Über die Konvergenz von Funktionenfolgen.

Von ALFRED HAAR in Szeged.

Um die Theorie der Reihenentwicklungen auf eine möglichst allgemeine Grundlage zu stellen, habe ich in meiner Inauguraldissertation[1]) die linearen Funktionaloperationen in den Dienst dieser Theorie herangezogen. Möge es sich nämlich um die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Funktionen eines orthogonalen Funktionensystems oder nach noch allgemeineren Funktionen handeln, wie es in der Theorie von Herrn *Lebesgue* über singuläre Integrale der Fall ist, so kann man in ganz abstrakter Weise die formal gebildeten Reihen dadurch fassen, dass man eine distributive Zuordnung zu Grunde legt, die jeder Funktion $f(s)$ einer gewissen Funktionenklasse eine Folge von Funktionen

$$f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$$

zuordnet. Die Distributivität dieser Zuordnung drückt sich durch die Tatsache aus, dass, wenn zu der Funktion $f(s)$ die obige Funktionenfolge, zu der Funktion $g(s)$ aber die Folge: $g_1(s)$, $g_2(s), \ldots, g_n(s), \ldots$ zugeordnet ist, der Funktion $af(s)+bg(s)$, wo a und b beliebige Konstanten bedeuten, die Folge der Funktionen $af_n(s)+bg_n(s)$ entspricht.

Ich habe in meiner erwähnten Arbeit erkannt, dass aus der Tatsache, dass für gewisse Funktionen $f(s)$ diese Funktion der Limes der ihr zugeordneten Funktionenfolge ist, das Entsprechende für einen umfassenderen Bereich von Funktionen folgt, falls die zu Grunde gelegte Zuordnung eine bestimmte Eigenschaft aufweist. So bewies ich,[2]) dass falls die Zuordnung so beschaffen ist, dass eine Konstante M existiert, so dass für jedes in Betracht

[1]) „Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme" Göttingen 1909; erschienen in den Math. Annalen, Bd. 69. S. 331—371.

[2]) l. c. p. 349—351.

kommende $f(s)$, für alle n und s die Funktionen $|f_n(s)|$ stets kleiner als $M.\, max\,|f(s)|$ sind, so kann aus dem Bestehen der Limesgleichung

$$\lim_{n\,.\,\infty} f_n(s) = f(s) \qquad (1)$$

für gewisse $f(s)$, das Bestehen derselben Gleichung für jede solche Funktion gefolgert werden, die gleichmässig durch jene $f(s)$ (für die die obige Gleichung gilt) beliebig genau approximierbar ist. Mit anderen Worten, die Gesamtheit der Funktionen $f(s)$, für die (1) richtig ist, ist eine abgeschlossene in dem Sinne, dass sie alle Funktionen enthält, die sich als gleichmässiger Limes einer Funktionenfolge, deren Funktionen ihr angehören, ergeben. So kann z. B. — falls die Zuordnung die erwähnte Eigenschaft besitzt — aus der Tatsache, dass (1) für alle Polynome besteht, dasselbe für alle stetige Funktionen geschlossen werden, wodurch die Frage der Entwickelbarkeit einer stetigen Funktion auf die, von viel einfacheren Funktionen zurückgeführt wird, und die Theorie der gleichmässigen Approximation in den Dienst der Theorie der Reihenentwicklungen gestellt wird.

Diese Untersuchungen gestatten aber schwerlich die Entwickelbarkeit von unstetigen Funktionen anzugreifen. Dies ist eben der Zweck der vorliegenden Arbeit, in der ich eine Eigenschaft der Zuordnung angeben werde, auf Grund deren man z. B. aus dem Umstande, dass die Limesgleichung (1) etwa für jedes Polynom richtig ist, schliessen kann, dass diese für alle beschränkten Funktionen richtig bleibt mit etwaiger Ausnahme einer Punktmenge vom Masse Null. Damit gewinnt man einen Satz, der in diesem Gedankenkreis auf die Entwickelbarkeit der allgemeinen beschränkten Funktionen schliessen lässt. Die erhaltenen Kriterien stehen in enger Berührung mit der wichtigen Theorie von Herrn *Lebesgue* über singuläre Integrale [3])

Die Methode, die ich dabei benutze, ist eine Weiterentwicklung des Begriffes der mittleren Konvergenz (convergence en moyenne), die Herr *E. Fischer* eingeführt hat und den Mittelpunkt seiner schönen Untersuchungen über orthogonale Funktionen bildet.[4]) Nach Herrn *Fischer* heisst bekanntlich eine Funktionenfolge

---

[3]) *H. Lebesgue:* Sur les intégrales singulières, Annales de Toulouse 3. S., I. p. 25—117.

