Über Faktorenfolgen, welche die „Klasse" einer Fourierschen Reihe unverändert lassen.

Von Michael Fekete in Budapest.

§ 1.

Einleitende Erklärungen. Fragestellungen und Übersicht der Lösungen.

1. Aus der Gesamtheit aller, für jedes reelle x erklärten, nach 2π periodischen Funktionen $f(x)$ seien herausgegriffen und je zu einer Klasse zusammengefasst

erstens sämtliche Funktionen, die über das Intervall $(0, 2\pi)$ in *Lebesgue*schem Sinne[1] integrierbar (Klasse C_1),

zweitens sämtliche Funktionen der Klasse C_1, die im Intervalle $(0, 2\pi)$ beschränkt (Klasse C_2),

drittens sämtliche Funktionen, die für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ beschränkt und von 0 bis 2π in *Riemann*schem Sinne[2]) integrierbar (Klasse C_3),

viertens sämtliche Funktionen, die für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ stetig (Klasse C_4),

fünftens sämtliche Funktionen, die im Intervalle $(0, 2\pi)$ von beschränkter Schwankung sind (Klasse C_5),

sechstens sämtliche Funktionen, die sich für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ als bestimmte Integrale (von 0 bis x) einer im L.-Sinne integrierbaren Funktion darstellen lassen (Klasse C_6).

2. Sei

$$(1) \qquad \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots$$

eine unendliche trigonometrische Reihe. Wir sagen, sie gehört zur Klasse K_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, 6$), falls in der oben erklärten Funktionsklasse C_ν eine Funktion $f(x)$ vorhanden ist, deren *Fourier*sche

[1]) Kurz: im L.-Sinne.

[2]) Kurz: im R.-Sinne.

Konstanten $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt$, $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt$ mit den Koeffizienten a_n, b_n von (1) übereinstimmen.

Die Hauptfrage, mit welcher wir uns im vorliegenden Aufsatze beschäftigen wollen, lautet wie folgt:

A. *Welche sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit die Faktorenfolge*

(2) $$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots,$$

komponiert mit den Gliedern einer Reihe (1) *der Klasse* K_ν, *diese in eine Reihe*

(3) $$\frac{\lambda_0 a_0}{2} + \lambda_1(a_1\cos x + b_1\sin x) + \ldots + \lambda_n(a_n\cos nx + b_n\sin nx) + \ldots$$

überführe, welche wiederum zur Klasse K_ν *gehört?*

3. Dieser Frage nach der Charakteristik der *„Faktoren der Klasseninvarianz"* wollen wir noch eine analoge Frage betreffend die *„Faktoren der Klassenkovarianz"* zur Seite stellen. Diese kann — wenn wir die zu (1) konjugierte trigonometrische Reihe

($\overline{1}$) $$b_1\cos x - a_1\sin x + \ldots + b_n\cos nx - a_n\sin nx + \ldots$$

als zur Klasse $\overline{K}_\nu$ gehörig betrachten, falls (1) eine *Fourier*sche Reihe[3]) aus der Klasse K_ν bedeutet — folgendermassen formuliert werden:

B. *Welche sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit die Faktorenfolge*

(4) $$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots,$$

komponiert mit den Gliedern einer Reihe ($\overline{1}$) *der Klasse* $\overline{K}_\nu$, *diese in eine Reihe*

(5) $$\mu_1(b_1\cos x - a_1\sin x) + \ldots + \mu_n(b_n\cos nx - a_n\sin nx) + \ldots$$

überführe, welche zur Klasse K_ν *gehört?*

4. Die Lösung dieser Frage, wie die der vorigen, gründen wir auf die Lösung des folgenden dritten, auch an und für sich wichtigen Problems:

C. *Es sollen notwendige und zugleich hinreichende Bedingungen dafür angegeben werden, dass die Reihe* (1) *einer bestimmten der Klassen* K_ν *angehöre.*

---

[3]) Kurz *F.*-Reihe.

Das älteste Resultat in dieser Richtung ist den Herren *F. Riesz*[4]) und *E. Fischer*[5]) zu verdanken, die eine notwendige und hinreichende Bedingung entdeckt haben, unter welcher (1) die *F*.-Reihe einer (samt ihrem Quadrate) im *L*.-Sinne integrierbaren Funktion ist. Ihr diesbezüglicher Satz ist für uns um so bedeutungsvoller, da er zu einer Basis unserer Schlüsse bei Erledigung der letztgenannten Aufgabe diente[6]).

Die obigen zwei Fragestellungen A. und B. sind hingegen auf Herrn *W. H. Young* zurückzuführen, der selbst für die meisten der von uns betrachteten Reihenklassen solche hinreichende Bedingungen für die Faktoren der Klasseninvarianz, bzw. der Klassenkovarianz angegeben hat[7]), welche sich nach unseren Ergebnissen zugleich als notwendige erweisen werden. Ihm ist auch eine Lösung unseres dritten Problems C. für die Klassen K_2 und K_5 zu verdanken[8]) und zwar eine solche, durch welche für uns ein neuer, von dem seinigen verschiedener Weg zur Herleitung seiner obenerwähnten hinreichenden Bedingungen geöffnet wurde. Betreffs Einzelheiten sei auf das später Folgende hingewiesen.

Hier sei hervorgehoben, dass wir die *Young*schen Kriterien für das Angehören der trigonometrischen Reihe (1) zur Klasse K_2 und K_5 durch eine neue Methode gewinnen, die uns auch im Falle der Klassen K_3 und K_4 zum Ziele hilft.

5. So gelangen wir — nach den Erklärungen und Hilfssätzen des § 2 — im dritten Paragraphen zum folgenden Resultate:

---

[4]) *F. Riesz*, Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, Paris C. R. 18 mars 1907; Über orthogonale Funktionensysteme, Göttinger Nachrichten 1907, S. 116–122.

[5]) *E. Fischer*, Sur la convergence en moyenne, C. R. 13. mai 1907.

[6]) Derselbe Satz verhalf Herrn *Steinhaus* zur Bestimmung der Faktoren der Klasseninvarianz für die Klasse der *F*.-Reihen der samt ihren Quadraten in *L*.-Sinne integrierbaren Funktionen. Siehe: *H. Steinhaus*, Additive und stetige Funktionaloperationen, Math. Zeitschrift 5 (1919), S. 186—221; Satz 8. S. 213—214.

