Sur la représentation conforme de domaines variables.

Par TIBOR RADÓ à Szeged.

Soit Γ une courbe de Jordan simple et fermée dans le plan de la variable x, contenant le point $x=0$ à son intérieur. Il existe alors une fonction $f(z)$ de la variable z, effectuant une représentation conforme du domaine $|z|<1$ sur le domaine limité par cette courbe. Cette fonction est entièrement déterminée si l'on exige encore que $f(0)=0$, $f'(0)>0$. Elle est, comme on sait, continue sur la circonférence $|z|=1$, et elle la représente d'une manière continue et biunivoque sur la courbe Γ.

La courbe Γ étant fixée, soit $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n, \ldots$ une suite de courbes, toutes ces courbes renfermant le point $x=0$. Soient $f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z), \ldots$ les fonctions correspondantes, où $f_n(0)=0$, $f'_n(0)>0$. Il est à prévoir que la suite $f_n(z)$ convergera vers $f(z)$ dès qu'il y aura *convergence géométrique* des courbes Γ_n vers la courbe Γ. Il faudra, pour arriver à des résultats précis, donner un sens précis à l'expression *„convergence géométrique.“* C'est M. *Carathéodory* qui a approfondi le premier cette question.[1]) Dans ses recherches il a considéré des domaines simplement connexes tout à fait généraux et il a établi une condition nécessaire et suffisante pour que $f_n(z) \to f(z)$ *à l'intérieur* de la circonférence unité. En appliquant son théorème au cas spécial où ces domaines sont limités par des courbes de Jordan, on arrive à une condition suffisante très simple que nous allons formuler, parce que nous en ferons usage dans la suite.

[1]) *C. Carathéodory*, Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten, Math. Annalen 72. *Cf.* aussi: *L. Bieberbach*, Über einen Satz des Herrn Carathéodory, Göttinger Nachrichten 1913.

Supposons que pour les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n, \ldots ; \Gamma$ la condition suivante soit remplie :

(C) $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$ étant une suite de points quelconque telle que P_n est situé sur Γ_n, tous les points limites de cette suite sont situés sur Γ.

Comme toutes ces courbes contiennent le point $x = 0$ à leur intérieur, on voit immédiatement que tout ensemble fermé intérieur (extérieur) à Γ sera aussi intérieur (extérieur) à Γ_n dès que n est assez grand. Le domaine intérieur de Γ est par conséquent le *noyau (Kern)* des domaines limités par les courbes Γ_n, au sens que M. *Carathéodory* a donné à cette expression. Nous pouvons donc affirmer que *la condition (C) est suffisante pour que $f_n(z) \to f(z)$ à l'intérieur de la circonférence unité.*

Dans la note présente nous nous proposons l'étude de la convergence de la suite $f_n(z)$ *sur la circonférence même* du cercle $|z| \leq 1$. Nous allons établir une condition nécessaire et suffisante pour que $f_n(z)$ converge vers $f(z)$ uniformément dans le cercle unité, *circonférence comprise*. Comme l'indique M. *R. Courant*,[2]) M. *Carathéodory* a possédé un théorème analogue à celui que nous allons démontrer, mais il n'a rien publié à cet égard. C'est M. *R. Courant*[2]) qui a esquissé une première démonstration du théorème en question, dont il vient de compléter et de rectifier l'énoncé dans une note[3]) parue récemment. Je crois cependant qu'il n'est pas inutile de reprendre la question. La condition, comme nous la présenterons s'offrira immédiatement en cherchant des conditions nécessaires, et il s'agira seulement de montrer qu'elle est suffisante. Á cet effet, je me sers des méthodes que M. *E. Lindelöf*[4]) a développées pour étudier la représentation conforme à la frontière et qui s'appliquent sans plus au problème plus délicat que nous allons traiter.

---

[2]) *R. Courant,* Über eine Eigenschaft der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung, Göttinger Nachrichten 1914.

[3]) *R. Courant,* Bemerkung zu meiner Note „Über eine Eigenschaft der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung". Göttinger Nachrichten 1922, le 14 Juillet. — En Juin 1922 j'ai communiqué un extrait de la note présente à M. Courant.

