Sur le problème des moments et le théorème de Parseval correspondant.

M. E. Phragmén à l'occasion de son soixantième anniversaire le 2 octobre 1923.

Par M. MARCEL RIESZ à Stockholm.

Généralités. Le théorème de Parseval pour un intervalle fini.

1. On connaît le rôle que joue le théorème de *Parseval* dans la théorie des séries de *Fourier* et, plus généralement, dans celle des développements suivant des fonctions orthogonales. On sait aussi qu'on peut généraliser la notion d'orthogonalité et le théorème de *Parseval* de différentes manières, p. ex. en se servant de l'intégrale de *Stieltjes* correspondant à une distribution de masses positives.

Pour arriver à cette extension, disons d'abord quelques mots de l'intégrale de *Stieltjes*. Etant données dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$ une fonction continue $f(x)$ et une fonction bornée non décroissante (ou, plus généralement, à variation bornée) $\varphi(x)$, on entend par l'intégrale de *Stieltjes*[1] $\int_a^b f(x)\, d\varphi(x)$ la limite de l'expression

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\left(\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)\right); \quad x_0 = a, \ x_n = b, \ x_k \leqq \xi_k \leqq x_{k+1},$$

lorsqu'on fait tendre vers zéro le maximum des longueurs $x_{k+1} - x_k$.

Cette définition s'étend aisément à un intervalle infini, p. ex. à l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. On posera, par définition,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d\varphi(x) = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b f(x)\, d\varphi(x)$$

dès que cette limite a une valeur finie déterminée.

[1] *T.-J. Stieltjes*, Recherches sur les fractions continues, Ann. de Toulouse t. 8 (1894), p. J. 1—122 et t. 9 (1895), p. A. 1—47; *voir* en particulier t. 8, p. J. 71 et *suiv.*

2. Dans le cas où, $\varphi(x)$ étant toujours non décroissante, $f(x)$ cesse d'être continue,[2] nous adopterons, au lieu de la définition précédente, la généralisation donnée par M. *Lebesgue* qui se rattache à l'ordre d'idées suivant. On considère d'abord l'intégrale de *Stieltjes* comme intégrale curviligne $\int f\,dy$ prise le long d'une courbe continue C, composée des points $y=\varphi(x)$ et des segments verticaux représentant les sauts de $\varphi(x)$; puis, au lieu d'évaluer cette intégrale par le procédé de *Riemann* adopté par *Stieltjes*, on y applique le procédé connu de M. *Lebesgue.*[3] C'est-à-dire que, en faisant l'inversion de la fonction $y=\varphi(x)$ et cela avec des conventions évidentes pour les valeurs de x et de y qui correspondent respectivement à des segments horizontaux et verticaux, on arrive à une intégrale rectiligne de la forme $\int_\alpha^\beta F(y)\,dy$ où $F(y)=f(x(y))$. Si cette intégrale existe[4] au sens de M. *Lebesgue*, on dira que $f(x)$ *est intégrable par rapport à* $d\varphi(x)$ et on posera, par définition,

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)=\int_\alpha^\beta F(y)\,dy.$$

L'extension à un intervalle infini est immédiate.

3. Considérons un cas particulier très simple dont nous aurons besoin dans la suite. Admettons que $\varphi(x)$ est constante par intervalles et ne croît que par un nombre fini de sauts brusques $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ correspondant aux points de discontinuité $x_1, \ldots, x_n$. Dans ce cas, la définition de *Stieltjes* ne s'applique que si $f(x)$ est continue aux points de discontinuité de $\varphi(x)$, tandis que, d'après la définition de M. *Lebesgue*, l'intégrale existe pour toute fonction $f(x)$

---

[2]) C'est le cas où $f(x)$ est continue qui est essentiel pour le but de notre travail, et en se bornant à ce cas, on pourra se contenter de la définition élémentaire que nous venons de donner.

[3]) *H. Lebesgue*, Sur l'intégrale de *Stieltjes* et sur les opérations linéaires, Comptes rendus Paris, t. 150 (1910), p. 86—88. Pour des définitions équivalentes *voir J. Radon*, Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, Sitzungsb. Akad. Wien, t. 122 IIa (1913), p. 1295—1438, *W. H. Young*, On integration with respect to a function of bounded variation, Proc. London math. Soc. (2) t. 13 (1913). p. 109—150.

[4]) La fonction $F(y)$ sera en général indéterminée pour les valeurs de y qui correspondent aux segments horizontaux de la courbe C, cependant ces valeurs formant toujours un ensemble dénombrable n'exerceront aucune influence sur l'intégrale si l'on la prend au sens de M. *Lebesgue*.

qui est finie aux points x_k. On a dans les deux cas

(1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d\varphi(x) = \sum \varrho_k f(x_k).$$

Dans le cas où les points x_k forment un ensemble dénombrable de points isolés, la formule (1) subsiste dès que la série au second membre converge absolument.[5])

4. Passons maintenant à la question des polynomes orthogonaux, en nous restreignant d'abord au cas d'un intervalle fini (a, b). La fonction $\varphi(x)$ étant non décroissante et bornée dans cet intervalle, nous nous proposons de trouver des polynomes $q_0(x), q_1(x), \ldots$ tels que les relations