[4]) *E. Fischer:* Sur la convergence en moyenne. Comptes Rendus. 13 mai 1907.

$f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$ im Mittel gegen die Funktion $f(s)$ konvergent, wenn die Integrale

$$\int (f(s)-f_n(s))^2\, ds$$

(genommen über den Definitionsbereich der Funktionen) mit wachsendem n gegen Null streben. Dieser Begriff wurde von Herrn *F. Riesz* verallgemeinert[5]), indem er die vorgelegte Funktionenfolge $f_n(s)$ im Bezug auf den Exponenten p gegen $f(s)$ „stark" konvergent nennt, wenn

$$\lim_{n=\infty} \int (f(s)-f_n(s))^p\, ds = 0. \qquad (p > 1)$$

Ich führe nun den folgenden Begriff ein, der als eine natürliche Verallgemeinerung dieser „mittleren" Konvergenz zu betrachten ist.

Es sei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ eine nicht abnehmende Folge positiver Zahlen. Die in der abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{M}$ (vom positiven Mass) definierten Funktionen

$$f_n(s) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

heissen in dieser Punktmenge in Bezug auf das Exponentensystem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ im Mittel gegen die Funktion $f(s)$ konvergent, wenn

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \int_{(\mathfrak{M})} (f(s)-f_n(s))^{\lambda_n}\, ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} = 0$$

ist. Sind alle Exponenten gleich p, so ergeben sich die früheren Begriffsbildungen; in diesen Fällen folgt — wie bekannt — keineswegs, dass die Folge $f_n(s)$ im gewöhnlichen Sinne gegen $f(s)$ konvergiert; ja man kann mit Leichtigkeit Beispiele konstruieren, wo dies an keiner Stelle der Fall ist. Wenn aber die Exponentenreihe der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, über alle Grenzen wächst und zwar so, dass die Grössen

$$\frac{\log n}{\lambda_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

unterhalb einer von n unabhängigen oberen Grenze bleiben, so kann man — wie in § 1 gezeigt wird — aus der Konvergenz im Mittel in Bezug auf ein solches Exponentensystem schliessen dass für fast alle s in $\mathfrak{M}$

$$\lim_{n=\infty} f_n(s) = f(s)$$

ist.

---

[5]) *F. Riesz:* Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. Math. Annalen Bd. 69. S. 449—497.

Auf Grund dieses Hilfssatzes leite ich in § 2 einen Satz über die Konvergenz von Funktionenfolgen ab, der für die Entwickelbarkeit von allgemeinen beschränkten Funktionen ungefähr ebensoviel aussagt, wie der oben erwähnte Satz meiner Dissertation für die stetigen Funktionen. An Stelle der gleichmässigen Konvergenz tritt die hier entwickelte mittlere Konvergenz, wodurch man Aussagen über Entwickelbarkeit solcher Funktionen gewinnt, die in diesem Sinne durch die einfachsten Funktionen beliebig genau approximierbar sind.

§ 1. Ein Hilfssatz.

