Einige Sätze über Kegelschnitte.

Von L. KLUG in Budapest.

In seinen Beiträgen zur Geometrie der Lage gibt *v. Staudt* in No. 389 einen forcierten Beweis des Satzes No. 3 dieser Note. *Th. Reye* hält in seiner Geometrie der Lage (I. Abt. V. Aufl. 1909. p. 235) den Beweis dieses Satzes für „recht schwierig" und unterdrückt ihn.

Ich will nun hier einen leicht überblickbaren Beweis des Satzes geben, indem ich mich auf folgende zwei Hilfssätze stütze:

1. *Schreibt man von zwei perspektiven Dreiecken derselben Ebene dem ersten einen Kegelschnitt ein, so treffen die aus den Eckpunkten des zweiten Dreieckes ausstrahlenden Tangentenpaare des Kegelschnitts die Gegenseiten der entsprechenden Eckpunkte des ersten Dreieckes in drei Punktpaaren, welche einem Kegelschnitt angehören.*

Beweis. Es seien ABC und $A'B'C'$ zwei perspektive Dreiecke derselben Ebene und $k^{(2)}$ ein dem ersten einbeschriebener Kegelschnitt, und die aus den Eckpunkten A', B' und C' ausstrahlenden Tangentenpaare desselben mögen bzw. die Seiten BC, CA und AB in den Punktpaaren A_1A_2, B_1B_2 und C_1C_2 treffen.

Da die Dreiecke $A'A_1A_2$, $B'B_1B_2$ dem Kegelschnitt $k^{(2)}$ umschrieben sind, so liegen ihre Eckpunkte auf einem Kegelschnitt $l^{(2)}$, und die Tangente BC von $k^{(2)}$ trifft daher $l^{(2)}$ in solchen zwei Punkten MN, dass sich die aus ihnen ausstrahlenden zweiten Tangenten von $k^{(2)}$ in einem Punkte L von $l^{(2)}$ treffen.

$k^{(2)}$ und $l^{(2)}$ sind Polarfiguren von einander in Bezug auf einen Kegelschnitt, von welchem $A'A_1A_2$ $B'B_1B_2$ und LMN Polardreiecke sind; also ist A', B' und L bzw. der Pol der Seiten $BC=A_1A_2$, $CA=B_1B_2$ und $AB=MN$, und somit liegen die Dreiecke ABC, $A'B'L$ perspektiv. Da aber der Annahme nach auch die Dreiecke

ABC, $A'B'C'$ perspektiv sind, so ist C' ein Punkt der Geraden CL, und mithin treffen die aus C, L und C' ausstrahlenden Tangenten von $k^{(2)}$ die Tangente AB von $k^{(2)}$ in zugeordneten Punktpaaren AB, MN und C_1C_2 einer Involution. Weil nun die Kegelschnitte des Büschels $(A_1A_2B_1B_2)$ die Seite AB in der nämlichen Involution treffen, so gehört C_1C_2 einem Kegelschnitt des Büschels an, und das wollten wir eben beweisen.

2. *Zwei Kegelschnitte $k'^{(2)}$, $k^{(2)}$ derselben Ebene können immer als Polarfiguren betrachtet werden in Bezug auf einen dritten Kegelschnitt $\pi^{(2)}$. Die aus den Punkten des ersten Kegelschnitts ausstrahlenden Tangenten des zweiten treffen ihre Polaren bezüglich des dritten Kegelschnitts in Punktpaaren, welche einem Kegelschnitt angehören.*

Beweis. Ist $A'B'C'$ ein dem Kegelschnitt $k'^{(2)}$ einbeschriebenes Dreieck, so ist seine Polarfigur abc bezüglich $\pi^{(2)}$ dem Kegelschnitt $k^{(2)}$ umschrieben und mit dem ersten Dreieck perspektiv, daher treffen nach Hilfssatz 1 die aus A', B' und C' ausstrahlenden Tangenten von $k^{(2)}$ ihre Polaren a, b und c bezüglich $\pi^{(2)}$ in drei Punktpaaren A_1A_2, B_1B_2 und C_1C_2 eines Kegelschnitts $\varkappa^{(2)}$