(2) $$\int_a^b q_m(x)\, q_n(x)\, d\varphi(x) = \begin{matrix} 0, & m \mp n \\ 1, & m = n \end{matrix}$$

aient lieu. Ces polynomes[6]) se calculent de proche en proche par les formules

(3) $$q_n(x) = C_n \left[x^n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\int_a^b y^n q_j(y)\, d\varphi(y) \right) q_j(x) \right]$$

où le facteur C_n se détermine au signe près par la relation

(2') $$\int_a^b q_n^2(x)\, d\varphi(x) = 1.$$

En général, ce procédé pourra être continué indéfiniment. Le cas exceptionnel est presqu'évident. En effet, les $q_r(x)$ étant déjà calculés pour $r \leqq n-1$, on pourra déterminer $q_n(x)$ de façon qu'on vient de dire, sauf dans le cas où le polynome $h_n(x) = x^n - \ldots$ figurant au second membre de (3) est tel que

(4) $$\int_a^b h_n^2(x)\, d\varphi(x) = 0.$$

Or si une telle relation a lieu pour un polynome $h(x)$, la fonction $\varphi(x)$ devra être constante dans tout intervalle où $h(x)$ est différent de zéro, c'est-à-dire qu'on se trouve dans le cas particulier très simple dont nous venons de parler. Inversement, dans ce cas particulier, en désignant par n le nombre des sauts, le polynome $h_n(x)$ s'annule[7]) aux points de discontinuité de $\varphi(x)$ et, par con-

---

[5]) D'une façon plus générale, il en est de même lorsque $\varphi(x)$ se réduit à une fonction des sauts; pour cette notion *cf.* p. ex. *C. de la Vallée Poussin*, Intégrales de *Lebesgue* etc. (Collection *Borel*) 1916, p. 89—90.

[6]) Il est bien connu que ces polynomes sont les dénominateurs d'une certaine fraction continue.

[7]) *Voir* la note suivante.

séquent, la relation (4) sera satisfaite. Nous convenons de poser dans ce cas exceptionnel $q_r(x) \equiv 0$ pour $r \geqq n$.

5. Nous passons au théorème de *Parseval* en restant toujours dans le cas d'un intervalle fini. Soit $f(x)$ une fonction intégrable ainsi que f^2 par rapport à $d\varphi(x)$. Posons

$$a_n = \int_a^b f(x)\, q_n(x)\, d\varphi(x).$$

Alors on a le théorème de *Parseval*

$$\int_a^b f^2(x)\, d\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2.$$

Indiquons brièvement la démonstration de ce théorème. La série $\sum a_n q_n(x)$, considérée d'abord à un point de vue purement formel, est une espèce de série de *Fourier*. La somme d'ordre n, $s_n(x) = a_0 q_0(x) + \ldots + a_n q_n(x)$ est caractérisée par le fait que parmi les polynomes $h(x)$ de degré $\leqq n$ c'est la somme $s_n(x)$ qui donne la meilleure approximation de $f(x)$ au sens des moindres carrés, c'est-à-dire qu'elle rend l'intégrale $\int_a^b (f(x) - h(x))^2\, d\varphi(x)$ minimum.[8]) Cela posé, le théorème de *Parseval* est équivalent au fait que cette meilleure approximation tend vers zéro avec $1/n$. Tout cela se voit par les formules

$$(5) \qquad \int_a^b (f(x) - h(x))^2\, d\varphi(x) = \int_a^b (f(x) - s_n(x))^2\, d\varphi(x) + \\ + \int_a^b (h(x) - s_n(x))^2\, d\varphi(x)$$

et

$$(6) \qquad \int_a^b (f(x) - s_n(x))^2\, d\varphi(x) = \int_a^b f^2(x)\, d\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k^2.$$

Cela étant, la démonstration du théorème de *Parseval* sera achevée dès qu'on aura montré qu'il existe des polynomes $h_n(x)$ rendant l'erreur $\int_a^b (f(x) - h_n(x))^2\, d\varphi(x)$ arbitrairement petite. Or, dans le cas où $f(x)$ est continue, cela est une conséquence immédiate du théorème de *Weierstrass*. Dans le cas

---

[8]) **Il s'ensuit immédiatement que, dans le cas particulier considéré au numéro précédent, le nombre des sauts étant désigné par n, $s_{n-1}(x)$ se confond avec le polynome de degré $n-1$ qui en tous les points de discontinuité de $\varphi(x)$ est égal à $f(x)$. Le théorème de *Parseval* pour ce cas particulier en résulte sur-le-champ.**

général, on n'aura qu'à combiner ce fait avec un autre que voici, savoir que toute fonction $f(x)$ intégrable avec son carré par rapport à $d\varphi(x)$ peut être approchée par une fonction continue $g(x)$ de sorte que l'intégrale $\int_a^b (f(x)-g(x))^2\, d\varphi(x)$ devienne aussi petite qu'on voudra.[9])

6. Si $f(x)$ est une fonction complexe dont les parties réelle et imaginaire sont intégrables avec leurs carrés par rapport à $d\varphi(x)$, nous entendrons par théorème de *Parseval* la formule

$$\int_a^b |f(x)|^2\, d\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

La somme de *Fourier* $s_n(x)$ est alors le polynome qui, parmi tous les polynomes de degré $\leqq n$ minime l'intégrale

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|^2\, d\varphi(x). \tag{7}$$

On a encore l'identité

$$\int_a^b |f(x)-s_n(x)|^2\, d\varphi(x) = \int_a^b |f(x)|^2\, d\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \tag{7'}$$

et le théorème de *Parseval* est équivalent au fait qu'il existe des polynomes $h_n(x)$ qui rendent l'intégrale (7) arbitrairement petite.