Es sei $\mathfrak{M}$ *eine abgeschlossene Punktmenge vom positiven Mass; die in dieser Punktmenge definierten Funktionen*

$$F_1(s), F_2(s), \ldots, F_n(s), \ldots$$

mögen so beschaffen sein, dass das Integral

$$\int_{(\mathfrak{M})} | F_n(s) |^n \, ds$$

im Lebesgue'schen Sinne existiert und die Zahlenfolge

$$\delta_n = \left\{ \int_{(\mathfrak{M})} | F_n(s) |^n \, ds \right\}^{\frac{1}{n}}$$

mit wachsendem n gegen Null strebt. Unter diesen Bedingungen konvergiert die zu Grunde gelegte Funktionenfolge fast überall gegen Null, d. h. es gilt die Limesgleichung

$$\lim_{n \to \infty} F_n(s) = 0$$

für jede Stelle s in $\mathfrak{M}$ *mit etwaiger Ausnahme einer Punktmenge vom Masse Null.*

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir irgendeine positive Zahl ε und bezeichnen mit $\mathfrak{m}_n(\varepsilon)$ diejenige Teilmenge von $\mathfrak{M}$ in der

$$| F_n(s) | \geqq \varepsilon$$

ist; sei $m_n(\varepsilon)$ das Mass dieser Punktmenge. Dann ist

$$\delta_n^n = \int_{(\mathfrak{M})} | F_n(s) |^n \, ds \geqq m_n(\varepsilon)\, \varepsilon^n$$

und daher

$$\sqrt[n]{m_n(\varepsilon)} \leqq \frac{\delta_n}{\varepsilon}$$

Auf Grund unserer Annahme über die Zahlenfolge δ_n folgt aus dieser Ungleichung

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{m_n(\varepsilon)} = 0,$$

und daraus die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$m_1(\varepsilon) + m_2(\varepsilon) + \ldots + m_n(\varepsilon) + \ldots$$

Der N-te Rest dieser Reihe

$$m_N(\varepsilon) + m_{N+1}(\varepsilon) + m_{N+2}(\varepsilon) + \ldots$$

wird daher für hinreichend grosse Werte von N kleiner als irgendeine positive Grösse η. Mit anderen Worten, die Vereinigungsmenge der Mengen

$$\mathfrak{m}_N(\varepsilon),\ \mathfrak{m}_{N+1}(\varepsilon),\ \mathfrak{m}_{N+2}(\varepsilon), \ldots$$

hat für hinreichend grosse Werte des Zeigers N ein beliebig kleines Mass. Dies bedeutet aber, dass jede Funktion der Folge

$$|F_N(s)|,\ |F_{N+1}(s)|,\ |F_{N+2}(s)|, \ldots$$

mit Ausnahme dieser Vereinigungsmenge, deren Mass η nicht überschreitet, kleiner als ε ausfällt; daraus folgt, dass der limes superior der Funktionenfolge

$$|F_1(s)|,\ |F_2(s)|, \ldots,\ |F_n(s)|, \ldots$$

jedenfalls kleiner als ε ist, mit etwaiger Ausnahme einer Punktmenge, deren Mass η nicht übersteigt. Da η beliebig klein angenommen werden kann, so ergiebt sich daraus das Resultat, dass

$$\limsup_{n=\infty}.\ |F_n(s)|$$

mit Ausnahme einer Punktmenge vom Masse Null kleiner als ε ausfällt bei jeder Wahl der positiven Zahl ε. Es sei nun $\mathfrak{m}(\varepsilon)$ diejenige Punktmenge (vom Masse Null) in der

$$\limsup_{n=\infty}.\ |F_n(s)| \geqq \varepsilon$$

ist, und $\mathfrak{m}$ die Vereinigungsmenge der Mengen

$$\mathfrak{m}\left(\tfrac{1}{2}\right),\ \mathfrak{m}\left(\tfrac{1}{3}\right),\ \mathfrak{m}\left(\tfrac{1}{4}\right), \ldots,\ \mathfrak{m}\left(\tfrac{1}{n}\right), \ldots$$