[7]) *W. H. Young*, On Fourier Series and Fonctions of Bounded Variation, Lond. Roy. Soc. Proc 88, (1913), S. 561—568

[8]) *W. H Young*, On a Condition that a Trigonometrical Series should have a Certain Form, Lond. Roy. Soc. Proc. 88 (1913), S. 569—574 Betreffs anderer Lösung des Problems für die Klasse K_5 vgl. *F. Riesz*, Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales, Ann. Éc. Norm. Sup. 28 (1911) S. 33—62.

Damit die trigonometrische Reihe (1) *der Klasse* K_ν ($\nu = 2$, 3, 4, 5) *angehören soll, ist notwendig und hinreichend, dass die Folge ihrer arithmetischen Mittel* $S_n(x) = \frac{s_0(x) + \ldots + s_n(x)}{n+1}$ — wobei $s_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$ — *dieselbe Eigenschaft* (Beschränktheit, bzw. Integrierbarkeit im *R.*-Sinne, Stetigkeit, Beschränktheit i. B. auf die Schwankung) *„in gleichem Masse" aufweisen soll, welche die Funktionsklasse* C_ν *charakterisiert.* (Vgl. Sätze I—IV).

Auf Grund dieses Ergebnisses — jedoch im Falle der Klassen K_1 und K_6[9]) noch durch Hinzuziehung eines *Steinhaus*schen Satzes[10]) — erhalten wir im § 4., als Beantwortung unserer Hauptfrage:

Damit die Reihe (3) *mit* (1) *zugleich zur Klasse* K_ν ($\nu = 1$, 2, . . ., 6) *gehöre, ist notwendig und hinreichend, dass die Sinusreihe* $\sum_1^\infty \frac{\lambda_n \sin nx}{n}$ *zur Klasse* K_5 (Klasse der F.-Reihen der Funktionen von beschränkter Schwankung) *gehöre.* (Vgl. die Sätze V., VI., VII.)

Durch nochmalige Anwendung der Resultate des dritten Paragraphen ergibt sich zuletzt im § 5. als Lösung der Frage betreffend die Faktoren der Klassenkovarianz der Satz:

Damit die Reihe (5) *mit* (1) *zugleich zur Klasse* K_2 *bzw.* K_3, K_4, K_5 *gehöre, ist notwendig und hinreichend, dass die Cosinusreihe* $\sum_1^\infty \frac{\mu_n \cos nx}{n}$ *zur Klasse* K_5 *gehöre.* (Satz VIII.)

§ 2.

Erklärungen und Hilfssätze.

1. Im vorliegenden Paragraphen werden wir zunächst einige Erklärungen von Begriffen angeben, mit deren Hilfe unsere Resultate sich in einfacherer und einheitlicherer Form aussprechen lassen. Sodann wird der Inhalt der von uns definierten Begriffe analysiert. So gelangen wir zu Hilfssätzen, durch welche die gemeinschaftliche Grundlage zur Erledigung der eingangs aufgeworfenen dreierlei Probleme geschaffen wird.

---

9) Die Notwendigkeit der unten folgenden *Young*schen hinreichenden Bedingung für die Faktoren der Klasseninvarianz der Klasse K_1 hat neuerdings Herr *S. Sidon direkt* ermittelt. (Vgl. *S. Sidon,* Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der *Fourier*schen Reihen, Math. Zeitschrift, 10 (1921), S. 121—127.)

10) Vgl. a. a. O. 6), Satz 6. S. 212—13

2. Es sei $f(x)$ eine für jedes x erklärte, nach 2π periodische Funktion der reellen Veränderlichen x. Wir sagen:

1° $f(x)$ heisse eine im Intervalle $(0, 2\pi)$ beschränkte, bzw. im Wesen beschränkte Funktion, wenn sie im Intervalle $(0, 2\pi)$ die *Bedingung (B) der Beschränktheit* überall, bzw. fast überall erfüllt, d. h. wenn es eine positive Konstante G gibt, so dass

$$(6) \qquad |f(\alpha)| \leq G,$$

falls α ein beliebiger Wert aus $(0, 2\pi)$ ist, bzw. zu einer bestimmten Teilmenge vom Masse 2π der Punktmenge $0 \leq x \leq 2\pi$ gehört.

2° $f(x)$ heisse eine im Intervalle $(0, 2\pi)$ nach *Riemann* integrierbare, bzw. im Wesen integrierbare Funktion, wenn sie in diesem Intervalle die *Bedingung (I) der Integrierbarkeit im R.-Sinne* überall, bzw. fast überall erfüllt, d. h. wenn zu jedem pos. ε ein $\delta > 0$ zu finden ist derart, dass

$$(7) \qquad \sum_{k=1}^{s} |f(\alpha_k) - f(\beta_k)| (x_k - x_{k-1}) \leq \varepsilon,$$

falls für die x_k die Beziehungen

$$(7^a) \qquad 0 \leq x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_s \leq 2\pi$$

$$(7^b) \qquad \operatorname{Max} \{ x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_s - x_{s-1} \} \leq \delta = \delta(\varepsilon)$$

bestehen, die α_k, β_k jedoch den Beziehungen

$$(7^c) \qquad x_{k-1} \leq \alpha_k < \beta_k \leq x_k$$

genügende, sonst beliebige Zahlen des Intervalls $(0, 2\pi)$, bzw. einer massgleichen Teilmenge $M_{2\pi}$ desselben sind.[11]

3° $f(x)$ heisse eine, im Intervalle $(0, 2\pi)$ stetige bzw. im Wesen stetige Funktion, wenn sie daselbst die *Bedingung (S) der Stetigkeit* überall, bzw. fast überall erfüllt, d. h. wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$(8) \qquad |f(\beta) - f(\alpha)| \leq \varepsilon, \quad (\beta > \alpha)$$

falls α, β solches Wertepaar aus dem Intervalle $(0, 2\pi)$ bzw. aus einer massgleichen Teilmenge $M_{2\pi}$ dieses Intervalls ist, für welches

$$(8^a) \qquad |\beta - \alpha| \leq \delta, \text{ oder } |\beta - \alpha + 2\pi| < \delta$$

besteht.