7. En substituant maintenant l'intervalle infini $(-\infty, +\infty)$ à l'intervalle fini (a, b), alors, pour que le problème traité plus haut garde son sens, il faudra évidemment faire l'hypothèse complémentaire que les moments de $d\varphi(x)$

$$c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, d\varphi(x) \tag{8}$$

existent. Cela posé, la formation des polynomes orthogonaux se fait comme plus haut.

Quant à la validité du théorème de *Parseval*, il y a une différence essentielle entre les deux cas. Dans le cas d'un intervalle infini, ce théorème ne tient pas sans exception comme dans le cas d'un intervalle fini, mais sa validité dépend de la nature du problème des moments attaché aux constantes (8). En remettant à plus tard les explications nécessaires, nous nous bornons à énoncer notre résultat principal.

---

[9]) Cela se voit par des considérations analogues à celles de M. *F. Riesz*, Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann. t. 69 (1910), p. 449-497, *cf.* p. 459.

Pour que le théorème subsiste il faut et il suffit que, ou bien le problème des moments en question soit déterminé ou bien, s'il est indéterminé, que $\varphi(x)$ en soit une solution extrémale.[10])

Pour arriver à ce théorème, nous commençons par réduire le problème général à un cas particulier.

Quelques théorèmes d'approximation. Réduction du problème général au cas particulier ou $f(x) = \frac{1}{a-x}$. La meilleure approximation de $\frac{1}{a-x}$.

8. En traitant le cas d'un intervalle fini, nous avons vu que la question de la validité du théorème de *Parseval* était, en somme, une question d'approximation. Pour attaquer le cas d'un intervalle infini, nous commençons par établir quelques théorèmes d'approximation très simples.

I. *Toute fonction $F(x)$ continue dans l'intervalle* $(0, \infty)$, *extrémités y-comprises,*[11]) *peut être approchée uniformément et indéfiniment par des combinaisons linéaires de la fonction constante* 1 *et de fonctions de la forme $1/(x+a)$ où les a désignent des nombres positifs.* C'est-à-dire que, ε étant un nombre positif arbitrairement petit, on pourra trouver une combinaison linéaire $S(x)$ formée d'un nombre fini de telles fonctions en sorte que $|F(x) - S(x)| < \varepsilon$, $0 \leqq x \leqq \infty$.

La démonstration est immédiate. La transformation $t = 1/(x+a)$ fait correspondre à l'intervalle infini $(0, \infty)$ l'intervalle fini $(0, 1/a)$. Donc, d'après le théorème de *Weierstrass,* on pourra trouver des constantes ν de façon que

---

10) Parmi les résultats connus qui sont des cas particuliers du nôtre, nous nous bornons à citer ceux de MM. *Weyl* et *Wigert* qui ont démontré le théorème de *Parseval* pour les distributions $e^{-1/2 x^2}\,dx$ et $e^{-x}dx$ $(x > 0)$, les polynomes orthogonaux correspondants étant respectivement les polynomes d'*Hermite* et ceux de *Laguerre*; *voir H. Weyl,* Singuläre Integralgleichungen, Math. Annalen t. 66 (1909), p. 273—324; *S. Wigert,* Contributions à la théorie des polynomes d'*Abel-Laguerre,* Arkiv för Mat. etc. t. 15, nº 25 (1921), p. 1—22. Lesdites distributions donnent lieu à des problèmes des moments déterminés.

11) Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est continue pour une valeur infinie de la variable lorsque la valeur limite correspondante existe et qu'elle est finie.

$$\left| F(x) - \left(v_0 + \frac{v_1}{x+a} + \dots + \frac{v_n}{(x+a)^n} \right) \right| < \varepsilon.$$

On pourra poser $a_j = a + \delta_j$ $(j = 1, \dots, n)$ et choisir les δ_j tous différents les uns des autres et assez petits pour que l'inégalité subsiste si l'on remplace chaque puissance $(x+a)^k$ par le produit $(x+a_1)\dots(x+a_k)$. En développant en fractions simples, on obtiendra une expression de la forme exigée. Ajoutons que si la fonction $F(x)$ s'annule à l'infini, le terme constant pourra être supprimé.[12])

II. *Toute fonction $G(x)$ continue entre $-\infty$ et $+\infty$ qui s'annule pour $x = \pm\infty$, peut être approchée uniformément et indéfiniment par des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $1/(x^2+b^2)$ et $x/(x^2+b^2)$.*

Pour la démonstration, observons d'abord que la fonction $G(x)$ pourra être approchée uniformément et indéfiniment par des fonctions qui sont paires au voisinages de $x=0$ et de $x=\pm\infty$. On pourra donc supposer qu'il en est déjà ainsi pour la fonction $G(x)$ elle-même.

Cela posé, les deux fonctions paires

$$G_1(x) = G(x) + G(-x), \quad G_2(x) = \frac{1+x^2}{2x}(G(x) - G(-x))$$

seront des fonctions continues de x^2 qui s'annulent à l'infini et alors elles pourront, d'après le théorème I et la remarque que nous venons d'y ajouter, être approchées uniformément et indéfiniment par des combinaisons linéaires de fonctions la forme $1/(x^2+b^2)$. De plus, en multipliant les expressions approchées de $G_2(x)$ par le facteur $2x/(1+x^2)$ dont le module est ≤ 1, on aura pour $G(x)-G(-x)$ des expressions approchées de la forme

$$\frac{2x}{1+x^2} \sum \frac{\mu_k}{x^2+b_k^2}.$$

On peut évidemment supposer que toutes les valeurs b_k^2 sont différentes de 1. Alors cette expression pourra s'écrire sous la forme

$$\frac{v_0 x}{x^2+1} + \sum \frac{v_k x}{x^2+b_k^2},$$

ce qui achève la démonstration.