Das Mass dieser Menge $\mathfrak{m}$ — als Vereinigungsmenge von abzählbar vielen Nullmengen — ist jedenfalls gleich Null; ausserhalb dieser Menge kann aber $\limsup_{n=\infty}. |F_n(s)|$ nicht von Null verschieden sein, da $\mathfrak{m}$ alle Stellen enthält in denen dieser limes superior grösser als $\frac{1}{n}$ ist, wobei n irgendeine positive ganze Zahl bedeutet. D. h. die zu Grunde gelegte Funktionenfolge konvergiert an jeder Stelle, die ausserhalb der Punktmenge $\mathfrak{m}$ (vom Masse Null) gelegen ist, gegen Null, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Der Gedanke, der diesem Satze zu Grunde liegt, ist eine sinngemässe Übertragung auf Funktionenfolgen eines Verfahrens, der nach *Bernoulli* benannt zur Bestimmung des Maximums einer Funktion dient. Bekanntlich konvergiert, wenn $f(s)$ irgendeine Funktion bedeutet, deren Potenzen integrierbar sind, die Zahlenfolge

$$\left\{ \int_{(\mathfrak{M})} |f(s)|^n \, ds \right\}^{\frac{1}{n}}$$

gegen das „wesentliche" Maximum der Funktion $|f(s)|$, d. h. gegen die kleinste Zahl M von der Beschaffenheit, dass diejenige Punktmenge, in der $|f(s)| > M$ ist, das Mass Null besitzt. Aus dieser Tatsache folgt unmittelbar, dass aus der Limesgleichung

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \int_{(\mathfrak{M})} |f(s)|^n \, ds \right\}^{\frac{1}{n}} = 0$$

für fast alle s

$$f(s) = 0$$

folgt. Unser Satz lehrt nun, wenn man in das n-te Glied der letzten Zahlenfolge $f(s)$ durch $F_n(s)$ ersetzt aus dem Bestehen der so erhaltenen Limesgleichung für die Grenzfunktion dieser Funktionenfolge $F_n(s)$ die entsprechende Tatsache gefolgert werden kann.

Unser Satz gestattet eine nicht uninteressante Verallgemeinerung, die die Tragweite des Resultates überblicken lässt.

Es sei

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

eine zunehmende Folge positiver Zahlen von der Beschaffenheit, dass die Grössen

$$\frac{\log n}{\lambda_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

unterhalb einer von n unabhängigen oberen Grenze C bleiben. Wenn die Funktionen $F_n(s)$ so beschaffen sind, dass die Grössen

$$\delta_n = \left\{ \int_{(\mathfrak{M})} | F_n(s) |^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}}$$

mit wachsendem n gegen Null konvergieren, so folgt wiederum für fast alle s

$$\lim_{n=\infty} F_n(s) = 0.$$

In der Tat, man erkennt — genau wie oben — wenn man wiederum mit $\mathfrak{m}_n(\varepsilon)$ diejenige Punktmenge bezeichnet, in der

$| F_n(s) | \geqq \varepsilon$ ist und mit $m_n(\varepsilon)$ das Mass dieser Punktmenge, dass

$$\delta_n^{\lambda_n} = \int_{(\mathfrak{M})} | F_n(s) |^{\lambda_n} ds \geqq m_n(\varepsilon) \varepsilon^{\lambda_n},$$

also

$$m_n(\varepsilon) \leqq \left(\frac{\delta_n}{\varepsilon} \right)^{\lambda_n}.$$

Wählen wir den Zeiger n so gross, dass die Ungleichung

$$\delta_n \leqq \varepsilon e^{-2C}$$

statthabe, so ist für solche n

$$m_n(\varepsilon) \leqq e^{-2C\lambda_n}$$

also, — wegen unserer Annahme $\log n \leqq C \lambda_n$ —

$$m_n(\varepsilon) < e^{-2\log n} = \frac{1}{n^2}.$$

Daraus folgt wiederum die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$m_1(\varepsilon) + m_2(\varepsilon) + \ldots + m_n(\varepsilon) + \ldots$$

und daraus — wörtlich wie oben — die Tatsache, dass die Funktionenfolge $F_n(s)$ fast überall gegen Null konvergiert.