4° $f(x)$ heisse eine, im Intervalle $(0, 2\pi)$ i. B. auf die Schwankung beschränkte, bzw. im Wesen beschränkte Funktion, falls sie im Intervalle $(0, 2\pi)$ die *Bedingung (BS) der Beschränktheit i. B. auf die Schwankung* überall, bzw. fast überall erfüllt, d. h. wenn eine Konstante $H > 0$ existiert, so dass

[11]) Erfüllt $f(x)$ die Bedingung (I), so ist sie beschränkt.

(9) $$\sum_{k=1}^{s} |f(\alpha_{k-1}) - f(\alpha_k)| \leqq H,$$

falls die α_k den Bedingungen

(9ᵃ) $$\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k < \ldots < \alpha_s$$

genügende Zahlen des Intervalls $(0, 2\pi)$ oder einer massgleichen Teilmenge $M_{2\pi}$ desselben bedeutet.

3. Hilfssatz I. *Erfülle die Funktion $f(x)$ die Bedingung (B), bzw. (I), (S), (BS) im Intervalle $(0, 2\pi)$ fast überall. Dann existiert eine ihr aequivalente*[12]) *Funktion $f^*(x)$, welche dieselbe Bedingung in $(0, 2\pi)$ überall erfüllt*

Beweis. Sei $M_{2\pi}$ die Menge aller Punkte des Intervalls $(0, 2\pi)$, in welchen die Funktion $f(x)$ die Ungleichung (6), bzw. (7), (8), (9) erfüllende Werte annimmt, falls die Funktionenargumente (7ᶜ), bzw. (8ᵃ), (9ᵃ) befriedigen; die Menge der übrigen Punkte von $(0, 2\pi)$ heisse M_0. Wir definieren eine Funktion $f^*(x)$ auf die folgende Weise:

1) ist x ein Punkt aus $M_{2\pi}$, so bestehe $f^*(x) = f(x)$;

2) ist x ein Punkt aus M_0, so sei $f^*(x) = \limsup_{\nu \to \infty} f(t_\nu)$,

wobei $t_1, t_2, \ldots, t_\nu, \ldots$ irgendeine bestimmte Folge aus Punkten von $M_{2\pi}$ bedeutet, welche bei unendlich wachsendem ν gegen x konvergiert. Dann besitzt $f^*(x)$ die gewünschten Eigenschaften. Denn sind die in der Ungleichung (6), bzw. (7), (8), (9) auftretenden Punkte α, bzw. α_k, β_k; α, β; α_k sämtlich Punkte aus $M_{2\pi}$, so besteht diese Ungleichung für $f^*(x)$ nach 1); kommen aber unter diesen Punkten auch Punkte aus M_0 vor, so folgt das Bestehen der fraglichen Ungleichung nach 2); denn in einem derartigen Punkte x hat $f^*(x)$ einen solchen Wert, welcher als Limes von Werten dieser Funktion in Punkten aus $M_{2\pi}$ betrachtet werden kann.

4. Es sei

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

eine unendliche Folge, deren Glieder für jedes x erklärte, nach 2π periodische Funktionen des reellen Veränderlichen x sind. Wir erklären: die Folge heisse eine im Intervalle $(0, 2\pi)$ gleichmässig beschränkte, bzw. gleichmässig integrierbare, gleichmässig stetige, i. B. auf die Schwankung gleichmässig beschränkte Folge, wenn die Funktionen $f_n(x)$ die Bedingung *(B)*, bzw. *(I)*, *(S)*, *(BS)* in

---

[12]) D. h. eine Funktion, welche mit $f(x)$ mit eventueller Ausnahme von Punkten einer Menge vom Masse 0 übereinstimmt.

gleichem Masse erfüllen, d. h. wenn die in der Ungleichung (6), bzw. (7), (8), (9) rechts auftretende Grösse sich von n unabhängig auffinden lässt.

5. Hilfssatz II. *Erfüllen die trigonometrischen Polynome $P_n(x)$ mit dem gemeinsamen konstanten Gliede $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_n(t)\,dt$ im Intervalle $(0, 2\pi)$ die Bedingung (I), bzw. (S), bzw. (BS) in gleichem Masse, so erfüllen sie daselbst auch die Bedingung (B) in gleichem Masse.*

In der Tat, befriedigen die $P_n(x)$ voraussetzungsgemäss eine der genannten drei Bedingungen, so existiert leichtersichtlich eine Grösse $G > 0$ derart, dass für jedes $x > 0$, $< 2\pi$ und für jedes n

$$|P_n(0) - P_n(x)| \leqq G \tag{10}$$

besteht. Doch folgt aus der Identität

$$P_n(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_n(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (P_n(0) - P_n(t))\,dt$$

für jedes n die Beziehung

$$|P_n(0)| \leqq \left|\frac{a_0}{2}\right| + G,$$

also gilt nach (10) für jedes x und jedes n

$$|P_n(x)| \leqq \frac{|a_0|}{2} + 2G. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

6. Hilfssatz III. *Sei $f(x)$ eine für jedes x erklärte, nach 2π periodische Funktion der reellen Veränderlichen x, welche über das Intervall $(0, 2\pi)$ mindestens im L.-Sinne integrierbar ist. Ferner sei $\{P_n(x)\}$ eine Folge trigonometrischer Polynome, für welche die numerische Folge*

$$\int_0^{2\pi} |P_1(t)|\,dt, \quad \int_0^{2\pi} |P_2(t)|\,dt, \ldots, \quad \int_0^{2\pi} |P_n(t)|\,dt, \ldots \tag{11}$$

beschränkt ist. Man bilde die neue Folge trigonometrischer Polynome $\{Q_n(x)\}$, definiert durch die Gleichung

$$Q_n(x) = \int_0^{2\pi} f(t) \cdot P_n(t - x)\,dt,$$

oder aber — was wegen der Periodizität der Funktionen $f(x)$, $P_n(x)$ auf dasselbe hinausläuft — durch die Gleichung

$$(12) \qquad Q_n(x) = \int_0^{2\pi} f(t+x)\, P_n(t)\, dt.$$

Erfüllt die Funktion $f(x)$ im Intervalle $(0, 2\pi)$ die Bedingung (B), bzw. (I), (S), (BS) überall, so erfüllen daselbst die $Q_n(x)$ dieselbe Bedingung in gleichem Masse.