Der Pol D' der Tangente $d = C'C_2$ von $k^{(2)}$ bezüglich $\pi^{(2)}$ ist ein Treffpunkt von $c = C_1C_2$ und $k'^{(2)}$, und wenn die aus D' ausstrahlende zweite Tangente e von $k^{(2)}$ diese Polare $d = C'C_2$ im Punkte D_2 trifft, so liegen die Punktpaare A_1A_2, B_1B_2 und C_2D_2 ebenfalls auf einem Kegelschnitt nach 1. Dieser hat aber mit $\varkappa^{(2)}$ fünf Punkte gemein, somit fällt auch der Punkt D_2 auf $\varkappa^{(2)}$

Der Pol E' der Tangente $e = D'D_2$ von $k^{(2)}$ bezüglich $\pi^{(2)}$ ist der zweite Treffpunkt der Tangente $d = C'C_2D_2$ mit $k'^{(2)}$, und die aus E' ausstrahlende zweite Tangente f von $k^{(2)}$ trifft $e = D'D_2$ in einem Punkte E_2 des Kegelschnitts $\varkappa^{(2)}$. Denn die Polaren der Punkte A', B' und E' bezüglich $\pi^{(2)}$ treffen die aus jenen Punkten ausstrahlenden Tangenten von $k^{(2)}$ in den Punkten $A_1A_2B_1B_2D_2E_2$, von welchen die ersten fünf auf $\varkappa^{(2)}$ liegen, somit auch der sechste.

Ebenso ist der Pol F' der letzteren Tangente $f = E'E_2$ von $k^{(2)}$, der zweite Treffpunkt von $e = D'D_2E_2$ mit $k'^{(2)}$ und die aus F' ausstrahlende zweite Tangente g von $k^{(2)}$ trifft $f = E'E_2$ in einem Punkte $F^{(2)}$ des Kegelschnitts $\varkappa^{(2)}$ Schliesslich ist der Pol G' der letzteren Tangente $g = F'F_2$ von $k^{(2)}$ der zweite Treffpunkt von $f = E'E_2F_2$ und $k'^{(2)}$, und die aus G' ausstrahlende zweite Tangente h von $k^{(2)}$ trifft $g = F'F_2$ in einem Punkte G_2 von $\varkappa^{(2)}$

Daraus ersehen wir, dass die aus den Punkten A', B', C', E' und G' von $k'^{(2)}$ ausstrahlenden Tangentenpaare des Kegelschnitts $k^{(2)}$ ihre Polaren a, b, c, e und g bezüglich $\pi^{(2)}$, die Tangenten von $k^{(2)}$ sind, in den Punktpaaren A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_2E_2 und F_2G_2 treffen, welche auf dem Kegelschnitt $\varkappa^{(2)}$ liegen. Dieser ist aber durch die drei letzteren Punktpaare schon bestimmt und unabhängig von den zwei ersteren, also auch von den Punkten A', B'. Hätten wir also anstatt A', B' zwei andere Punkte X', Y' auf $k'^{(2)}$ angenommen, so wäre xyr die Polarfigur des Dreieckes $X'Y'C'$, und wir hätten aus diesem in derselben Weise die Punkte $C_1C_2D_2E_2F_2G_2$ abgeleitet, welche den Kegelschnitt $\varkappa^{(2)}$ bestimmten. Da nun die aus den zwei beliebigen Punkten $X'Y'$ von $k'^{(2)}$ ausstrahlenden Tangentenpaare von $k^{(2)}$, ihre Polaren xy bezüglich $\pi^{(2)}$ ebenfalls in zwei Punktpaaren von $\varkappa^{(2)}$ treffen — so ist der Satz bewiesen.

3. *Sind $k^{(2)}$ und $k_1^{(2)}$ zwei Kegelschnitte derselben Ebene, so ist der Ort der Punkte, aus welchen die zu $k^{(2)}$ und $k_1^{(2)}$ ausstrahlenden Tangentenpaare einander harmonisch trennen, ein Kegelschnitt.*

Beweis. Ist A' der Pol einer Tangente a von $k^{(2)}$ bezüglich $k_1^{(2)}$ und treffen die aus A' ausstrahlenden Tangenten des Kegelschnitts $k^{(2)}$ die Tangente a in den Punkten A_1A_2, so sind diese schon Punkte des gesuchten Ortes. Denn es sind z. B. die Tangenten A_1A' und $a = A_1A_2$ von $k^{(2)}$ konjugierte Polaren von $k_1^{(2)}$ und werden daher von den aus A_1 ausstrahlenden Tangenten dieses Kegelschnitts harmonisch getrennt.