In der Terminologie, die wir in der Einleitung eingeführt haben, können wir unser Resultat folgendermassen formulieren:

Wenn die Funktionenfolge

$$F_1(s), F_2(s), \ldots, F_n(s), \ldots$$

in Bezug auf das Exponentensystem

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots,$$

das die Bedingung

$$\left| \frac{\log n}{\lambda_n} \right| < C \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

erfüllt, (wobei C eine von n unabhängige Zahl bedeutet) *in der Punktmenge* $\mathfrak{M}$ *im Mittel gegen eine Funktion* $F(s)$ *konvergiert, so gilt für alle Stellen im* $\mathfrak{M}$, *mit etwaiger Ausnahme einer Nullmenge die Limesgleichung*

$$\lim_{n=\infty} F_n(s) = F(s).$$

N cht uninteressant ist die Tatsache, dass der soeben bewiesene Satz nicht mehr richtig bleibt, wenn die Exponenten λ_n so beschaffen sind, dass die Grössen $\frac{\log n}{\lambda_n}$ über alle Grenzen wachsen.

Um dies darzulegen, nehmen wir

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = \infty$$

an und konstruieren eine Folge von Funktionen $F_n(s)$, die auf der Peripherie eines Kreises (K) definiert sind, an keiner Stelle gegen Null konvergieren und so beschaffen sind, dass

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \int_{(K)} |F_n(s)|^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} = 0$$

ist. Zu diesem Ende verfahren wir, wie folgt:

$F_1(s)$ sei auf der gesamten Kreisperipherie, deren Länge wir der Einfachheit halber gleich 1 annehmen, gleich 1; $F_2(s)$ sei auf einem Halbbogen (K_2) gleich 1; auf dem anderen Halbbogen gleich 0. An den einen Endpunkt von K_2 legen wir einen Kreisbogen K_3 von der Länge $1/3$ an, der ganz ausserhalb von K_2 liegt; auf diesem Bogen sei $F_3(s)$ gleich 1, sonst überall gleich Null. An den Endpunkt von K_3 legen wir ausserhalb von K_3 einen Bogen K_4 von der Länge $1/4$ an; auf diesem sei $F_4(s)$ gleich 1, sonst überall gleich 0, und so fahren wir fort. Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe werden die Kreisbögen

$$K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n, \ldots,$$

von denen jeder am Endpunkt des vorangehenden beginnt und die n-te von der Länge $\frac{1}{n}$ ist, jeden Punkt des Kreises unendlich oft überdecken. Da $F_n(s)$ auf K_n gleich 1 ist (sonst überall gleich 0), so folgt, dass an jeder Stelle s des Kreisumfanges unendlichviele Funktionen unserer Folge den Wert 1 haben, d. h. die Folge konvergiert an keiner Stelle gegen Null. Andererseits ist

$$\left\{ \int_{(K)} |F_n(s)|^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} = \left\{ \int_{(K_n)} |F_n(s)|^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\lambda_n}} = e^{-\frac{\log n}{\lambda_n}},$$

und diese Grössen streben — zufolge unserer Annahme — in der Tat gegen Null.

Es soll noch besonders hervorgehoben werden, dass wir bei dem Beweise unseres Theorems nirgends die Voraussetzung gemacht haben, dass $\mathfrak{M}$ eine *lineare* Punktmenge ist. Satz und Beweis bleiben richtig, wenn $\mathfrak{M}$ eine mehrdimensionale abgeschlossene Punktmenge bedeutet, die auftretenden Funktionen folglich von mehreren Veränderlichen abhängen. Wir haben es vorgezogen statt den unabhängigen Veränderlichen, in den über die Punktmenge $\mathfrak{M}$ genommenen Integralen als Integrationsvariable die Veränderliche s einzuführen, die den allgemeinen Punkt der Menge $\mathfrak{M}$ bezeichnet; an dieser Bezeichnungsweise halten wir auch weiterhin fest.

§ 2. Ein Satz über die Konvergenz von Funktionenfolgen.

Auf Grund des vorangehenden Hilfssatzes kann man den Beweis eines Theorems erbringen, der die sinngemässe Verallgemeinerung eines Satzes ist, den ich in meiner Dissertation ausgesprochen habe.