Beweis. Sei $f(x)$ zunächst eine, im Intervalle $(0, 2\pi)$ beschränkte Funktion. Dann gibt es — wegen der Periodizität von $f(x)$ — ein positives G, so dass $|f(t+x)| \leqq G$, wenn $0 \leqq t \leqq 2\pi$, $0 \leqq x \leqq 2\pi$. Diese Beziehung, vereint mit der Definitionsgleichung (12) ergibt unmittelbar, dass für jedes ganze n und für jedes $x \geqq 0$, $\leqq 2\pi$

$$|Q_n(x)| \leqq G \int_0^{2\pi} |P_n(t)|\, dt \leqq G\, I'$$

ist, wobei I' eine obere Schranke der Folge (11) bedeutet. Dann bilden aber die $Q_n(x)$ eine für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ gleichmässig beschränkte Folge. W. z. b. w.

Zweitens erfülle $f(x)$ die Bedingung *(I)* im Intervalle $(0, 2\pi)$. Dann gibt es — wegen der Periodizität von $f(x)$ — leichtersichtlich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein von t unabhängiges $\delta > 0$, so dass — wie auch t gewählt sei — die Ungleichung

$$(13) \qquad \sum_{k=1}^{s} |f(t+\alpha_k) - f(t+\beta_k)|\, [(t+x_k) - (t+x_{k-1})] \leqq \varepsilon$$

besteht, wenn nur die x_k, α_k, β_k die Beziehungen (7ª), (7ᵇ), (7ᶜ) befriedigen. Nun involviert (13), vereint mit (12), das Bestehen der Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{s} |Q_n(\alpha_k) - Q_n(\beta_k)|\, (x_k - x_{k-1}) \leqq$$
$$\leqq \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{1}^{s} |f(t+\alpha_k) - f(t+\beta_k)|\, (x_k - x_{k-1}) \right\} |P_n(t)|\, dt \leqq \varepsilon\, I',$$

wie auch n gewählt sei, also befriedigen die $Q_n(x)$ für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ die Bedingung *(I)* in gleichem Masse. W. z. b. w.

Drittens genüge $f(x)$ der Bedingung *(S)*. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(t+\beta) - f(t+\alpha)| \leqq \varepsilon, \text{ sobald } |\beta - \alpha| \leqq \delta.$$

Doch besteht nach (12)

$$|Q_n(\beta)-Q_n(\alpha)| \leqq \int_0^{2\pi} |f(t+\beta)-f(t+\alpha)|\,|P_n(t)|\,dt,$$

daher gilt — bei beliebiger Wahl des n —

$$|Q_n(\beta)-Q_n(\alpha)| \leqq \varepsilon\Gamma\,, \text{ falls } |\beta-\alpha| \leqq \delta,$$

also erfüllen die $Q_n(x)$ für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ die Bedingung *(S)* in gleichem Masse. W. z. b. w.

Zuletzt sei $f(x)$ eine nach 2π periodische Funktion, die im Intervalle $(0, 2\pi)$ von beschränkter Schwankung ist. Dann involvieren die Periodizität von $f(x)$ und die Erfüllung der Bedingung *(BS)* im Intervalle $(0, 2\pi)$ insgesamt die Existenz einer von t unabhängigen Zahl $K > 0$ von der Beschaffenheit, dass für jedes $t \geqq 0, \leqq 2\pi$

$$(14) \qquad \sum_{k=1}^{s} |f(t+\alpha_{k-1})-f(t+\alpha_k)| \leqq K$$

besteht, wenn nur die α_k den Beziehungen $0 \leqq \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_s \leqq 2\pi$ genügen. Nun besteht, zufolge der Definitionsgleichung (12) für iedes System der α_k und für jedes ganzes n die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{s} |Q_n(\alpha_{k-1})-Q_n(\alpha_k)| \leqq \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{s} |f(t+\alpha_{k-1})-f(t+\alpha_k)|\,|P_n(t)|\,dt,$$

also ist nach (14)

$$\sum_{k=1}^{s} |Q_n(\alpha_{k-1})-Q_n(\alpha_k)| \leqq K\Gamma, \quad \text{wenn } 0 \leqq \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_s \leqq 2\pi,$$

wie auch n gewählt sei. Dann erfüllen aber die $Q_n(x)$ für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ die Bedingung *(BS)* in gleichem Masse.[13])

Damit ist der Beweis des Hilfssatzes III. in allen Stücken dargetan.

7. Als ein Gegenstück des eben bewiesenen Hilfssatzes, gilt der folgende

Hilfssatz IV. *Sei* $\{P_n(x)\}$ *eine Folge trigonometrischer Polynome, für welche die Beziehung*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |P_n(t)|\,dt = \infty$$

gilt. Dann existiert eine für jedes x *erklärte, nach* 2π *periodische, überall stetige Funktion* $\psi(x)$ *derart, dass*

[13]) Die hier angewandte Schlussweise habe ich durch *F. Lukács* kennen gelernt, der nach seiner mündlichen Mitteilung mit Hilfe derselben den Satz bewies, dass die totale Schwankung der arithmetischen Mittel einer Reihe der Klasse K_b nicht grösser sein kann, als die der Funktion.

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \int_0^{2\pi} \psi(t) P_n(t)\, dt \right| = \infty$$

wird.[14])

§ 3.

Über die Bedingungen, unter welchen eine trigonometrische Reihe zur Klasse K_2, bzw. K_3, K_4, K_6 gehört.

1. Es sei

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos n x + b_n \sin n x + \ldots \tag{15}$$

eine trigonometrische Reihe. Die erste Frage, welche uns in diesem Paragraphen beschäftigen wird — ihre völlige Lösung findet sich bereits bei *Young* (A. a. O. [Vgl. [8])] S. 574) — ist die folgende:

Welche sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter welchen (15) zur Klasse K_2 gehört, d. h. die F.-Reihe einer, im Intervalle $(0, 2\pi)$ beschränkten, im *L.* Sinne integrierbaren Funktion ist?