[4]) *E. Lindelöf,* Sur un principe général de l'analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme, Acta Soc Scient. Fennicae, XLVI, 1915.

1. Pour arriver à la condition annoncée ci-dessus, désignons par M_n le maximum de $|f(z)-f_n(z)|$ pour $|z| \leq 1$. Comme la fonction $f(z)-f_n(z)$ atteint le maximum de son module pour $|z|=1$. nous avons pour M_n l'interprétation géométrique suivante:

En faisant parcourir au point z la circonférence $|z|=1$, les points $f(z)$ et $f_n(z)$ décriront respectivement les courbes Γ et Γ_n. On aura établi de la sorte une représentation biunivoque et continue de ces courbes l'une sur l'autre, et M_n sera le maximum de la distance de deux points correspondants. Considérons maintenant l'écart Δ_n de ces deux courbes comme il a été défini par M. *Fréchet*.[5]) On a évidemment $M_n \geqq \Delta_n$. Dire que la suite $f_n(z)$ converge uniformément vers $f(z)$, c'est dire que $M_n \to 0$. *Par conséquent* $\Delta_n \to 0$ *est une condition nécessaire pour la convergence uniforme* et nous allons établir que cette condition est aussi suffisante. Nous énonçons ce résultat dans le théorème suivant:

Théorème. *Soient* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n, \ldots; \Gamma$ *des courbes de Jordan simples et fermées dans le plan de la variable* x, *contenant le point* $x=0$ *à leur intérieur, et soient*

$f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z), \ldots; f(z) \qquad (f_n(0)=f(0)=0, f'_n(0)>0, f'(0)>0)$
les fonctions effectuant la représentation conforme du domaine $|z|<1$ *sur les domaines limités par ces courbes.*

Pour que la suite $f_n(z)$ *converge vers* $f(z)$ *uniformément dans le cercle unité, circonférence comprise, il faut et il suffit que l'écart (au sens de Fréchet) des courbes* Γ *et* Γ_n *converge vers zéro.*

Voilà la marche de la démonstration. Au no 2 nous ferons quelques remarques préliminaires, entre autres que la condition *(C)* énoncée plus haut est remplie si l'écart des courbes Γ et Γ_n converge vers zéro. Dès lors la convergence de la suite $f_n(z)$ vers $f(z)$ est assurée pour *l'intérieur* de la circonférence unité, comme il a été remarqué plus haut. Au no 3 nous établirons la continuité uniforme de la suite $f_n(z)$ sur la circonférence $|z|=1$. Ces points acquis, on achèvera la démonstration de la façon suivante:

---

[5]) *M. Fréchet*, Sur l'écart de deux courbes, American M S. Trans. VI. 1905. Voilà la définition de M. Fréchet: C et C' étant deux courbes de Jordan, considérons toutes les représentations biunivoques et continues de ces courbes l'une sur l'autre. Pour chacune de ces représentations il y a une plus grande distance de deux points correspondants. La limite inférieure de ces plus grandes distances est l'écart des deux courbes.

Soit comme plus haut $M_n = \max|f(z)-f_n(z)|$ pour $|z| = 1$. Il s'agit de démontrer que $M_n \to 0$. Supposons que ceci ne soit pas vrai; on pourra alors extraire de la suite $f_n(z)$, uniformément continue pour $|z|=1$, en vertu d'un théorème connu d'*Arzelà* une suite partielle $\overline{f_n}(z)$ uniformément convergente pour $|z| = 1$, pour laquelle on a $\overline{M_n} \geqq \delta > 0$. Il résulte alors du principe du module que cette suite converge aussi pour $|z| < 1$. Si nous désignons par $F(z)$ la fonction limite, on aura $F(z) = f(z)$ d'abord pour $|z| < 1$ en vertu du théorème de M. *Carathéodory*, par conséquent aussi pour $|z| = 1$, car les fonctions $F(z)$ et $f(z)$ sont continues dans le domaine fermé $|z| \leqq 1$. C'est dire que la suite $\overline{f_n}(z)$ converge uniformément vers $f(z)$ pour $|z| \leqq 1$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que $\overline{M_n}$ reste $\geqq \delta > 0$. On a donc bien $M_n \to 0$, c. qu. f. d

2. Pour simplifier les considérations suivantes nous énoncerons d'abord quelques définitions.

Soit σ un arc simple de Jordan, A et B les extrémités de cet arc, $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n, \dots$ une suite de tels arcs, A_n et B_n les extrémités de σ_n. Nous écrirons $\sigma_n \to \sigma$ si $A_n \to A$, $B_n \to B$ et si la condition suivante est satisfaite: $P_1, P_2, \dots P_n, \dots$ étant une suite de points quelconque, telle que P_n est situé sur σ_n, tous les points limites de cette suite sont situés sur σ.

