# Zur Topologie der Ebene.

Von JULIUS PÁL in Kjobenhavn.

Die Literatur, die über die Fundamentalsätze der Topologie der Ebene vorliegt, beleuchtet diese Fragen so vielseitig, dass es jetzt schon möglich ist, diese Sätze im Rahmen eines *leicht lesbaren Lehrbuches* darzustellen. Aus dem Inhalt eines solchen Buches, das vielleicht in näherer Zukunft erscheinen kann, will ich hier einiges mitteilen. Da es sich mehr und mehr zeigt, dass eines der einfachsten und erfolgreichsten Mittel für die topologische Erforschung der Ebene die Untersuchung von Richtungsänderungen ist, scheint mir die natürlichste Einleitung eines solchen Buches die Zusammenstellung der ersten Sätze über Arcus-Variation zu sein — etwa in folgendem Ausmass und folgender Reihenfolge:

*Satz 1.* Sind $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ für $a \leqq t \leqq b$ definirte stetige Funktionen mit $\varphi^2 + \psi^2 = 1$, so gibt es eine mod. $2\pi$ eindeutig bestimmte *stetige* Funktion $k(t)$, für welche $\cos k(t) = \varphi(t)$, $\sin k(t) = \psi(t)$ ist; $k(b) - k(a)$ ist eindeutig bestimmt.

*Satz 1a.* Es seien $f(t)$ und $g(t)$ für $a \leqq t \leqq b$ definirte stetige Funktionen und $(x_0, y_0)$ ein Punkt, für welchen $r(t) = +\sqrt{(f-x_0)^2 + (g-y_0)^2} > 0$ ist; dann gibt es eine mod. $2\pi$ eindeutig bestimmte stetige Funktion $k(t)$, für welche $r(t)\cos k(t) = f(t) - x_0$, $r(t)\sin k(t) = g(t) - y_0$ ist; $k(b) - k(a)$ ist eindeutig bestimmt.

Wir werden für das Vorhergehende auch sagen: Beobachtet man die Bewegung $x = f(t), y = g(t), a \leqq t \leqq b$ von $(x_0, y_0)$ aus, so ist $k(t)$ eine Richtungs- oder Arcus-Funktion und $k(b) - k(a)$ die Richtungsänderung bei der Bewegung.

*Satz 2.* Gegeben sei die Bewegung $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqq t \leqq b$. Der Punkt $(x_0, y_0)$ habe den Abstand $r_0 > 0$ von der

Bahnkurve, $k_0(t)$ sei eine Richtungsfunktion für den Beobachter in $(x_0, y_0)$.

Es werde $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ beliebig angegeben. Man schlage um $(x_0, y_0)$ den Kreis mit dem Radius $r_0 \sin \varepsilon$. Liegt dann $(x_1, y_1)$ innerhalb dieses Kreises, so gibt es für den Beobachter in $(x_1, y_1)$ eine Richtungsfunktion $k_1(t)$, für welche

$$|k_1(t) - k_0(t)| < \varepsilon \tag{1}$$

gilt.

Die beiden von $(x_0, y_0)$ und $(x_1, y_1)$ zum Punkte $[f(t), g(t)]$ führenden Halbstrahlen bilden nämlich einen Winkel $< \varepsilon$. Man wähle nun diejenige Richtungsfunktion $k_1(t)$, für welche $|k_1(a) - k_0(a)| < \varepsilon$ ist; da $k_1(t) - k_0(t)$ nie $= \pm \varepsilon$ ist, gilt (1) für alle $t$.

*Satz 2a.* Die Arcus-Änderung einer bestimmten Bewegung ist eine stetige Funktion des Beobachtungspunktes.

*Satz 2b.* Die Arcus-Änderung einer *geschlossenen* Bewegung ist innerhalb eines durch die Bahnkurve bestimmten Gebietes eine Konstante.

*Satz 3.* Die Arcus-Änderung einer Bewegung ist beliebig klein, wenn der Beobachtungspunkt hinreichend weit liegt. Verlauft die Bewegung innerhalb des Kreises $x^2 + y^2 = R^2$, so ist die Richtungsänderung $< \varepsilon$, sobald der Beobachtungspunkt ausserhalb $(x^2 + y^2) \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} = R^2$ liegt.