Nun ist der Ort der Punkte A' der Polarkegelschnitt $k'^{(2)}$ von $k^{(2)}$ bezüglich $k_1^{(2)}$, daher ist der Ort der Punkte A_1A_2 nach Hilfssatz 2 ein Kegelschnitt $\varkappa^{(2)}$.

Die Umkehrung des Satzes No. 2 können wir so aussprechen:

Liegen zwei Eckpunkte der einem Kegelschnitt ($k^{(2)}$) umschriebenen veränderlichen Dreiecke ($A'A_1A_2$) auf einem Kegelschnitt ($\varkappa^{(2)}$), so liegt der dritte Eckpunkt ebenfalls auf einem Kegelschnitt ($k'^{(2)}$).

In derselben Weise, wie die Punkte des im Satze No. 3 erklärten Ortes, können auch die Strahlen gefunden werden, welche die Eigenschaft haben, dass die aus ihnen zu zwei Flächen II. O. geführten Berührungsebenen einander harmonisch trennen.

Sind nämlich $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ zwei Flächen II. O., α eine Berührungsebene von $F^{(2)}$ und A' ihr Pol bezüglich $F_1^{(2)}$, so ist jede durch A gelegte Berührungsebene von $F^{(2)}$ konjugierte Polarebene zu α bezüglich $F_1^{(2)}$, also ist ihre Spur auf der Ebene α ein Strahl g von der gewünschten Eigenschaft. Da die durch A' gehenden Berührungsebenen von $F^{(2)}$ die Berührungsebene α in einem Strahlenbüschel II. O. treffen, so ist der Ort in α und ebenso in jeder Berührungsebene von $F^{(2)}$, so wie auch in den Berührungsebenen $F_1^{(2)}$ liegenden Strahlen g, ein Strahlenbüschel II. O.

Um aber die durch einen beliebigen Punkt P gehenden Strahlen g des Ortes zu bestimmen bezeichne $P^{(2)}$ den aus P der Fläche $F^{(2)}$ umschriebenen Kegel und $\pi^{(2)}$ sei sein Polarkegelschnitt bezüglich $F_1^{(2)}$. Die aus einem Punkt A' von $\pi^{(2)}$, also auch durch die Gerade PA', zum Kegel $P^{(2)}$ geführten zwei Berührungsebenen treffen seine Polarebene α bezüglich $F_1^{(2)}$ in zwei Strahlen des Ortes, welche in einer Berührungsebene von $P^{(2)}$ liegen und also durch P gehen. Die zwei Strahlen liegen aber auf einem Kegel II. O., wie dies aus No. 2 folgt, wenn man den Satz auf zwei konzentrische Kegel II. O. überträgt.

Nachdem nun nachgewiesen wurde, dass die Strahlen g in den ∞^2 Berührungsebenen der angenommenen zwei Flächen II. O. Strahlenbüschel II. O. bilden und die durch einen beliebigen Punkt P gehenden Strahlen g die Erzeugenden eines Kegels II. O. sind, so folgt, dass der Ort dieser Strahlen g ein Komplex II. O. $\Gamma^{(2)}$ ist.

In jeder gemeinsamen Berührungsebene α der zwei Flächen $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ zerfällt der Strahlenbüschel II. O. des Komplexes in zwei Strahlenbüschel I. O. (A, α) und (A_1, α), deren Scheitel A und A_1 die Berührungspunkte sind von α mit den zwei Flächen. Der Ort der Scheitel dieser Strahlenbüschel I. O. ist daher die Berührungskurve der den Flächen $F^{(2)}$ und $F_1^{(2)}$ umschriebenen abwickelbaren Fläche, der Ort dieser Ebenen ist aber diese abwickelbare Fläche selbst. Wir können daher sagen:

Der Ort der Strahlen, aus welchen die zu zwei Flächen II. O. geführten Berührungsebenen einander harmonisch trennen, ist ein Komplex II. O. In jeder gemeinsamen Berührungsebene der Flächen bilden die Strahlen des Komplexes zwei Strahlenbüschel I. O., deren Scheitel die Berührungspunkte der betreffenden Ebenen sind. Der Komplex geht durch die zwei Flächen II. O., wenn dieselben Regelflächen sind.