Ich bewies in der genannten Arbeit den folgenden Satz:

Jeder Funktion $f(s)$ einer bestimmten Funktionenklasse möge eine Folge von Funktionen $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$ zugeordnet sein; in Zeichen

$$f(s) \sim f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$$

Diese Zuordnung besitze folgende Eigenschaften:

Ist

$$f(s) \sim f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$$

und

$$g(s) \sim g_1(s), g_2(s), \ldots, g_n(s), \ldots$$

so ist

$$f(s)+g(s) \sim f_1(s)+g_1(s), f_2(s)+g_2(s), \ldots, f_n(s)+g_n(s), \ldots$$

Es sei für jedes s stets $|f_p(s)|$ kleiner als die obere Grenze von $|f(s)|$ multipliziert mit einer Grösse M, die für alle Funktionen der Klasse dieselbe ist.

Wenn nun $f'(s), f''(s), \ldots f^{(n)}(s), \ldots$ eine Folge von Funktionen ist, die gleichmässig gegen die Funktion $f(s)$ konvergieren und wenn die zu $f^{(n)}(s)$ vermöge unserer Zuordnung zugeordneten Funktionenfolgen gleichmässig in s bezw. gegen $F^{(n)}(s)$ konvergieren, d. h. gleichmässig in s die Limesgleichungen bestehen

$$\lim_{p\,\cdot\,\infty} f_p^{(n)}(s) = F^{(n)}(s),$$

so konvergiert die zu $f(s)$ zugeordnete Funktionenfolge gleichmässig gegen eine Funktion $F(s)$ und es ist

$$\lim_{n\,\cdot\,\infty} F^{(n)}(s) = F(s).$$

Mit Hilfe dieses Satzes konnte ich verschiedene Probleme aus der Theorie der *Fourier*'schen und *Sturm-Liouville*'schen Reihen erledigen, insbesondere ein Summationsverfahren angeben, mit dessen Hilfe — in voller Analogie zu dem *Fejér*'schen Verfahren für *Fourier*'sche Reihen einer Veränderlichen — die *Fourier*'sche und *Sturm-Liouville*'sche Doppelreihe jeder stetigen Funktion zweier Variabler summierbar ist, ein Problem, das seither von verschiedenen Seiten behandelt worden ist.

Auf Grund des Hilfssatzes des vorangehenden Paragraphen beweise ich nun das folgende Theorem:

Jeder Funktion $f(s)$ einer bestimmten Funktionenklasse möge eine Folge von Funktionen $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$ zugeordnet sein. Diese Zuordnung besitze folgende Eigenschaften:

A) Wenn der Funktion $f(s)$ die Folge $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$ zugeordnet ist, der Funktion $g(s)$ aber die Folge $g_1(s), g_2(s), \ldots, g_n(s), \ldots$, so soll der Funktion $af(s) + bg(s)$, wo a und b beliebige Konstanten bedeuten, die Folge

$$af_1(s) + bg_1(s),\ af_2(s) + bg_2(s),\ \ldots,\ af_n(s) + bg_n(s),\ \ldots$$

zugeordnet sein.

B) Es existiert eine Folge von zunehmenden positiven Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ von der Beschaffenheit, dass die Grössen

$$\frac{\log n}{\lambda_n}$$

für jedes n unterhalb einer von n unabhängigen oberen Grenze bleiben und eine feste Zahl M, so dass für jede Funktion unserer Funktionenklasse und für alle Indizes n die Ungleichung

$$\left\{\int_{\mathfrak{M}} |f_n(s)|^{\lambda_n} ds\right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} \leqq M \left\{\int_{\mathfrak{M}} |f(s)|^{\lambda_n} ds\right\}^{\frac{1}{\lambda_n}}$$

richtig sei.

Wenn einerseits die Funktionen $f'(s), f''(s), \ldots, f^{(m)}(s), \ldots$ solche Funktionen unserer Klasse bedeuten, die in Bezug auf das Exponentensystem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$ in der Punktmenge $\mathfrak{M}$ im Mittel gegen eine Funktion $f(s)$ unserer Klasse konvergieren und wenn andererseits die zu jeder der betrachteten Funktionen $f^{(m)}(s)$ vermöge unserer Zuordnung zugeordneten Funktionen in Bezug auf das Exponentensystem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ im Mittel gegen diese Funktion konvergieren, so konvergiert die der Funktion $f(s)$ zugeordnete Funktionenfolge im Mittel (in Bezug auf $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$) *gegen $f(s)$; mit anderen Worten es folgt aus den Limesgleichungen*