Als Beantwortung beweisen wir den

Satz I. *Seien* $s_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos n x + b_n \sin n x \quad (n = 1, 2, \ldots)$ *die Partialsummen und*

$$S_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_n(x)}{n+1} = \tag{16}$$

$$= \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots +$$

$$+ (a_n \cos n x + b_n \sin n x)\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

die arithmetischen Mittel der Reihe (15). *Damit* (15) *zur Klasse K_2 gehöre, ist notwendig und hinreichend, dass die Folge* (16) *im Intervalle* $(0, 2\pi)$ *gleichmässig beschränkt sei.*

Die Notwendigkeit der eben ausgesprochenen Bedingung folgt aus bekannten Ergebnissen des Herrn *Fejér*. Gehört nämlich (15) zur Klasse K_2, so existiert eine im Intervalle $(0, 2\pi)$ beschränkte, im *L.*-Sinne integrierbare Funktion $f(x)$, so dass

[14]) Vgl. *A. Haar*, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. Dissertation (Göttingen, 1910 50 Seiten.) § 1. S. 9—14. S. auch *H. Lebesgue.* Sur la divergence et la convergence non-uniforme des séries de Fourier (C, R. de l'acad. des sciences, Paris 1905. II. sem. S. 875—77.)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt\, dt \ , \ (n = 0, 1, 2, \ldots) ;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt\, dt, \ (n = 1, 2, \ldots)$$

besteht. Dann haben aber die arithmetischen Mittel $S_n(x)$ nach *Fejérs* grundlegender Formel die folgende Gestalt:

$$(17) \qquad S_n(x) = \int_0^{2\pi} f(t+x)\, C_n(t)\, dt$$

wobei die Cosinuspolynome

$$C_n(x) = \frac{1}{(n+1)\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \cos x \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots + \cos nx \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)\pi} \left(\frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} \right)^2$$

die beiden Beziehungen

$$C_n(t) \geqq 0, \text{ wenn } 0 \leqq t \leqq 2\pi; \int_0^{2\pi} C_n(t)\, dt = 1$$

und folglich auch die dritte:

$$(18) \qquad \int_0^{2\pi} | C_n(t) |\, dt = 1$$

für jedes n befriedigen. Man kann also auf die Folge (16) den Hilfssatz III anwenden. Danach involviert aber die Beschränktheit von $f(x)$ im Intervalle $(0, 2\pi)$ die gleichmässige Beschränktheit der Folge (16) ebenda, wie es im Satze behauptet wurde.

Umgekehrt, erfüllen die arithmetischen Mittel $S_n(x)$ im Intervalle $(0, 2\pi)$ die Bedingung der Beschränktheit in gleichem Masse, so muss (15), zur Klasse K_2 gehören. In der Tat, gibt es eine positive Konstante G derart, dass für jedes ganzes n und jedes $x \geqq 0, \leqq 2\pi$ die Ungleichung

$$| S_n(x) | \leqq G$$

gilt, so besteht auch die Beziehung

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S_n(t)^2\, dt =$$

$$= \frac{a_0^2}{2} + (a_1^2 + b_1^2) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2 + \ldots + (a_n^2 + b_n^2) \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)^2 \leqq 2\, G^2$$

wie auch die positive ganzė Zahl n gewählt sei. Dann ist aber

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_1^\infty (a_n^2+b_n^2)$$

offenbar konvergent und deshalb existiert nach dem *Riesz—Fischer*schen Satze eine, im Intervalle $(0, 2\pi)$ (samt ihrem Quadrate) im *L.*-Sinne integrierbare Funktion $s(x)$, deren *F.*-Konstanten mit den Koeffizienten von (15) übereinstimmen. Folglich konvergieren nach einem Theorem von *Lebesgue* die arithmetischen Mittel bei unendlich wachsendem n gegen $s(x)$ in Punkten x des Intervalls $(0, 2\pi)$, welche insgesamt eine Menge $M_{2\pi}$ vom Masse 2π ausmachen, also ist die Funktion $s(x)$ im Intervalle $(0, 2\pi)$ im Wesen beschränkt. Dann gibt es aber nach dem Hilfssatze I. unter den ihr aequivalenten eine Funktion $f(x)$, welche die Bedingung der Beschränktheit im Intervalle $(0, 2\pi)$ überall erfüllt. Diese Funktion $f(x)$ gehört offenbar zur Klasse C_2, ihre *F.*-Entwicklung stimmt jedoch mit derselben von $s(x)$, d. h. mit der Reihe (15) überein, also gehört (15) zur Klasse K_2. W. z. b. w.

2. Nun stellen und lösen wir, einander parallel, die folgenden 3 Fragen:

Welche sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit die Reihe (15) 1° zur Klasse K_3, 2° zu K_4, 3° zu K_5 gehöre?

Diese Fragen werden durch die folgenden 3 Sätze beantwortet:

Satz II. *Die Reihe* (15) *bildet dann und nur dann die Fouriersche Entwicklung einer nach* 2π *periodischen, im Intervalle* $(0, 2\pi)$ *beschränkten und daselbst im R.-Sinne integrierbaren Funktion* $f(x)$, *wenn die Folge* (16) *ihrer arithmetischen Mittel daselbst gleichmässig integrierbar (im R. Sinne) ist.*

Satz III. *Die Reihe* (15) *bildet dann und nur dann die F.-Entwicklung einer nach* 2π *periodischen, für* $0 \leqq x \leqq 2\pi$ *stetigen Funktion* $f(x)$, *wenn die Folge* (16) *im Intervalle* $(0, 2\pi)$ *gleichmässig stetig ist.*

Satz IV. *Die Reihe* (15) *bildet dann und nur dann die F.-Entwicklung einer nach* 2π *periodischen Funktion* $f(x)$, *die im Intervalle* $(0, 2\pi)$ *von beschränkter Schwankung is, wenn die Folge* (16) *daselbst i. B. auf die Schwankung gleichmässig beschränkt ist.*[15])

Beweis der Sätze II—IV.

---

[15]) *Young*, a. a. O [Vgl. [8])] S. 572.

Ist (15) die *F.*-Reihe einer Funktion der Klasse C_3, bzw. C_4, C_5, also einer Funktion, die im Intervalle $(0, 2\pi)$ die Bedingung *(I)*, bzw. *(S)*, *(BS)* überall erfüllt, dann erfüllen daselbst die arithmetischen Mittel $S_n(x)$ nach Hilfssatz III. — mit Hinsicht auf (17) und (18) — dieselbe Bedingung in gleichem Masse, wie behauptet wurde.

Umgekehrt, erfüllen die $S_n(x)$ im Intervalle $(0, 2\pi)$ die Bedingung *(I)*, bzw. *(S)*, *(BS)* in gleichem Masse, so muss (29) zur Klasse K_3, bzw. K_4, K_5 gehören.