* * *

Im folgenden geben wir einen Beitrag zur Theorie der Kegelschnitte, die einen Kegelschnitt doppelt berühren.

1. *Hat eine Gerade denselben Pol in Bezug auf drei Kegelschnitte, die keinem Büschel angehören, so bilden die aus diesem Pol ausstrahlenden Sehnenpaare der Kegelschnittpaare eine Involution.*

Es seien $k^{(2)}$, $l^{(2)}$ und $m^{(2)}$ die drei Kegelschnitte; kk', ll' und mm' die aus dem gemeinsamen Pol X ausstrahlenden Sehnenpaare von $l^{(2)} m^{(2)}$, $m^{(2)} k^{(2)}$ und $k^{(2)} l^{(2)}$; endlich seien M und M' die auf den Sehnen m und m' liegenden Punkte der Kegelschnitte $k^{(2)} l^{(2)}$.

Begegnet nun die Verbindungsgerade g der Punkte MM' den Sehnenpaaren kk', ll' in den Punktpaaren KK', LL', und dem Kegelschnitt $m^{(2)}$ oder irgend einem Kegelschnitt $m^{(2)}$ der Büschel $(m^{(2)} l^{(2)})$, $(m^{(2)} k^{(2)})$ in dem Punktpaar NN', so bilden nach *Desargues* die Punktpaare $NN'.MM'.KK'$ und die Punktpaare $NN'.MM'.LL'$ als Treffpunkte von $m^{(2)}$, $l^{(2)}$ und kk', bzw. von $m^{(2)}$, $k^{(2)}$ und ll' mit g, je eine Involution. Da nun diese zwei gemeinsame zugeordnete Punktpaare haben, gehören die Punktpaare KK', LL' und MM' derselben Punktinvolution, also die Sehnenpaare kk', ll' und mm', welche diese aus X projicieren derselben Strahleninvolution an, was wir eben beweisen wollten.

Bei diesem Beweis haben wir vorausgesetzt, dass sich zwei der Kegelschnitte (hier $k^{(2)}$ und $l^{(2)}$) in vier reellen Punkten treffen, von welchen wir die zwei M und M' durch eine reelle Gerade g verbunden haben. Wir werden aber bald sehen, dass der Satz auch dann richtig ist, wenn die Kegelschnitte gar keine reelle gemeinsame Punkte haben.

2. *Hat eine Gerade x denselben gemeinsamen Pol X in Bezug auf einen Kegelschnitt $m^{(2)}$ und alle Kegelschnitte*

eines Büschels, so hat $m^{(2)}$ mit jedem Kegelschnitt des Büschels zwei sich in jenem Pol X treffende gemeinsame Sehnen, welche eine Strahleninvolution bilden.	*einer Schaar, so hat $m^{(2)}$ mit jedem Kegelschnitt der Schaar zwei auf jener Geraden x liegende Kontingenzpunkte, welche eine Punktinvolution bilden.*

Nachdem nämlich $m^{(2)}$ und ein beliebiger Kegelschnitt $k^{(2)}$ des Büschels, sowie jeder veränderliche Kegelschnitt $l^{(2)}$ des Büschels solche drei Kegelschnitte sind, deren im gemeinsamen Pol X zusammenstossende Sehnenpaare eine Involution bilden, und von diesen ein Sehnenpaar zum Kegelschnittbüschel, ein zweites zu den Kegelschnitten $m^{(2)} k^{(2)}$, das dritte aber, das zu $m^{(2)} l^{(2)}$ gehörige, veränderlich ist, so bilden diese letzteren ein involutorisches Strahlenbüschel, welches schon von den zwei ersteren Sehnenpaaren bestimmt ist.

Dieser Beweis, der sich auf den früheren Satz stützt, setzt voraus, dass es im Kegelschnittbüschel (mindestens) einen Kegelschnitt $k^{(2)}$ gibt, welcher $m^{(2)}$ in vier reellen Punkten schneidet, von welchen zwei, die nicht auf einer durch X gehenden Sehne liegen, miteinander durch eine reelle Gerade g verbunden werden können. Sonst aber ist für den Beweis des Satzes nicht nötig, dass die Kegelschnitte des Büschels selbst mit dem Kegelschnitt $m^{(2)}$ reelle gemeinsame Punkte haben.