*Satz 3a.* Bei *geschlossener* Bewegung ist die Richtungsänderung Null, wenn der Beobachtungspunkt hinreichend weit liegt.

*Satz 4.* Der Beobachtungspunkt sei fixirt. Dann ist die Arcus-Änderung durch die Bahnkurve als Punktmenge nicht gegeben, sondern erst durch die Bewegung. Geht aber die Bewegung auf einem Jordan-Bogen vor sich,[1]) so ist die Arcus-Änderung durch Anfangs- und Endpunkt der Bewegung — unabhängig von der Bewegung — eindeutig bestimmt.

Es sei $j$ ein Jordan-Bogen, $x = F(\tau)$, $y = G(\tau)$, $0 \leqq \tau \leqq 1$ eine bestimmte, eineindeutige stetige Abbildung von $j$ auf die Zeitstrecke $0 \leqq \tau \leqq 1$, $K(\tau)$ eine entsprechende Arcus-Funktion für $(x_0, y_0)$. Auf diesem Bogen soll die Bewegung $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqq t \leqq b$ vor sich gehen. Dann ist $\tau$ eine eindeutige, stetige Funktion von $t$, etwa $\tau = \mu(t)$ und in $K[\mu(t)]$ hat man eine Arcus-

[1]) d. h. die Bahnkurve ist Teilmenge des Jordan-Bogens, wobei kinematisch-mehrfache Punkte zulässig sind.

Funktion der Bewegung. Die Arcus-Änderung $K[\mu(b)] - K[\mu(a)]$ ist also eindeutig bestimmt, sobald $\tau_1 = \mu(a)$ und $\tau_2 = \mu(b)$ gegeben sind.

*Satz 4a.* Die Arcus-Änderung bei einer auf einem Jordan-Bogen vor sich gehenden geschlossenen Bewegung ist Null.

*Satz 5.* Es seien

$$x = f(u, t),\ y = g(u, t),\ \alpha \leqq u \leqq \beta,\ a \leqq t \leqq b \tag{2}$$

stetige Funktionen, $(x_0, y_0)$ ein Punkt, der von der Kurvenschar (2) die Entfernung $r_0 > 0$ hat. Wird $\varepsilon > 0$ beliebig angegeben, so gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ so, dass für $|u_1 - u_2| < \delta$ die zu den Bewegungen $u = u_1$ und $u = u_2$ gehörigen, passend gewählten Arcus-Funktionen $k_1(t)$ und $k_2(t)$ die Ungleichung

$$|k_1(t) - k_2(t)| < \varepsilon \tag{3}$$

erfüllen.

Hierzu ist $\delta$ nur so zu wählen, dass $[f(u_1, t) - f(u_2, t)]^2 + [g(u_1, t) - g(u_2, t)]^2 < r_0^2 \sin^2 \varepsilon$ sei, sobald $|u_1 - u_2| < \delta$ ist. Denn dann bilden die von $(x_0, y_0)$ zu $(u_1, t)$ und $(u_2, t)$ führenden Halbstrahlen einen Winkel $< \varepsilon$. Wählt man also Arcus-Funktionen $k_1(t)$ und $k_2(t)$ so, dass $|k_1(a) - k_2(a)| < \varepsilon$ ist, so gilt (3) für alle $t$.

*Satz 5a.* Bei Voraussetzungen des Satzes 5 bezeichne $K(u_0)$ die Arcus-Änderung bei der Bewegung $u = u_0$. Dann ist $K(u)$ eine für $\alpha \leqq u \leqq \beta$ definirte *stetige* Funktion.

*Satz 5b.* Bei denselben Voraussetzungen sei jede der Bewegungen $u = u_0$ geschlossen; dann ist $K(u)$ eine Konstante.