$$\lim_{m=\infty} \left\{\int_{(\mathfrak{M})} |f(s) - f^{(m)}(s)|^{\lambda_m} ds\right\}^{\frac{1}{\lambda_m}} = 0$$

und

$$\lim_{n=\infty} \left\{\int_{(\mathfrak{M})} |f^{(m)}(s) - f_n^{(m)}(s)|^{\lambda_n} ds\right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} = 0, \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

die Limesgleichung

$$\lim_{n=\infty} \left\{\int_{(\mathfrak{M})} |f(s) - f_n(s)|^{\lambda_n} ds\right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} = 0,$$

d. h. es gilt mit etwaiger Ausnahme einer Nullmenge

$$\lim_{n \to \infty} f_n(s) = f(s).$$

Der soeben ausgesprochene Satz gilt a fortiori — diesem Umstand begegnen wir in den meisten Anwendungen — wenn die den Funktionen $f^{(m)}(s)$ zugeordneten Funktionenfolgen $f_n^{(m)}(s)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ gleichmässig gegen $f^{(m)}(s)$ konvergieren, denn aus der gleichmässigen Konvergenz folgt unmittelbar die Konvergenz im Mittel in Bezug auf jedes Exponentensystem.

Um unseren Satz zu beweisen, bestimmen wir zu jeder noch so kleinen positiven Zahl ε einen Index m derart, dass

$$\left\{ \int_{(\mathfrak{M})} \left| f(s) - f^{(m)}(s) \right|^{\lambda_m} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_m}} < \varepsilon$$

sei, was zufolge unserer Annahme über die Konvergenz der Funktionen im Mittel gegen $f(s)$ jedenfalls möglich ist. Alsdann ist — wegen der Eigenschaft $B)$ unserer Zuordnung — für jedes n

$$\left\{ \int_{(\mathfrak{M})} \left| f_n^{(m)}(s) - f_n(s) \right|^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} < M \varepsilon,$$

da — wegen $A)$ — der Funktion $f^{(m)}(s) - f(s)$ die Folge $f_n^{(m)}(s) - f_n(s)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ zugeordnet ist. Endlich bestimmen wir einen Index N derart, dass für alle $n > N$ die Ungleichung

$$\left\{ \int \left| f^{(m)}(s) - f_n^{(m)}(s) \right|^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} < \varepsilon$$

statthabe, was auf Grund unserer Annahme über die Konvergenz der Folge $f_n^{(m)}(s)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ im Mittel gegen $f^{(m)}(s)$ sicher möglich ist. Durch Addition der letzten drei Ungleichungen folgt unter Benutzung einer bekannten Ungleichung[6]) für hinreichend grosse n

$$\left\{ \int_{(\mathfrak{M})} \left| f(s) - f_n(s) \right|^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} =$$

$$= \left\{ \int_{(\mathfrak{M})} \left| (f(s) - f^{(m)}(s)) + (f^{(m)}(s) - f_n^{(m)}(s)) + (f_n^{(m)}(s) - f_n(s)) \right|^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}} \leqq$$

$$< (M + 2)\, \varepsilon$$

---

[6]) Es handelt sich um die für $p > 1$ gültige Ungleichung

$$\left\{ \int_{(\mathfrak{M})} \left(\varphi_1(s) + \varphi_2(s) \right)^p ds \right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \left\{ \int_{(\mathfrak{M})} \left(\varphi_1(s) \right)^p ds \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_{(\mathfrak{M})} \left(\varphi_2(s) \right)^p ds \right\}^{\frac{1}{p}}$$

die im wesentlichen auf Minkowski zurückgeht; vgl. auch *F. Riesz*. l. c. p. 456.

Daraus folgt aber, dass der Integralmittelwert

$$\left\{ \int_{(\mathfrak{M})} |f(s)-f_n(s)|^{\lambda_n} ds \right\}^{\frac{1}{\lambda_n}}$$

mit wachsendem n gegen Null strebt und auf Grund unseres Hilfssatzes, dass die Funktionen $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s), \ldots$, mit etwaiger Ausnahme einer Nullmenge überall gegen $f(s)$ konvergieren.