---

[12]) On voit aussi par le raisonnement du texte que l'on peut assujettir les a_j à la restriction d'appartenir à un ensemble donné d'avance n'admettant qu'un seul point $a > 0$ comme point limite. La question concernant les ensembles les plus généraux d'où l'on pourra choisir les a_j de façon que le théorème subsiste, est facile à résoudre.

9. Le troisième théorème d'approximation — c'est précisément le théorème dont nous aurons besoin dans la suite — ne concerne plus l'approximation uniforme; il s'y agit d'une approximation dans le sens des moindres carrés, telle que nous en avons déjà parlé plus haut. Avant d'énoncer ce théorème, il nous sera utile d'introduire quelques notations.

Soit $\varphi(x)$ une fonction non décroissante et bornée, définie dans l'intervalle $-\infty < x < +\infty$. Nous ne considérons que des fonctions $f(x)$ réelles ou complexes qui avec $|f|^2$ sont intégrables par rapport à $d\varphi(x)$ dans l'intervalle en question. La classe de ces fonctions sera désignée par Ω. Les fonctions $f_1, \dots, f_n$ appartenant à cette classe, toute combinaison linéaire y appartiendra également. Nous appellerons *distance* de f_1 et de f_2 la valeur

$$[f_1, f_2] = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x) - f_2(x)|^2 \, d\varphi(x)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après une généralisation connue de l'inégalité de *Schwarz*, on obtient immédiatement

$$(9) \qquad [f_1, f_3] \leqq [f_1, f_2] + [f_2, f_3].$$

Enfin, étant donné un certain ensemble de fonctions $g(x)$ appartenant à la classe Ω, nous dirons qu'une fonction $f(x)$ de cette classe peut être approchée indéfiniment *en moyenne* (par rapport à $d\varphi(x)$) par les fonctions $g(x)$, si l'on peut choisir $g(x)$ de sorte que la distance de f et de g devienne arbitrairement petite.

Cela étant, voici notre théorème.

III. *Toute fonction $f(x)$ de la classe Ω peut être approchée indéfiniment en moyenne (par rapport à $d\varphi(x)$) par des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $1/(\alpha - x)$ où les α sont des nombres imaginaires* (c'est-à-dire non réels).

En effet, toute fonction $f(x)$ de la classe Ω peut être approchée indéfiniment en moyenne par des fonctions continues $g(x)$ de la même classe qui s'annulent à l'infini.[13]) D'après le théorème II, ces dernières fonctions peuvent être approchées uniformément et indéfiniment par des combinaisons linéaires de fonctions de la forme

$$\frac{1}{x^2+b^2} = \frac{1}{2ib}\left(\frac{1}{x-ib} - \frac{1}{x+ib}\right) \text{ et } \frac{x}{x^2+b^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-ib} + \frac{1}{x+ib}\right)$$

[13]) On peut même supposer que la fonction $g(x)$ s'annule pour toute valeur suffisamment grande de $|x|$. On le voit en observant que la variation de $\varphi(x)$ est très petite dans des intervalles assez éloignés; *cf.* encore la note[9]).

c'est-à-dire par des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $1/(\alpha-x)$. Supposons maintenant que la fonction $f(x)$ de la classe Ω fût approchée en moyenne par la fonction continue $g(x)$ s'annulant à l'infini avec une erreur moindre que ε_1 (c'est-à-dire que $[f, g] < \varepsilon_1$) et que la fonction $g(x)$ fût approchée uniformément, avec une erreur moindre que ε_2, par une combinaison linéaire $S(x)$ de fonctions de la forme $1/(\alpha-x)$, alors, par l'inégalité (9), $S(x)$ approchera en moyenne $f(x)$ avec une erreur moindre que $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \left(\int d\varphi(x)\right)^{\frac{1}{2}}$ ce qui achève la démonstration.

10. Revenons maintenant au théorème de *Parseval*. Soit donc $\varphi(x)$ une fonction non décroissante telle que les moments (8) existent. Nous allons démontrer, en nous appuyant sur le théorème III, que *la question de la validité du théorème de Parseval pour toutes les fonctions $f(x)$ de la classe Ω se réduit au cas particulier $f(x) = 1/(\alpha-x)$.*

En effet, admettons un instant que la distribution $d\varphi(x)$ soit telle que le théorème de *Parseval* ait lieu pour les fonctions $1/(\alpha-x)$. D'après une remarque faite déjà au n° 5, cela revient à ce que ces fonctions peuvent être approchées indéfiniment en moyenne par des polynomes $h(x)$. Alors il en sera de même de toute combinaison linéaire $S(x)$ de ces fonctions. Ceci résulte immédiatement de l'inégalité analogue à l'inégalité (9)

$$(10) \qquad [(\mu_1 f_1 + \ldots + \mu_n f_n), (\mu_1 h_1 + \ldots + \mu_n h_n)] \leq \leq |\mu_1| [f_1, h_1] + \ldots + |\mu_n| [f_n, h_n].$$

Cela posé, étant donnée une fonction arbitraire $f(x)$ de la classe Ω, on l'approchera d'abord par une combinaison linéaire $S(x)$ des fonctions $1/(\alpha-x)$ avec une erreur $< \varepsilon_1$. Alors, si le théorème de *Parseval* a lieu pour ces dernières fonctions, on pourra approcher $S(x)$ par un polynome $h(x)$ avec une erreur $< \varepsilon_2$. Enfin, en vertu de (9), ce polynome approchera $f(x)$ avec une erreur $< \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et alors le théorème de *Parseval* tiendra aussi pour $f(x)$. Tout revient donc à ceci: *Quelles sont les distributions $d\varphi(x)$ telles que le théorème de Parseval a lieu pour les fonctions particulières* $1/(\alpha-x)$?