In der Tat, im ersten, wie auch im zweiten, bzw. dritten genannten Falle erfüllen die fraglichen arithmetischen Mittel nach Hilfssatz II. zugleich die Bedingung der Beschränktheit in gleichem Masse. Daraus kann aber — wie oben — die Existenz einer im *L.*-Sinne integrierbaren Funktion $s(x)$ gefolgert werden, deren *F.*-Reihe mit (15) übereinstimmt und welche die Grenzfunktion der Funktionsfolge (16) in einer massgleichen Teilmenge $M_{2\pi}$ des Intervalls $(0, 2\pi)$ ist. Als solche, erfüllt sie in diesem Intervalle offenbar diejenige Bedingung — d. h. die Bedingung *(I)*, oder *(S)* oder *(BS)* — fast überall, welche die Glieder der Folge (16) daselbst in gleichem Masse erfüllen. Zum völligen Beweise bedenke man noch, dass nach Hilfssatz I. immer eine Funktion $f(x)$ vorhanden ist, welche mit $s(x)$ aequivalent, also ebenfalls die Reihe (15) zur *F.*-Entwicklung hat und welche die Bedingung *(I)*, bzw. *(S)*, *(BS)* in $(0, 2\pi)$ überall erfüllt, falls $s(x)$ dieselbe ebenda fast überall befriedigt.[16])

§ 4.

Über die Faktoren der Klasseninvarianz.

1. In diesem Paragraphen wollen wir unsere Hauptfrage: die Frage nach der Charakteristik der Faktoren der Klasseninvarianz für jede der eingangs erklärten Klassen *Fourier*scher Reihen erledigen. Für alle diese 6 Klassen ist die Bedingung, welcher die Zahlenfolge $\{\lambda_n\}$ zu unterwerfen notwendig und hinreichend ist, damit samt (15) auch die Reihe

$$(19)\quad \frac{\lambda_0 a_0}{2}+\lambda_1(a_1\cos x+b_1\sin x)+\ldots+\lambda_n(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\ldots$$

[16]) Herr *F. Riesz* hat mich auf den prinzipiell wichtigen Umstand aufmerksam gemacht, dass der zweite Teil des eben vollendeten Beweises auch ohne Anwendung der Riesz—Fischerschen und Lebesgueschen Sätze, mit völliger Vermeidung des Lebesgueschen Integralbegriffs geführt werden kann.

zu einer und derselben der Klassen $K_1, \ldots, K_6$ gehöre, völlig identisch; jedoch ergibt unsere Beweismethode diese Bedingung unmittelbar nur für die Klassen K_2, K_3, K_4, K_5; für die Klassen K_1 und K_6 erhalten wir sie erst mittelbar, auf Grund eines im § 1. schon angeführten *Steinhaus*schen Satzes.

2 Zunächst behaupten wir:

B_1 Damit die Folge $\{\lambda_n\}$ die Eigenschaft habe, die $F.$-Reihe (15) irgendeiner zur Klasse C_ν $(\nu = 2, 3, 4, 5)$ gehörigen Funktion in die $F.$-Reihe (19) einer ebensolchen Funktion zu verwandeln, ist es notwendig, dass die Sinusreihe $\sum_1^\infty \frac{\lambda_n \sin n x}{n}$ die $F.$-Reihe einer Funktion von beschränkter Schwankung sei.

Da die Reihe $\sum \frac{\sin n x}{n}$ selbst zur Klasse K_6 gehört, so bedarf die Richtigkeit unserer Behauptung nur im Falle der Klassen K_2 K_3, K_4 eines Beweises. Dieser lässt sich nun so führen:

Gibt die Reihe (19) die $F.$-Entwicklung einer Funktion $f(x)$ mit der Periode 2π an, so gilt leichtersichtlich für das n-te arithmetische Mittel $T_n(x)$ der Reihe (19) die Darstellung

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t+x)\, L'_n(t)\, dt + \frac{a_0 \lambda_0}{2}, \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{20}$$

wobei $L_n(x)$ das n-te arithmetische Mittel der Reihe

$$\sum_1^\infty \frac{\lambda_n \sin n x}{n} \tag{21}$$

bedeutet. Denn nach Annahme gelten die Beziehungen

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos k\alpha\, d\alpha, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots);$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin k\alpha\, d\alpha, \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

daher ist

$$T_n(x) - \frac{a_0 \lambda_0}{2} = \lambda_1 (a_1 \cos x + b_1 \sin x)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots +$$
$$+ \lambda_n (a_n \cos n x + b_n \sin n x)\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \cos k(x-\alpha)\left(1-\frac{k}{n+1}\right)d\alpha=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,L'_n(x-\alpha)\,d\alpha,$$

woraus (20) sich durch die Substitution $\alpha=x+t$ wegen der Periodizität von $f(x)$ und $S_n(x)$ unmittelbar ergibt.

Nun folgt aus (20), dass die Folge $\{\lambda_n\}$ für keine der Klassen K_2, K_3 und K_4 eine Folge der Klasseninvarianz bildet, es sei denn, dass (21) zur Klasse K_5 gehört. Gibt es nämlich keine Funktion von beschränkter Schwankung, deren F.-Entwicklung mit (21) übereinstimmt, so können die arithmetischen Mittel $L_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ nach Satz IV keinesfalls eine solche Folge bilden, welche in $(0,2\pi)$ gleichmässig von beschränkter Schwankung ist. Mit anderen Worten: gehört (21) nicht zu K_5, so ist die Folge der Schwankungen

$$(22)\quad V_1=\int_0^{2\pi}|L_1'(t)|\,dt,\ V_2=\int_0^{2\pi}|L_2'(t)|\,dt,\ \ldots,\ V_n=\int_0^{2\pi}|L_n'(t)|\,dt,\ldots$$