Daraus folgt aber, das Satz 1 auch dann richtig ist, wenn die drei angenommenen Kegelschnitte paarweise keine reellen Schnittpunkte haben. Und dies vorausgesetzt ergibt sich schliesslich, dass auch der Satz 2 von der Realität der gemeinsamen Punkte der Kege'schnitte $k^{(2)}$ und $m^{(2)}$ unabhängig, d. h. allgemein gültig ist.

3. *Hat eine Gerade denselben Pol in Bezug auf den Kegelschnitt $m^{(2)}$ und in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels (einer Schaar), so gibt es im letzteren zwei Kegelschnitte, welche $m^{(2)}$ doppelt berühren.*

Die Doppelstrahlen des involutorischen Büschels, den die aus X ausstrahlenden gemeinsamen Sehnen von $m^{(2)}$ und mit den Kegelschnitten des Büschels bilden, sind die Berührungssehnen der zwei Kegelschnitte des Büschels, welche $m^{(2)}$ doppelt berühren.

Daraus ergibt sich der bekannte *Chasles*'sche Satz: „Haben zwei Kegelschnitte eine doppelte Berührung mit einem dritten, so trennen die zwei Berührungssehnen zwei ihrer gemeinsamen Sehnen harmonisch."

Aus dem 3. Satz folgt eine Konstruktion für die durch drei Punkte A, B und C gehenden (oder drei Gerade berührenden) Kegelschnitte, welche einen Kegelschnitt $m^{(2)}$ doppelt berühren.

Auf der Geraden BC bestimmt man die zwei konjugierten Pole XY von $m^{(2)}$, welche BC harmonisch trennen; ist dann D der Punkt, welcher A von X und seiner durch Y gehenden Polare bezüglich $m^{(2)}$ harmonisch trennt, so sind die zwei Kegelschnitte des Büschels mit den Grundpunkten $ABCD$, die $m^{(2)}$ doppelt berühren, die gewünschten.

Um die Berührungssehnen derselben mit $m^{(2)}$ zu finden, sucht man das durch X (oder Y) gehende Sehnenpaar ll' von $m^{(2)}$ mit einem Kegelschnitt des Büschels, z. B. mit dem Geradenpaar AB, CD; die Verbindungsgeraden der Treffpunkte der Geraden AB und $m^{(2)}$ mit X geben ein solches Sehnenpaar ll'. Da nun die gewünschten Berührungssehnen XA, XB und l, l' harmonisch trennen, so liegen auf ihnen diejenigen konjugierten Pole Z, U von $m^{(2)}$, welche AB harmonisch trennen. Es sind daher XZ, XU und YZ, YU die gewünschten vier Berührungssehnen der durch ABC gehenden Kegelschnitte, welche $m^{(2)}$ doppelt berühren, — also die bekannte Konstruktion der Berührungssehnen.

Sind von den drei gegebenen Punkten A reell, BC aber die Doppelpunkte einer auf der Geraden g liegenden elliptischen Involution I, so bestimme man in I dasjenige zugeordnete Punktpaar XY, welches ein konjugiertes Polenpaar ist von $m^{(2)}$. Trennt dann der Punkt D den Punkt A von X und seiner Polare x bezüglich $m^{(2)}$ harmonisch, so sucht man wie oben in dem Kegelschnittbüschel $ABCD$ diejenigen zwei Kegelschnitte, welche $m^{(2)}$ doppelt berühren. Die aus X ausstrahlenden gemeinsamen Sehnen ll' von $m^{(2)}$ mit einem Kegelschnitt des Büschels, sowie XAD und $XY = g$ sind zwei zugeordnete Strahlen einer Involution, deren Doppelstrahlen die Berührungssehnen der gesuchten Kegelschnitte mit $m^{(2)}$ bestimmen.