Bei den Anwendungen dieses Satzes hat man grösstenteils mit solchen Fällen zu tun, in denen die zu Grunde gelegte Funktionenklasse alle Funktionen umfasst, deren sämtliche positiven Potenzen im *Lebesgue*'schen Sinne integrierbar sind, oder wenigstens diejenigen Funktionen, deren absoluter Betrag unterhalb einer festen Grenze bleibt (die sog. beschränkten Funktionen). Wenn sodann die Zuordnung die Bedingungen unseres Satzes erfüllt und etwa jeder stetigen Funktion eine solche Funktionenfolge zuordnet, die in Bezug auf das fragliche Exponentensystem im Mittel gegen diese Funktion konvergiert, so gilt dieselbe Tatsache auch für jede beschränkte Funktion bez. für jede Funktion deren sämtliche Potenzen integrierbar sind. Man erkennt dies durch Heranziehung der bekannten Tatsache,[7]) dass man zu jeder solchen Funktion $f(s)$ und zu jedem positiven Exponenten p eine stetige Funktion $\varphi(s)$ derart bestimmen kann, dass das Integral

$$\left\{ \int_{(\mathfrak{M})} |f(s)-\varphi(s)|^{p} ds \right\}^{\frac{1}{p}} = \delta_p$$

beliebig klein ausfalle; setzt man $p = \lambda_m$, $\varphi(s) = f^{(m)}(s)$ und lässt δ_p gegen Null konvergieren, so gewinnt man damit eine Folge von stetigen Funktionen

$$f'(s), f''(s), \ldots, f^{(m)}(s), \ldots$$

die in Bezug auf das vorgelegte Exponentensystem im Mittel gegen $f(s)$ konvergieren, woraus auf Grund des Hauptsatzes dieses Paragraphen unsere Behauptung unmittelbar folgt.

---

[7]) Diese Tatsache wird in der Theorie der *Lebesgue*'schen Integrale häufig angewandt; einen einfachen Beweis findet man in der genannten Arbeit von *F. Riesz* (p. 459) wo $\varphi(s)$ als eine Funktion angenommen wird, die in einer endlichen Anzahl von Intervallen verschiedene Werte annimmt. Der Übergang von diesen streckenweise konstanten Funktionen zu den stetigen Funktionen ist unmittelbar klar. Übrigens kann die erwähnte Tatsache auch aus dem *Lusin*'schen Satze (Comptes Rendus, t. 154 (1912) p. 1688.) gefolgert werden, nach dem zu jeder messbaren Funktion $f(s)$ eine stetige Funktion konstruiert werden kann, die mit Ausnahme einer Punktmenge vom beliebig kleinen Mass mit $f(s)$ übereinstimmt.

Man erkennt auch, dass der Schluss richtig bleibt, sowie die vorgelegte Zuordnung so beschaffen ist, dass sie zu gewissen Funktionen $\varphi(s)$ eine solche Funktionenfolge zuordnet, die im Mittel (in Bezug auf $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m, \ldots$) gegen diese Funktion konvergiert, falls diese Funktionen $\varphi(s)$ die Eigenschaft besitzen, dass zu jeder in beliebig hoher Potenz integrierbaren Funktion $f(s)$ eine unter ihnen sich finden lässt, dass das Integral

$$\left\{ \int_{(\mathfrak{M})} |f(s) - \varphi(s)|^p \, ds \right\}^{\frac{1}{p}}$$

für irgend eine pos. Zahl p beliebig klein ausfalle. Alle Polynome, alle differenzierbare, oder alle streckenweise konstante-Funktionen erfüllen offenbar diese Bedingung ebenfalls.

Die in der vorliegenden Note bewiesenen Sätze sind in mannigfacher Weise anwendbar, insbesondere auf die Theorie der Entwicklungen einer willkürlichen Funktion nach den Funktionen eines orthogonalen Funktionensystems, sowie auf die etwas allgemeinere Theorie der singulären Integrale. Auf diese Anwendungen hoffe ich demnächst zurückkommen zu können.