Considérons maintenant les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots \Gamma_n, \dots; \Gamma$. Nous déterminons ces courbes par des équations $x = \lambda_n(z)$, $x = \lambda(z)$, où les fonctions λ sont définies et continues sur la circonférence $|z| = 1$ et la représentent d'une manière biunivoque et continue sur les courbes respectives. De la définition même de l'écart il résulte: si l'écart des courbes Γ_n et Γ converge vers zéro, il est possible de choisir les fonctions $\lambda_n(z)$ de sorte que $\lambda_n(z) \to \lambda(z)$ uniformément sur la circonférence unité. En partant de cette remarque, le lecteur démontrera sans peine les faits suivants.

Nous supposons donc que l'écart des courbes Γ et Γ_n converge vers zéro. Tout d'abord, la condition *(C)* de l'introduction sera vérifiée, c'est-à-dire: $P_1, P_2, \dots P_n, \dots$ étant une suite de points telle que P_n est situé sur Γ_n, tous les points limites de cette suite sont situés sur Γ.

Soient maintenant A_n, B_n deux suites de points, où A_n et B_n sont situés sur Γ_n. Supposons que ces suites convergent: $A_n \to A$,

$B_n \to B$. Les points A et B sont alors situés sur Γ. Désignons par σ, τ les arcs déterminés sur Γ par les points A et B, et soient σ_n, τ_n les arcs déterminés sur Γ_n par les points A_n et B_n. On voit sans peine qu'il est possible de choisir les notations de sorte que $\sigma_n \to \sigma$, $\tau_n \to \tau$.

Ce sont les faits topologiques dont nous aurons besoin dans la suite. Nous aurons encore à faire usage d'une inégalité appartenant à la théorie des fonctions et dûe à M. *E. Lindelöf.*[6]) Soit O le centre d'un cercle k, dont la circonférence sera désignée par la même lettre. Soit de plus Σ un domaine contenu dans k et contenant le point O. Nous admettrons en outre qu'on peut trouver sur la circonférence de k un arc de longueur $\frac{k}{\nu}$ (ν entier positif) complètement extérieur à Σ. Considérons maintenant une fonction $\Phi(z)$ régulière en Σ. Soit $|\Phi(z)| < M$, et sur la partie de la frontière de Σ intérieure à k soit $|\Phi(x)| < m$. Dans ces conditions, on aura au centre de k l'inégalité

$$|\Phi(O)|^\nu < M^{\nu-1}\, m.$$

3. Nous pouvons maintenant établir le point le plus essentiel du raisonnement exposé dans l'introduction : *la continuité uniforme* de la suite $f_n(z)$ sur la circonférence $|z| = 1$. Supposons que la suite ne soit pas uniformément continue. On pourra alors déterminer sur la circonférence $|z| = 1$ deux suites de points z'_n, z''_n, de sorte que pour une suite partielle[7]) de la suite $f_n(z)$ on ait

$$|f_n(z'_n) - f_n(z''_n)| \geqq \Delta > 0,$$

tandis que $|z'_n - z''_n| \to 0$. Nous allons voir que cela conduit à une contradiction. Les points $A'_n = f_n(z'_n)$, $A''_n = f_n(z''_n)$ sont situés sur Γ_n et on peut admettre que les suites A'_n, A''_n, z'_n, z''_n convergent:

$$A'_n \to A', \quad A''_n \to A'', \quad z'_n = z''_n \to$$

A' et A'' sont deux points distincts de la courbe limite Γ. Soient τ et σ les arcs déterminés sur Γ par les points A' et A'', et τ_n, σ_n les arcs déterminés sur Γ_n par les points A'_n et A''_n. Comme il a été remarqué au no 2, on pourra choisir les notations de sorte que $\tau_n \to \tau$, $\sigma_n \to \sigma$. Soient t_n, s_n les arcs de la circonférence unité qui correspondent à τ_n, σ_n par la fonction $f_n(z)$; ce

[6]) Cf. p. 7. du Mémoire cité sous [4]) de M. Lindelöf.

