

w durch $w + s_i$ ersetzt werden. Man erhält dann zufolge (3) für jene Differenz den Wert

$$\begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n \end{bmatrix}_{k-a_i s_i}$$

Es ist also

$$\begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, w_i, \ldots, s_n \end{bmatrix}_k - \tag{5}$$

$$- \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, w_i, \ldots, s_n \end{bmatrix}_{k-a_i s_i}$$

§ 3. Befriedigen $w_1, w_2, \ldots, w_n$ die Ungleichungen

$$a_1 w_1 > k,\ a_2 w_2 > k,\ \ldots,\ a_n w_n > k,$$

so ist zufolge (4)

$$\begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n \\ w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_n \end{bmatrix}_k$$

nur von $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n$ und k abhängig. Ich bezeichne diese Zahl (bei konstanten a) durch $[k]$.

Nun ist nach (5)

$$\begin{bmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_n \\ s_1, w_2, \ldots, w_n \end{bmatrix}_k = [k] - [k - a_1 s_1].$$

Ferner ist wieder nach (5) die Zahl

$$\begin{bmatrix} a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \\ s_1, s_2, w_3, \ldots, w_n \end{bmatrix}_k$$

gleich der Differenz der Zahlen

$$\begin{bmatrix} a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \\ s_1, w_2, w_3, \ldots, w_n \end{bmatrix}_k = [k] - [k - a_1 s_1]$$

und

$$\begin{bmatrix} a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \\ s_1, w_2, w_3, \ldots, w_n \end{bmatrix}_{k-a_2 s_2} = [k - a_2 s_2] - [k - a_1 s_1 - a_2 s_2],$$

also gleich

$$[k] - [k - a_1 s_1] - [k - a_2 s_2] + [k - a_1 s_1 - a_2 s_2].$$

Überhaupt ist

$$\begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i, w_{i+1}, \ldots, w_n \end{bmatrix}_k = \tag{6}$$

$$= \sum (-1)^m \left[k - a_{j_1} s_{j_1} - a_{j_2} s_{j_2} - \ldots - a_{j_m} s_{j_m}\right]$$

wo für $j_1, j_2, \ldots, j_m$ sämtliche 2^i Kombinationen (von der nullten bis zur i-ten Klasse der Zahlen $1, 2, \ldots, i$) zu setzen sind.

Gilt nämlich diese Gleichheit für irgend ein i, so erhält man für $i+1$ eine ähnliche Gleichung, indem man nach (5)

$$\begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_{i+1}, w_{i+2}, \ldots, w_n \end{bmatrix}_k$$

gleich

$$\begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i, w_{i+1}, \ldots, w_n \end{bmatrix}_k - \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_i, w_{i+1}, \ldots, w_n \end{bmatrix}_{k-a_{i+1} s_{i+1}}$$

setzt, und dann auf beide Glieder dieser Differenz die für i richtige Gleichung (6) anwendet.

Insbesondere ist

$$(7) \quad \begin{bmatrix} a_1, \ldots, a_n \\ s_1, \ldots, s_n \end{bmatrix}_k = \sum (-1)^m \, [k - a_{j_1} s_{j_1} - a_{j_2} s_{j_2} - \ldots - a_{j_m} s_{j_m}],$$

wo für $j_1, j_2, \ldots, j_m$ sämtliche 2^i Kombinationen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ zu setzen sind.

§ 4. Im Falle $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ und $k \geqq 0$, erhält man $[k]$ wohl am einfachsten in der folgenden bekannten[3]) Weise.

Befriedigen die nicht negativen ganzen Zahlen

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

die Gleichung (1) und somit die Zahlen

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$$

die Ungleichheit

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \leqq k,$$

so bilden

$$x_1, \; x_1 + x_2, \; x_1 + x_2 + x_3, \; \ldots, \; x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}$$

eine Kombination $(n-1)$-ter Klasse der Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots, k$$

mit Wiederholung; die Elemente der Kombination erscheinen dabei ihrer Grösse nach geordnet. Wählt man die x auf jede zugelassene Weise, so erhält man alle Kombinationen von je $n-1$ der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, k$ mit Wiederholung und jede nur einmal. Es ist demnach $[k]$ gleich der Anzahl

$$\binom{n+k-1}{n-1}$$

dieser Kombinationen.

---

3) H. F. SCHERK, Lehrsätze über den Zusammenhang von Combinationen und Variationen und jener unter einander, *Crelle* Journal, Bd. 3. (1828) S. 96—97.

Für $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ geht also (7) in

(8) $$\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}_k = \sum{}' (-1)^m \binom{n+k-s_{j_1}-s_{j_2}-\ldots-s_{j_m}-1}{n-1}$$

über, wo der Akzent neben dem Summationszeichen auf das Fehlen derjenigen Glieder hinweist, in denen

$$s_{j_1} + s_{j_2} + \ldots + s_{j_m} > k$$

ist.[4])

Setzt man $s_1 = \ldots = s_n = s$ und zieht die gleichen Glieder zusammen, so erhält man auf der rechten Seite die MONTMORTsche Summe

$$\sum_{m=0}^{n}{}' (-1)^m \binom{n}{m} \binom{n+k-ms-1}{n-1}.$$

---

[4]) Diese Bemerkung ist besonders für diejenigen Glieder von Bedeutung, in denen

$$s_{j_1} + s_{j_2} + \ldots + s_{j_m} > n + k - 1;$$

denn für negative x ist

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}$$

von Null verschieden.