11. Soit $\sum a_j q_j(x)$ le développement de *Fourier* de $1/(\alpha-x)$. En vue du théorème de Parseval, il s'agit d'évaluer le reste

$$R_n(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\alpha-x} - s_n(x) \right|^2 d\varphi(x), \quad s_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j q_j(x)$$

($cf.$ la formule (7′)). Le polynome $s_n(x)$ est caractérisé par la propriété suivante. Parmi tous les polynomes $h(x)$ de degré $<n$, c'est $s_n(x)$ qui rend l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\alpha-x}-h(x)\right|^2 d\varphi(x)$$

minimum. En posant alors $1-(\alpha-x)s_n(x)=l_n(x)$, on voit que le polynome $l_n(x)$ est la solution du problème de minimum suivant.

Parmi tous les polynomes $l(x)$ de degré $\leqq n+1$ tels que $l(\alpha)=1$, trouver celui qui rend l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|l(x)|^2\frac{d\varphi(x)}{|\alpha-x|^2}$$

minimum. La valeur de ce minimum sera précisement $R_n(\alpha)$. Le théorème de *Parseval* aura lieu ou n'aura pas lieu suivant que cette valeur minimum tend ou ne tend pas vers zéro. C'est une discussion approfondie du problème des moments correspondant à la distribution $d\varphi(x)$ qui nous permettra de remplacer cette réponse préliminaire par la réponse définitive.

Exposé rapide de quelques points de la théorie du problème des moments.[14])

12. Etant donnée une suite $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$, on entend par problème des moments (par rapport à l'intervalle $(-\infty, +\infty)$) les deux questions suivantes.

Les équations

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, d\varphi(x)=c_n \tag{10}$$

admettent-elles au moins une solution non décroissante $\varphi(x)$ (*question d'existence*) et si tel est le cas, cette solution est-elle unique (*question d'unicité*)?

[14]) *Cf.* outre le Mémoire cité de *Stieltjes* les travaux suivants: *H. Hamburger,* Über eine Erweiterung des *Stieltjes*schen Momentenproblems, *I, II* et *III,* Math. Ann. t. 81 (1920), p. 235—319, t. 82 (1921), p. 120—164, *ib* p. 168—187; *E. Stridsberg,* Några aritmetiska undersökningar etc. Notes 2 et 3, Arkiv för Mat. etc. t. 13, n⁰ 25 (1918), p. 1—70 et t. 15, n⁰ 22 (1921) p. 1—126; *M. Riesz,* Sur le problème des moments, Notes *I, II* et *III,* Arkiv för Mat. etc. t. 16, n⁰ˢ 12 (1921), p. 1—23 et 19 (1922), p. 1—21, t. 17, n⁰ 16 (1923), p. 1—52; *R. Nevanlinna,* Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das *Stieltjes*sche Momentenproblem, Ann. Ac. Scient. Fenn., t. 18, n⁰ 5 (1922), p. 1—53; *T. Carleman,* Sur le problème des moments, Comptes rendus Paris, t. 174 (1922), p. 1680—1682.

Par des raisons qui proviennent de la nature de l'intégrale de *Stieltjes,* on considère comme identiques deux solutions coïncidant, à une constante additive près, en tous leurs points de continuité; en effet, la valeur de l'intégrale de *Stieltjes* (10) ne dépend pas des valeurs qu'on attribue à $\varphi(x)$ en ses points de discontinuité. Si toutes les solutions sont identiques d'après la convention que nous venons de faire, on dira que le problème des moments est *déterminé;* le problème sera dit *indéterminé* dans le cas contraire.

Ici nous n'aurons pas à nous occuper de la question d'existence (question d'ailleurs bien facile) *les moments* c_n *étant toujours définis par une distribution donnée d'avance.* Il ne reste que la question d'unicité. La réponse à cette question dépend de la solution d'un problème de minimum que voici.

13. Etant donné un nombre complexe arbitraire α, déterminer parmi tous les polynomes $h(x)$ de degré $\leqq n$ tels que $h(\alpha)=1$, celui qui rend l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|^2 d\varphi(x)$$

minimum.

Le polynome $h(x)$ en question, comme d'ailleurs tout polynome de degré $\leqq n$, pourra être mis sous la forme $h(x)=a_0 q_0(x)+\ldots+a_n q_n(x)$. Soit d'autre part $g(x)=b_0 q_0(x)+ +\ldots+b_n q_n(x)$ un polynome de degré $\leqq n$ s'annulant pour $x=\alpha$, d'ailleurs arbitraire, et soit $\bar{g}(x)$ le polynome imaginaire conjugué. Pour que $h(x)$ fournisse le minimum en question il faut el il suffit, d'après un raisonnement connu,[15]) que l'on ait

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\bar{g}(x)\,d\varphi(x)=0.$$