[7]) Nous désignerons toute suite partielle tirée de la suite $f_n(z)$ également par $f_n(z)$, pour ne pas compliquer les notations.

sont les arcs déterminés par les points z'_n, z''_n. Comme ces arcs convergent vers le même point ζ, on pourra extraire de l'une au moins des suites t_n, s_n une suite partielle convergeant vers ce point ζ. Nous pouvons donc admettre que p ex. $s_n \to \zeta$.

Désignons maintenant par $\varphi_n(x)$ la fonction inverse de $f_n(z)$ et posons $\psi_n(x) = \varphi_n(x) - \zeta$. Soit en outre M_n le maximum du module de $\psi_n(x)$ sur l'arc σ_n. De $s_n \to \zeta$ il vient $M_n \to 0$. On a de plus $|\psi_n(x)| \leqq |\varphi_n(x)| + |\zeta| \leqq 2$.

Nous choisissons maintenant sur l'arc σ de la courbe Γ un point P différent de ses extrémités. A cause de $\tau_n \to \tau$ il y a tout au plus un nombre fini d'arcs τ_n passant par le point P, nous pouvons donc admettre que cela n'a pas lieu du tout. Comme $\tau_n \to \tau$, nous pouvons tracer autour du point P un cercle K n'ayant de point commun avec aucun des arcs $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n, \ldots; \tau$. Désignons par ϱ le rayon de K. Soit O un point intérieur à la fois à K et à Γ et tel que la distance OP soit $\leqq \frac{\varrho}{10}$. Autour de ce point O nous traçons un second cercle k de rayon $\frac{\varrho}{5}$. Ce cercle k sera contenu dans K et contiendra le point P, qui est situé sur Γ. On pourra par suite déterminer sur la circonférence de k un arc l de longueur $\frac{k}{\nu}$ (ν entier positif) complètement extérieur à Γ.

Pour n assez grand, le point O sera intérieur et l'arc l extérieur à Γ_n. Considérons alors l'ensemble des points intérieurs à la fois à k et à Γ_n. Cet ensemble est constitué par un ou plusieurs domaines connexes; soit Σ_n celui de ces domaines qui contient le point O. La partie de la frontière de Σ_n intérieure à k provient de la courbe Γ_n et justement de l'arc σ_n de cette courbe, car l'arc τ_n est complètement extérieur à k. Sur cette partie de la frontière de Σ_n on a donc $|\psi_n(x)| \leqq M_n$, ailleurs $|\psi_n(x)| \leqq 2$, et sur k nous avons l'arc l de longueur $\frac{k}{\nu}$ extérieur à Σ_n. Nous avons donc en vertu de l'inégalité de M. *Lindelöf:*

$$|\psi_n(O)|^\nu \leqq 2^{\nu-1} M_n.$$

Par conséquent la suite $\psi_n(x)$ converge vers zéro au point O.

Ceci posé, soit π un petit cercle contenu à l'intérieur de Γ, et tel que pour tout point Q intérieur à π on ait $OQ < \frac{\varrho}{10}$; à l'intérieur de π la suite $\psi'_n(x)$ converge vers zéro. Soit de plus γ une courbe de Jordan intérieur à Γ et contenant . cercle π et le point $x = 0$ à son intérieur. Pour n assez grand, γ sera intérieur à Γ'_n. Dés lors la suite $\psi_n(x)$ est régulière et uniformément bornée ($|\psi'_n(x)| \leqq 2$) à l'intérieur de γ, et à l'intérieur de π cette suite converge vers zéro, comme nous venons de le voir. En vertu d'un théorème bien connu de *Stieltjes* cette suite convergerait vers zéro en tout point intérieur à γ. Or ceci n'a évidemment pas lieu pour le point $x = 0$, car $|\psi'_n(0)| = |\varphi_n(0) - \zeta| = |\zeta| = 1$. Voilà la contradiction annoncée.