Unter den Kegelschnitten des Büschels gibt es einen, dessen durch X (oder Y) gehende gemeinsame Sehnen mit $m^{(2)}$ in besonderer Weise gefunden werden können. Im Strahlenbüschel der konjugierten Polaren bezüglich $m^{(2)}$ vom Scheitel A gibt es nämlich ein Paar, welches durch ein zugeordnetes Punktpaar PQ der gegebenen Involution I geht. Dieses trifft x in dem Punktpaar EF, welches auf einem Kegelschnitt $k^{(2)}$ des Büschels liegt.

Da nämlich die Punkte AD von X und x harmonisch getrennt sind, so sind es auch die Strahlen EA, ED, so wie auch FA, FD; es treffen daher die Strahlen ED und FD die Gerade g in zwei Punkten P' und Q', die von P, bzw. Q durch XY harmonisch getrennt sind, d. h. $(XYPP') = (XYQQ') = -1 = (YXQQ')$. Daraus folgt aber, dass XY. PQ. $P'Q'$ zugeordnete Punkte der gegebenen Involution I sind, und daher gehen die Strahlen ED, FD ebenfalls durch zugeordnete Punkte P', Q' derselben. Der durch die fünf Punkte $ABCEF$ gelegte Kegelschnitt $k^{(2)}$ trägt daher auch den Punkt D und gehört somit dem Büschel an.

Da die Strahlen AP, AQ bezüglich $m^{(2)}$ konjugierte Polaren sind, so geben ihre Treffpunkte M, N mit der Polaren a von A bezüglich $m^{(2)}$, die Pole von AQ und AP; und XM und XN sind dann ein Paar gemeinsame Sehnen von $m^{(2)}$ und $k^{(2)}$.

Denn der Strahl XM trifft AMP und ANQ in konjugierten Polen bezüglich $k^{(2)}$ (weil AEF ein dem $k^{(2)}$ einbeschriebenes Dreieck und X der Pol der Seite EF ist), dann in konjugierten Polen bezüglich $m^{(2)}$ (da M der Pol der Geraden AQ ist); zugleich ist auch sein Treffpunkt mit x der konjugierte Pol von X in Bezug auf beide Kegelschnitte. Dasselbe kann man auch sagen vom Strahl XN, — also sind diese Strahlen die gemeinsamen Sehnen von $m^{(2)}$ und $k^{(2)}$. Daraus folgt die Konstruktion, die *F. Hofmann* in seinem Buche („Die Construction doppelt berührender Kegelschnitte", 1886. *Teubner*, p. 30) angibt, aus dem Satze 3 und die etwa so lautet: Um die Berührungssehnen eines Kegelschnitts $m^{(2)}$ mit den durch den reellen Punkt A und durch die konjugiert-imaginären Doppelpunkte einer elliptischen Involution I gehenden Kegelschnitte zu bestimmen, schneidet man die Polare a des Punktes A bezüglich $m^{(2)}$ in den Punkten M, N mit denjenigen aus A ausstrahlenden konjugierten Polaren von $m^{(2)}$, welche die Involution I in zugeordneten Punkten treffen. Sind dann XY diejenigen zugeordneten Punkte von I, welche zugleich konjugierte Pole sind von $m^{(2)}$, so geben XM, XN und XA, XY, so wie auch YM, YN und YA, YX zwei zugeordnete Strahlen je einer Involution, von welchen die eine hyperbolisch, die andere elliptisch ist; die Doppelstrahlen der ersteren sind die Berührungssehnen der gewünschten Kegelschnitte mit $m^{(2)}$.

Wir bemerken nochmals, dass diese von *Hofmann* stammende und auf eine andere Weise bewiesene Konstruktion aus dem 3. Satz folgt, nach welchem man irgend eine durch X gehende Gerade XHJ, welche den Punkt X mit einem Punkt H von $m^{(2)}$ verbindet als Sehne l benützen kann; der zweite Treffpunkt J von XH mit $m^{(2)}$ trennt X, x von H harmonisch. Die zweite durch X gehende Sehne l' von $m^{(2)}$ und dem Kegelschnitt $ABCHJ$ des Büschels wird entweder nach dem Desargues'schen Satz oder dadurch bestimmt, dass sie l von irgend einem Paar konjugierter Pole dieser Kegelschnitte harmonisch trennt; endlich trennen die Berührungssehnen der gesuchten Kegelschnitte XA, XY und l, l' harmonisch.