*Satz 5c.* Die Funktionen $x = f(u, t)$, $y = g(u, t)$, $\alpha \leqq u \leqq \beta$, $a \leqq t \leqq b$ seien stetig, jede der Bewegungen $u =$ konst. sei geschlossen, $(x_0, y_0)$ habe positiven Abstand von den Kurven $u = \alpha$ und $u = \beta$. Sind dann die beiden von $(x_0, y_0)$ aus beobachteten Richtungsänderungen bei den Bewegungen $u = \alpha$ und $u = \beta$ von einander verschieden, so liegt $(x_0, y_0)$ auf einer der Kurven $u = u_0$, $\alpha < u_0 < \beta$.

*Satz 6.* Gegeben sind zwei geschlossene Bewegungen $x = f_1(t)$, $y = g_1(t)$, $x = f_2(t)$, $y = g_2(t)$, $a \leqq t \leqq b$ mit den Richtungsfunktionen $k_1(t)$ und $k_2(t)$ für den Beobachtungspunkt $(x_0, y_0)$. Die Richtungsänderungen betragen $2 n_1 \pi$ und $2 n_2 \pi$ mit ganzen $n_1$ und $n_2$. Ist $n_1 > n_2$, so enthält der Wertvorrat von $k(t) = k_1(t) - k_2(t)$ ein Intervall von der Länge $2(n_1 - n_2)\pi$. In der Tat ist $k(b) - k(a) = 2(n_1 - n_2)\pi$.

*Satz 6a.* Lässt $k(t)$ alle Werte $\equiv k_0 \pmod{2\pi}$ aus, so ist $n_1 = n_2$.

*

Nach diesem Arcus-Kapitel wäre der Teilungssatz für Polygone auf einem der vielen möglichen Wege zu erledigen. Da man nun die eben skizzirten Arcus-Sätze in der Länge doch nicht entbehren kann, kann man sie gleich gut dazu benutzen alles das Jordan-Polygon betreffende in Ordnung zu bringen, was auf diesem Wege sogar besonders einfach geht, etwa in folgenden Schritten: Indem man den Teilungssatz nur für das rechtwinkelige Viereck in Anspruch nimmt, zeigt man: 1⁰. Ist $\gamma$ ein Gebiet, $s$ eine Strecke, die bis auf einen Endpunkt $\gamma$ angehört, so ist $(\gamma - s)$ ein Gebiet. 2⁰. Ist die Strecke $s$ ein Querschnitt des Gebietes $\gamma$, so besteht $(\gamma - s)$ aus höchstens zwei Gebieten. Also: 3⁰. Ein Weg bestimmt in der Ebene *ein* Gebiet. 4⁰. Ein Jordan-Polygon bestimmt in der Ebene höchstens zwei Gebiete. Nun sei $MN$ eine Seite des Jordan-Polygons $\mathfrak{P}$. Auf der Symmetrieaxe von $MN$ wähle man symmetrisch zu $MN$ die Punkte $A$ und $B$ so nahe aneinander, dass die Strecke $AB$ nur ihren Mittelpunkt auf $\mathfrak{P}$ hat. Hiernach zeichne man ein (spitzwinkeliges) Dreieck $PRQ$, dessen Ecken $P$ und $Q$ innere Punkte von $MN$ sind, so dass $B$ innerhalb, $A$ ausserhalb des Dreiecks liegt und das Dreieck nur die Punkte von $PQ$ mit der Linie $\mathfrak{P}$ gemeinsam hat. Ersetzt man in $\mathfrak{P}$ die Strecke $PQ$ durch den Weg $PRQ$, so erhält man ein Jordan-Polygon $\mathfrak{P}'$. Werden $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ — beide etwa im Sinne $MPN$ — umlaufen und wird von $A$ aus beobachtet, erhalte man die Arcus-Änderungen $\alpha$ und $\alpha'$, während der Beobachter in $B$ die Änderungen $\beta$ und $\beta'$ konstatirt. Dann ist offenbar $\alpha = \alpha'$, ($A$ liegt ausserhalb $PRQ$), $\alpha' = \beta'$, ($AB$ trifft $\mathfrak{P}'$ nicht), aber $\beta = \beta' \pm 2\pi$ ($B$ liegt innerhalb $PRQ$). Also ist $\alpha = \beta \pm 2\pi$ und man hat: 5⁰. Ein Jordan-Polygon bestimmt zumindest zwei, also genau zwei Gebiete. 6⁰. Bei Durchquerung einer (beliebigen) Polygonseite kommt man aus dem einen Gebiet ins andere. 7⁰. Die Arcus-Änderung beim Umlauf des Polygons beträgt 0 oder $\pm 2\pi$, jenachdem der Beobachtungspunkt im „äusseren“, d. h. unbeschränkten oder „inneren“, beschränkten Gebiet liegt.