Ceci est équivalent au fait suivant: la relation $g(\alpha)=0$ ou ce qui revient au même, la relation

$$\bar{g}(\bar{\alpha})=\bar{b}_0 q_0(\bar{\alpha})+\ldots+\bar{b}_n q_n(\bar{\alpha})=0$$

entraîne

$$\bar{b}_0 a_0+\ldots+\bar{b}_n a_n=0.$$

Alors $h(x)$ est de la forme $C(q_0(\bar{\alpha})q_0(x)+\ldots+q_n(\bar{\alpha})q_n(x))$ où la constante C se détermine par la condition $h(\alpha)=1$, ce qui donne en définitive

$$h(x)=\sum^{n} q_j(\bar{\alpha})\,q_j(x) : \sum_{j=0}^{n} |q_j(\alpha)|^2 \tag{11}$$

[15]) *Cf.* p. ex *M. Riesz, III,* p. 19—21. *l. c.* [14]).

et le minimum en question $\varrho_n(\alpha)$ est donné par la formule

$$\frac{1}{\varrho_n(\alpha)} = \sum_{j=0}^{n} |q_j(\alpha)|^2. \tag{12}$$

Pour n croissant, la valeur positive $\varrho_n(\alpha)$ ira en décroissant vers une valeur limite déterminée $\varrho(\alpha)$ positive ou zéro. Cette valeur est donnée par la formule

$$\frac{1}{\varrho(\alpha)} = \sum_{j=0}^{\infty} |q_j(\alpha)|^2, \tag{12'}$$

cette série étant convergente lorsque $\varrho(\alpha) > 0$ et divergente lorsque $\varrho(\alpha) = 0$. La distinction entre ces deux cas est d'une importance décisive pour le problème des moments correspondant à la distribution $d\varphi(x)$.

14. Voici maintenant la solution de la question d'unicité.[16]) *Pour que le problème soit déterminé, il faut que la valeur* $\varrho(\alpha)$ *définie plus haut s'annule en tout point imaginaire. Il en sera ainsi, dès que* $\varrho(\alpha)$ *s'annule en un seul point réel ou imaginaire.*

Rappelons aussi que, en vertu de la formule (12'), on pourra encore dire : Pour que le problème des moments soit déterminé, il faut que la série (12') soit divergente en *tout* point imaginaire. Il en sera ainsi dès que la série diverge en un *seul* point réel ou imaginaire. Il s'ensuit que dans le cas indéterminé la série (12') converge pour toute valeur finie de α. Ajoutons que la convergence est uniforme dans tout domaine borné.

15. Admettons maintenant qu'on se trouve dans le cas indéterminé. Soit $\alpha = \xi + i\eta$ un nombre imaginaire fixe. Formons avec toutes les solutions $\psi(x)$ du problème des moments, attaché à la ui te $c_0, c_1, \ldots c_n, \ldots$, l'intégrale

$$H(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(x)}{\alpha - x}. \tag{13}$$

M. *R. Nevanlinna* a démontré[17]) que l'ensemble des valeurs $H(\alpha)$ donne la périphérie et l'intérieur d'une certaine circonférence C de rayon $\varrho(\alpha)/2|\eta|$. A chaque point intérieur à cette circonférence il correspond une *infinité* de solutions différentes du problème des moments, telles que la valeur (13) correspondante coïncide avec ce point. A un point périphérique il n'en correspond qu'une *seule*. L'ensemble des solutions correspondant à différents points de la circonférence C ne dépend pas du choix de α. Nous appel-

[16]) *Voir* p. 34 du travail cité dans la note précédente.

[17]) *R. Nevanlinna,* l. c. [14]).

lerons ces solutions *solutions extrémales.* Les seuls points de croissance d'une telle solution sont les pôles d'une certaine fonction méromorphe

$$H(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\psi^*(x)}{z-x}=\frac{P(z)}{Q(z)},$$

$P(z)$ et $Q(z)$ étant des fonctions entières transcendantes à une infinité de zéros réels. En choisissant parmi ces fonctions méromorphes deux fonctions différentes $P_1(z):Q_1(z)$ et $P_2(z):Q_2(z)$, toute autre fonction $P(z):Q(z)$ pourra être mise sous la forme

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P_1(z)+\tau P_2(z)}{Q_1(z)+\tau Q_2(z)},$$

τ désignant un paramètre réel. En faisant varier ce paramètre de $-\infty$ à $+\infty$, le rapport $P(z):Q(z)$ décrit la circonférence C correspondant au point z. Quant à la structure d'une solution extrémale, nous avons vu qu'une telle solution ne croît que par des sauts brusques en des points isolés en nombre infini, savoir aux pôles dont nous venons de parler. On peut toujours choisir τ de façon qu'une valeur réelle arbitraire devienne un pôle de la fonction méromorphe correspondant à τ. En désignant un tel pôle par β, le saut en question sera précisément égal à $\varrho(\beta)$. Rappelons enfin une seconde propriété extrémale[18]) très remarquable des solutions considérées. C'est qu'une telle solution présente, en chacun de ses points de discontinuité, un saut plus grand que toute autre solution.

Le théorème de Parseval pour $\frac{1}{\alpha-x}$. Le théorème général.