nicht beschränkt. In diesem Falle lässt sich aber nach Hilfssatz IV eine überall stetige Funktion $f^*(x)$ finden, so dass für $f(x)=f^*(x)$ die Folge der arithmetischen Mittel $T_n(x)$, $(n=1,2,3,\ldots)$ im Punkte $x=0$ nicht beschränkt ist. Ist nämlich die numerische Folge (22) nicht beschränkt, so kann man aus ihr eine Teilfolge $V_{n_1}, V_{n_2}, \ldots, V_{n_\nu}, \ldots$ herausgreifen, deren Elemente bei $\nu\to\infty$ gegen ∞ divergieren. Dann befriedigen aber die Funktionen $\varphi_\nu(x)=L_{n_\nu}(x)$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes IV, also ist für $f^*(x)=\psi(x)$, $x=0$ die Folge der $T_n(x)$ nicht beschränkt. Dieser Umstand zeigt jedoch, dass die Folge $\{\lambda_n\}$ weder für K_4, noch für K_3 oder K_2 eine Folge der Faktoren der Klasseninvarianz ist, sonst würde sie nach Satz I die F.-Reihe der zur Klasse C_4, also zugleich zu C_3 und C_2 gehörigen Funktion $f^*(x)$ in eine Reihe (19) überführen, deren arithmetische Mittel in $(0, 2\pi)$ gleichmässig beschränkt sind.

Damit ist die Behauptung B_1 bewiesen.

3. Nunmehr wollen wir, als die Umkehrung von B_1, Folgendes beweisen:

B_2. Damit die Folge $\{\lambda_n\}$ die Eigenschaft habe, die F.-Reihe (15) irgendeiner der Klasse C_ν $(\nu=2, 3, 4, 5)$ angehörenden

Funktion $f(x)$ in die F.-Reihe einer ebensolchen Funktion zu verwandeln, ist es hinreichend,[17]) dass die Sinusreihe (21) die F.-Entwicklung einer Funktion von beschränkter Schwankung sei.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung einzusehen, bedenke man zunächst, dass das Angehören der Reihe (21) zur Klasse K_6 nach dem Satze IV die gleichmässige Beschränktheit ihrer arithmetischen Mittel $L_n(x)$ i. B. auf die Schwankung in $(0, 2\pi)$ nach sich zieht. Bleiben aber die Schwankungen (22) unter einer gemeinsamen Schranke, so erfüllen die Cosinuspolynome $L_n'(x)$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes III, betreffend die trigonometrischen Polynome $P_n(x)$, folglich gelten für die arithmetischen Mittel $T_n(x)$, mit Hinsicht auf ihre Darstellung durch die Formel (20) die Aussagen dieses Hilfssatzes betreffs der Polynome $Q_n(x)$. Also bilden die $T_n(x)$ eine Folge, die im Intervalle $(0, 2\pi)$ gleichmässig beschränkt, bzw. integrierbar, stetig, von beschränkter Schwankung ist, falls die Funktion $f(x)$ daselbst beschränkt, bzw. integrierbar, stetig, von beschränkter Schwankung ist. Doch gehört die Reihe (19) bei solchem Benehmen ihrer arithmetischen Mittel $T_n(x)$ nach den Sätzen I—IV zur Klasse K_2, bzw. K_3, K_4, K_5, wie behauptet wurde.

Die Behauptungen B_1 und B_2, in einem Satze zusammengefasst, können folgender Weise ausgesprochen werden:

Satz V. *Die Folge* $\{\lambda_n\}$ *bildet i. B. auf irgendeine der Reihenklassen* K_ν $(\nu = 2, 3, 4, 5)$ *dann*[18]) *und nur dann eine Folge von Faktoren der Klasseninvarianz, wenn die Sinusreihe* $\sum_1^\infty \frac{\lambda_n \sin nx}{n}$ *die F.-Entwicklung einer Funktion von beschränkter Schwankung darstellt.*

4. Nunmehr wollen wir die bisherigen Ergebnisse auf K_1 und K_6 ausbreiten. Das kann i. B. auf die erste Klasse mit Hilfe des folgenden, eingangs schon erwähnten *Steinhaus*schen Satzes geschehen:

Die Folge $\{\lambda_n\}$ verwandelt die Reihen (15) der Klasse K_1 dann und nur dann in Reihen (19) derselben Klasse, wenn sie jede Reihe (15) der Klasse K_2 in eine Reihe (19) dieser Klasse überführt.

Dieser Satz, vereint mit dem Satze V, ergibt die folgende Ergänzung des letzteren:

---

[17]) Vgl. *Young*, a. a. O.[7])

[18]) Für die Klasse K_4 hat dieses Ergebniss schon *Young* explicite angegeben; für K_2 und K_5 ist es implicite in seinen Resultaten enthalten.

Satz VI: *Die Folge* $\{\lambda_n\}$ *verwandelt die F.-Reihe einer im L-Sinne integrierbaren Funktion dann und nur dann in die F.-Reihe einer solchen Funktion, falls* $\sum_1^\infty \frac{\lambda_n \sin nx}{n}$ *die F.-Reihe einer Funktion von beschränkter Schwankung ist.*

5. Um endlich die Charakteristik der Folgen der Klasseninvarianz auch für K_6 zu gewinnen, bemerken wir zunächst folgendes: Ist

(23) $\alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \ldots + \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx + \ldots$

die F.-Reihe einer Funktion der Klasse C_1, d. h. einer für jedes x erklärten, nach 2π periodischen, im L.-Sinne integrierbaren Funktion, so ist die durch gliedweise Integration hergeleitete trigonometrische Reihe

(24) $\frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 \sin x - \beta_1 \cos x + \ldots + \frac{\alpha_n \sin nx - \beta_n \cos nx}{n} + \ldots$

die F.-Entwicklung einer Funktion der Klasse C_6, d. h. einer Funktion, die für jedes x erklärt, nach 2π periodisch ist und sich als das bestimmte Integral (im L.-Sinne) einer Funktion (von 0 bis x) darstellen lässt. Umgekehrt, gehört die Reihe (24) zur Klasse K_6, so ist (23) eine Reihe der Klasse K_1.