*

Um weiter unten viel Worte zu sparen, seien noch folgende *Stetigkeitssätze* angeführt:

*Satz 7.* Gegeben sei ein Jordan-Bogen $j$ und ein $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ so, dass der Durchmesser eines Teilbogens von $j$ kleiner als $\varepsilon$ ist, sobald die Endpunkte eine Entfernung $< \delta$ haben.

Da ferner ein Jordan-Bogen, der eine Teilmenge von $j$ ausmacht, mit den Punkten $A$ und $B$ den ganzen Teilbogen $AB$ von $j$ enthält, gilt

*Satz 8.* Eine Jordan-Kurve kann keine Teilmenge eines Jordan-Bogens sein.

Der Satz 8 ist dem Inhalte nach der einfachste Fall des Satzes von der Invarianz der Dimensionszahl.

*

Mit diesen Hülfsmitteln beweise ich dann in einfachster Weise einen Satz, den man mit gutem Recht einen Hauptsatz der elementaren Topologie nennen kann.

*Satz 9.* Gegeben sei ein Jordan-Bogen $j$ und ein $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein Jordan-Polygon $\mathfrak{P}_0$, das $j$ im Innern enthält, während alle Punkte, deren Entfernung von Bogen $> \varepsilon$ ist, ausserhalb $\mathfrak{P}_0$ liegen.

Konstruktion eines $\mathfrak{P}_0$: Man zeichne ein gleichseitiges Dreieck, das $j$ im Innern enthält und teile es in ein Netz von $4^n$ kongruenten Dreiecken. Das Netz wähle man so fein, dass 1. die Seite $d$ eines Netzdreieckes $< \varepsilon$ sei; 2. auch so klein, dass der Durchmesser eines Teilbogens von $j$ kleiner als $\varepsilon$ sei, sobald der Abstand der Endpunkte $< 2d$ ist (Satz 7). In diesem Netz zeichne man ein Jordan-Polygon $\mathfrak{P}$, das aus Seiten von Netzdreiecken besteht und $j$ im Innern enthält. $\mathfrak{P}$ enthalte $m$ Netzdreiecke, $m_0$ sei die kleinste der Zahlen $m$, $\mathfrak{P}_0$ sei ein $\mathfrak{P}$, das zu $m_0$ passt. Dann hat $\mathfrak{P}_0$ die behauptete Eigenschaft.[2])

---

[2]) Ich möchte den geneigten Leser aufmerksam machen, dass das eben angewandte Verfahren, $\mathfrak{P}_0$ durch die Minimalzahl der Netzdreiecke festzulegen, bei vielen ähnlichen Fragen vorzüglich anwendbar ist. Als Beispiel wähle ich einen Satz, der ebenfalls den Charakter eines fundamentalen Satzes hat, nämlich den folgenden: Zwei beschränkte, fremde Kontinua $\alpha$ und $\beta$ können durch ein Jordan-Polygon getrennt werden.

Alle mir bekannten Beweise arbeiten mit gestaltlichen Fallunterscheidungen. Man erhält den Satz, wie mir scheint, auf dem einfachsten Wege wie folgt:

Die Entfernung von $\alpha$ und $\beta$ ist $d > 0$. Man zeichne ein Dreieck, dessen Inneres $(\alpha + \beta)$ aufnimmt, teile es in ein Netz von $4^n$ kongruenten Dreiecken