16. Revenons maintenant au théorème de *Parseval.* Rappelons que nous avons montré au n⁰ 10 que la validité de ce théorème pour des fonctions arbitraires $f(x)$ ne dépend que de la validité du théorème pour les fonctions particulières $1/(\alpha-x)$. De plus, au n⁰ 11, nous avons trouvé que la condition nécessaire et suffisante pour que le théorème ait lieu pour $1/(\alpha-x)$ c'est qu'un certain minimum $R_n(\alpha)$ tende vers zéro avec $1/n$. En rapprochant ce résultat de ceux exposés au n⁰ 14, on pourra dire: Pour que $R_n(\alpha)$ tende vers zéro, c'est-à-dire pour que le théorème de *Parseval* ait lieu pour la fonction $1/(\alpha-x)$ il faut

[18]) *Cf. H. Hamburger, III,* et *M. Riesz, I, l. c.* [14]).

et il suffit que la distribution $\frac{d\varphi(x)}{|\alpha-x|^2}$ donne lieu à un problème des moments *déterminé*. On voit facilement que cela revient à ce que les relations

$$(14)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^n\,d\psi(x)}{|\alpha-x|^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^n\,d\varphi(x)}{|\alpha-x|^2},\quad n=0,1,2,\dots$$

entraînent que la fonction non décroissante $\psi(x)$ est, au point de vue adopté, identique à la fonction donnée $\varphi(x)$.

La condition que nous venons de formuler dépend encore de la nature du problème des moments défini par la distribution $\frac{d\varphi(x)}{|\alpha-x|^2}$, et comme α est arbitraire, il paraît s'agir d'une infinité de problèmes des moments. Or il n'en est rien. On passe immédiatement au problème des moments primitif défini par la distribution $d\varphi(x)$. Pour le voir, remarquons que le système (14) est équivalent au système

$$(15)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}x^n\,d\psi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^n\,d\varphi(x),\quad n=0,1,2,\dots,$$

complété par la relation

$$(16)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\psi(x)}{\alpha-x}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\varphi(x)}{\alpha-x}.$$

En effet, cette dernière relation pourra aussi s'écrire

$$(16')\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}(\bar\alpha-x)\frac{d\psi(x)}{|\alpha-x|^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}(\bar\alpha-x)\frac{d\varphi(x)}{|\alpha-x|^2}$$

et alors on voit que les égalités (14) entraînent (16). Inversement, en posant, en (16′), $\alpha=\xi+i\eta$, en séparant les parties réelles et imaginaires et en observant que η est différent de zéro, on obtient immédiatement les relations (14) pour $n=0$ et $n=1$. Afin d'obtenir les relations (14) pour $n>1$, observons d'abord que, pour x réel, $|\alpha-x|^2=(\xi-x)^2+\eta^2=g(x)$ est un polynome du second degré de x. En écrivant $x^n=g(x)t_n(x)+\lambda_n+\mu_n x$ où $t_n(x)$ est un polynome, λ_n et μ_n sont des constantes, il vient de (15) et des deux premières relations (14) que nous venons d'obtenir

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^n\,d\psi(x)}{g(x)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(t_n(x)+\frac{\lambda_n+\mu_n x}{g(x)}\right)d\psi(x)=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(t_n(x)+\frac{\lambda_n+\mu_n x}{g(x)}\right)d\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^n\,d\varphi(x)}{g(x)}.$$

D'ici on conclut: Pour que la distribution $\frac{d\varphi(x)}{|\alpha-x|^2}$ donne lieu à un problème des moments déterminé, il faut et il suffit qu'il n'existe aucune solution $\psi(x)$ du problème original différente de $\varphi(x)$ et telle que la relation (16) ait lieu. Tel sera évidemment le cas, quand le problème original est déterminé. D'autre part, pour que ceci ait lieu lorsque le problème original est indéterminé, il faut et il suffit, d'après un théorème cité de M. *R. Nevanlinna*, que $\varphi(x)$ en soit une solution extrémale. Remarquons que ces conditions sont *indépendantes* de α.

En définitive, on pourra dire:

Pour que le théorème de Parseval ait lieu pour toute fonction $f(x)$ intégrable avec $|f|^2$ par rapport à $d\varphi(x)$, il faut et il suffit que, ou bien le problème des moments défini par la distribution $d\varphi(x)$ soit déterminé ou, si ce problème est indéterminé, que $\varphi(x)$ en soit une solution extrémale.[19])

Une condition équivalente à celle-ci c'est que *le problème des moments correspondant à la distribution* $\frac{d\varphi(x)}{1+x^2}$ *soit déterminé.* Dans cette condition, $1+x^2$ pourra être remplacé par un polynome quadratique positif quelconque.

La série de Fourier dans le cas indéterminé.

17. Nous finissons par quelques remarques supplémentaires concernant le cas indéterminé.

Soit $d\varphi(x)$ une distribution qui donne lieu à un problème des moments indéterminé. Nous venons de voir que si $\varphi(x)$ n'est pas une solution extrémale de ce problème (tel sera p. ex. toujours le cas si $\varphi(x)$ est continue), le théorème de Parseval ne tiendra pas pour toute f, intégrable avec $|f|^2$ par rapport à $d\varphi(x)$ et, en particulier, que ce théorème ne tiendra pour aucune des fonctions $1/(\alpha-x)$. On peut alors se demander s'il existe des fonctions particulières $f(x)$ pour lesquelles le théorème a lieu. Telles fonc-

---

[19]) Dans son Mémoire classique *l. c.* [1]) *Stieltjes* n'a considéré que des $d\varphi(x)$ réparties sur l'intervalle $(0,\infty)$. Ce cas entre comme cas particulier dans celui du texte et le lecteur familier avec la théorie de *Stieltjes* pourra sans difficulté exprimer notre résultat dans le langage de cette théorie. En particulier, le théorème de *Parseval* tiendra toujours lorsque la distribution $d\varphi(x)$ donne lieu à un problème des moments qui est déterminé au point de vue de *Stieltjes.*

tions sont p. ex. tous les polynomes. Nous allons voir que le théorème subsiste pour une classe de fonctions bien plus générale.