Aus dieser Bemerkung folgt: Die Folge $\{\lambda_n\}$ verwandelt die Reihen (15) der Klasse K_6 dann und nur dann in Reihen (19) derselben Klasse, wenn sie jede Reihe (15) der K_1 in eine Reihe (19) dieser Klasse überführt. Wären nämlich die λ_n Faktoren der Klasseninvarianz für K_1 ohne zugleich für K_6 solche Faktoren zu sein, dann müsste eine Reihe (15) in der letzteren Klasse existieren, derart, dass (19) nicht zur Klasse K_6 gehörte. In diesem Falle könnte jedoch — nach der obigen Bemerkung — die Reihe

$$\lambda_1 (b_1 \cos x - a_1 \sin x) + \lambda_2 (2 b_2 \cos 2x - 2 a_2 \sin x) + \ldots$$

nicht zu K_1 gehören, obzwar die Reihe

$$b_1 \cos x - a_1 \sin x + 2 b_2 \cos 2x - 2 a_2 \sin 2x + \ldots$$

— ebenfalls nach den oben Bemerkten — eine Reihe dieser Klasse ist, also würden die Faktoren λ_n, gegen Voraussetzung, nicht jede Reihe von K_1 in eine Reihe derselben Klasse überführen.

Ähnlich kann die Annahme widerlegt werden, dass eine Folge $\{\lambda_n\}$ existiert, deren Glieder für K_6 Faktoren der Klasseninvarianz sind, ohne zugleich für K_1 solche Faktoren zu sein. Diese Tatsache verknüpft mit dem Satze V, ergibt den

Satz VII. *Die Folge* $\{\lambda_n\}$ *verwandelt die Reihen der Klasse* K_6 *dann und nur dann in Reihen derselben Klasse, falls* $\sum_1^\infty \frac{\lambda_n \sin nx}{n}$ *die F.-Reihe einer Funktion von beschränkter Schwankung ist.*

§ 5.

Über die Faktoren der Klassenkovarianz.

1. In diesem Schlussparagraphen werden wir unsere Frage betreffend die Faktoren der Klassenkovarianz erledigen, d. h. die notwendigen und hinreichenden Bedingungen bestimmen, unter welchen eine Folge $\{\mu_n\}$ die Reihen

(25) $$b_1 \cos x - a_1 \sin x + b_2 \cos 2x - a_2 \sin 2x + \ldots$$

der Klasse $\overline{K}_\nu$ $(\nu = 2, 3, 4, 5)$ in Reihen

(26) $$\mu_1 (b_1 \cos x - a_1 \sin x) + \mu_2 (b_2 \cos 2x - a_2 \sin 2x) + \ldots$$

der Klasse K_ν verwandelt. Auf einem ganz ähnlichen Wege, wie beim Beweise des Satzes V, gelangen wir zur folgenden Lösung des angeführten Problems:

Satz VIII. *Die Folge* $\{\mu_n\}$ *bildet i. B. auf irgendeine der 4 Reihenklassen* K_ν $(\nu = 2, 3, 4, 5)$ *dann*[19]) *und nur dann eine Folge von Faktoren der Klassenkovarianz, wenn die Cosinusreihe* $\sum_1^\infty \frac{\mu_n \cos nx}{n}$ *die F.-Reihe einer Funktion von beschränkter Schwankung ist.*

2. Zur Begründung dieses Satzes nehmen wir zuerst an, dass die μ_n für irgendeine Klasse $\overline{K}_\nu$ Faktoren der Klassenkovarianz sind. Dann folgt die behauptete Eigenschaft der fraglichen Cosinusreihe auf die folgende Weise:

Ist $\nu = 5$, so gehört die Reihe $\sum_1^\infty \frac{\cos nx}{n}$ selbst zur Klasse $\overline{K}_\nu$, in diesem Falle bedarf also die Behauptung keines Beweises. In den drei übrigen Fällen ziehe man in Betracht, dass das n-te arithmetische Mittel der Reihe (26) leichtersichtlich in der Form

(27) $$U_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t + x)\, M'_n(t)\, dt, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

dargestellt werden kann, wobei $M_n(t)$ das n-te arithmetische Mittel der Reihe

(28) $$\sum_1^\infty \frac{\mu_n \cos nx}{n}$$

---

19) Vgl *Young* a. a. O. 7).

bedeutet, $f(x)$ aber diejenige Funktion (der Klasse C_2, C_3 oder C_4) angibt, deren F.-Entwicklung der Reihe (25) konjugiert ist.

Nun folgt aus (27), dass (28) bei unseren Annahmen die F.-Entwicklung einer Funktion der Klasse C_5 ist. Sonst würde nämlich nach Satz IV die Beziehung

$$\limsup_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} |M'_n(t)|\, dt = \infty$$

bestehen, folglich könnte man nach dem Hilfssatze IV eine für jedes x erklärte, nach 2π periodische, überall stetige Funktion $f^*(x)$ finden, so dass für $f(x) = f^*(x)$, $x = 0$, die Folge der arithmetischen Mittel $U_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nicht beschränkt, also (26) zu keiner der Klassen K_2, K_3, K_4 gehören würde, obzwar (25) jeder der Klassen $\overline{K_2}$, $\overline{K_3}$, $\overline{K_4}$ angehört. Dann wären aber die μ_n, gegen Annahme, nicht Faktoren der Klassenkovarianz weder für $\overline{K_2}$, noch für $\overline{K_3}$, $\overline{K_4}$. Damit ist die behauptete Eigenschaft der Reihe (28) bewiesen.

3. Jetzt nehmen wir umgekehrt an, dass (28) eine Funktion von beschränkter Schwankung darstellt. In diesem Falle ist die Folge

$$\int_0^{2\pi} |M'_1(t)|\, dt, \quad \int_0^{2\pi} |M'_2(t)|\, dt, \quad \ldots, \quad \int_0^{2\pi} |M'_n(t)|\, dt, \ \ldots$$

nach dem Satze IV beschränkt, also kann der Hilfssatz III, mit Hinsicht auf die Formel (27), auf die arithmetischen Mittel $U_n(x)$ der Reihe (26) angewendet werden. Daher ist die Folge $\{U_n(x)\}$ im Intervalle $(0, 2\pi)$ gleichmässig beschränkt, integrierbar, stetig, von beschränkter Schwankung, je nachdem die Funktion $f(x)$ daselbst überall beschränkt, integrierbar, stetig, von beschränkter Schwankung ist. D s ist aber nach den Sätzen I—IV gleichbedeutend mit der Behauptung, dass (26) zur Klasse K_2, K_3, K_4, K_5 gehört, je nachdem (25) eine Reihe von $\overline{K_2}$, $\overline{K_3}$, $\overline{K_4}$, $\overline{K_5}$ ist.

Damit ist unser Satz VIII in allen Stücken bewiesen.

Budapest, den 10. 12. 1922.