Soit $\sum a_n q_n(x)$ la série de *Fourier* d'une fonction f intégrable avec $|f|^2$ par rapport à une distribution $d\varphi(x)$. Alors la formule (7′) donne l'inégalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, d\varphi(x)$$

ce qui met entre autre en évidence la convergence de la série au premier membre. Admettons que $d\varphi(x)$ donne lieu à un problème indéterminé. Alors l'allure de la série de *Fourier* sera entièrement différente de celle que l'on connaît de la théorie classique. En effet, la série (12′) converge uniformément dans tout domaine borné. On en conclut par un raisonnement connu que la série $\sum a_n q_n(z)$ converge absolument pour toute valeur de z, la convergence étant uniforme en tout domaine borné. Par conséquent, cette série représentera dans tout le plan une *fonction entière* $F(z)$.[20]) Evidemment, les valeurs de $F(z)$ sur l'axe réel seront, en général, différentes de celles de la fonction $f(x)$.[21]) La série de *Fourier* $\sum a_n q_n(x)$ converge aussi en moyenne (par rapport à $d\varphi(x)$) vers $F(x)$ dont, par conséquent, elle est aussi la série de *Fourier*. Il s'ensuit que les constantes de *Fourier* de la différence $f(x) - F(x)$ sont tous zéro et que, par suite, cette différence est orthogonale à toutes les puissances x^n $(n = 0, 1, \ldots)$ et en outre à la fonction $F(x)$ et que l'on a

$$(17) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |f^2| \, d\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} |f - F|^2 \, d\varphi(x).$$

Le théorème de *Parseval* pour $f(x)$ aura lieu ou n'aura pas lieu suivant que l'intégrale au second membre est zéro ou non. En particulier, le théorème tiendra lorsque $f(x) \equiv F(x)$ c'est-à-dire que $f(x)$ est partout représentée par sa série de Fourier. Pour $f(x)$ continue, cette condition est aussi nécessaire dans le cas où $\varphi(x)$ n'est constante dans aucun intervalle. Dans le cas contraire, on pourra laisser de côté l'intérieur des intervalles où $\varphi(x)$ est con-

---

[20]) D'après un résultat que nous avons donné récemment *l. c.* [15]) p. 37. on aura $|F(z)| = e^{\varepsilon(r) r}$ où $r = |z|$ et $\varepsilon(r) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow \infty$.

[21]) Avant que je fusse arrivé à ces résultats M. *Wigert* y est parvenu par un calcul direct très intéressant dans un cas particulier qu'il a eu la bonté d'examiner; *S. Wigert*, Sur les polynomes orthogonaux et l'approximation des fonctions continues, Arkiv för Mat. etc. t. 17, nº 18 (1923), p. 1—15.

stante et ne prêter attention qu'aux points de croissance qui restent. Dans tous les cas, la formule (17) met en évidence la condition nécessaire et suffisante pour que le théorème de *Parseval* tienne pour $f(x)$, continue ou discontinue; c'est que $f(x)$ soit représentée par sa série de *Fourier* en tous les points de croissance de $\varphi(x)$, sauf peut-être dans un ensemble de mesure nulle par rapport à $d\varphi(x)$, c'est-à-dire dans un ensemble sur lequel la variation totale de $\varphi(x)$ est égale à zéro. Dans le cas où $\varphi(x)$ est une solution extrémale, il s'ensuit, d'après notre théorème général, que *toute* fonction f intégrable avec $|f|^2$ par rapport à $d\varphi(x)$ sera représentée par sa série de *Fourier* en tous les points de croissance de $\varphi(x)$. Rappelons que ces points sont des points isolés et ajoutons que ce résultat se vérifie facilement par un calcul direct.

18. Disons encore un mot d'une question rentrant dans l'ordre d'idées du théorème de *Riesz-Fischer*. Etant données des constantes a_n telles que $\sum |a_n|^2$ est convergente, existe-t-il une fonction $f(x)$ intégrable avec $|f|^2$ par rapport à $d\varphi(x)$ dont ces a_n sont les constantes de *Fourier* suivant les polynomes orthogonaux $q_n(x)$? Alors, que le cas soit déterminé ou indéterminé, la réponse sera affirmative; on le voit par une adaptation facile de l'une ou l'autre des démonstrations connues. Or, il ne sera pas sans intérêt d'observer que, dans le cas indéterminé, cette réponse affirmative est déjà fournie par le raisonnement du numéro précédent. En effet, les a_n étant tels que nous venons de le dire, la fonction entière $F(x)$ donnée par la série $\sum a_n q_n(x)$ aura la propriété désirée.[22])

Győr, le 9 septembre 1923.

---

[22]) Signalons encore une propriété des fonctions telles que $F(x)$, c'est que la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, d\varphi(x)$ est la même pour toutes les solutions $\varphi(x)$ de notre problème des moments. Il en est de même des fonctions du type $x^n F(x)$, $|F(x)|^2$, $F^2(x)$, $F_1(x) F_2(x)$. D'autre part, à la fin de la troisième de nos Notes citées plus haut, nous sommes arrivé par une voie différente à une classe de fonctions que nous avons désignées par $E(x)$, jouissant de la même propriété, c'est-à-dire telles que leur intégrale par rapport aux différentes solutions était toujours la même. Je profite de l'occasion pour observer que toute telle fonction $E(x)$ pourra s'écrire comme la différence de deux fonctions non négatives de la même classe et que ces dernières fonctions pourront, pour les valeurs réelles de x, être mises sous la forme $|F(x)|^2$, $F(x)$ étant du type considéré dans le texte.