Beweis: Die Eckpunkte von $\mathfrak{P}_0$ seien $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1} = A_1$. ($A_i A_{i+1}$ hat die Länge $d$; es können mehr als zwei zyklisch aufeinander folgende $A_i$ auf einer Geraden liegen.) $A_1 A_2 P$ sei dasjenige Netzdreieck mit der Seite $A_1 A_2$, dessen Inneres innerhalb $\mathfrak{P}_0$ liegt. Dann ist entweder der Weg $A_1 P A_2$ oder eine der Dreiecksseiten ein innerer Querschnitt von $\mathfrak{P}_0$.[3]) Dieser Querschnitt enthält einen Punkt von $j$. Sonst wäre $j$ ganz innerhalb eines der Polygone, die durch den Querschnitt aus $\mathfrak{P}_0$ hervorgehen, was mit der Minimaleigenschaft von $\mathfrak{P}_0$ unvereinbar ist. Es sei $B_1$ ein ganz bestimmt gewählter Punkt von $j$ auf dem Weg $A_1 P A_2$. Entsprechend wählen wir Punkte $B_2, B_3, \ldots, B_n$. Der letzte liegt im Grenzdreieck mit der Seite $A_n A_1$. Jede der Strecken $B_1 B_2$ $B_2 B_3, \ldots$, $B_n B_1$ ist $< 2d$, also hat jeder Teilbogen $\overset{\frown}{B_1 B_2}, \overset{\frown}{B_2 B_3}, \ldots, \overset{\frown}{B_n B_1}$ von $j$ einen Durchmesser $< \varepsilon$.

Nun durchlaufe ein Punkt das Polygon $\mathfrak{P}_0$. Während dieser die Polygonseite $A_i A_{i+1}$ beschreibt, soll ein attachirter Punkt den Bogen $\overset{\frown}{B_i B_{i+1}}$ durchlaufen. Diese zwei geschlossenen Bewegungen seien durch

$$x = f_1(t), y = g_1(t), \; x = f_2(t), \; y = g_2(t), \; a \leqq t \leqq b \qquad (4)$$

dargestellt. $M(x_0, y_0)$ habe eine Entfernung $> \varepsilon$ von $j$; dann liegt $M$ nicht auf $\mathfrak{P}_0$ und beide Bewegungen können von $M$ aus beobachtet werden; $k_1(t)$ und $k_2(t)$ seien zwei zugehörige Arcus-Funktionen. Die Differenz $k_1(t) - k_2(t)$ lässt alle Werte $\equiv \pi \pmod{2\pi}$ aus; denn ein Kreis um $B_i$ mit dem Radius $\varepsilon$ enthält $\overset{\frown}{B_i B_{i+1}}$ und $A_i A_{i+1}$, während $M$ ausserhalb dieses Kreises liegt. Folglich ist die Arcus-Änderung für die beiden Bewegungen (4) dieselbe (Satz 6a); sie ist Null für die auf dem Jordan-Bogen vorsichgehende (Satz 4a), also auch beim Umlauf von $\mathfrak{P}_0$ und so liegt $M$ *ausserhalb* $\mathfrak{P}_0$.

---

so dass jede Seite eines Netzdreieckes $< \frac{d}{2}$ sei. $\mathfrak{P}_\alpha$ sei ein Netzpolygon, dessen Inneres $\alpha$ enthält und das nur die kleinstmögliche Anzahl von Netzdreiecken enthält; entsprechendes bedeutet $\mathfrak{P}_\beta$. Infolge der Minimalforderung enthält jedes Grenzdreieck von $\mathfrak{P}_\alpha$ Punkte von $\alpha$; also schliesst man aus der Feinheit des Netzes, dass $\mathfrak{P}_\alpha$ weder $\beta$ noch $\mathfrak{P}_\beta$ trifft; liegt $\beta$ ausserhalb $\mathfrak{P}_\alpha$, so ist $\mathfrak{P}_\alpha$ ein trennendes Polygon. Im andern Fall besteht $\mathfrak{P}_\beta$ aus weniger Dreiecken, als $\mathfrak{P}_\alpha$ und trifft nicht $\alpha$, so dass $\alpha$ ausserhalb $\mathfrak{P}_\beta$ liegt.

[3]) Sonst hat man den trivial einfachen Fall $m_0 = 1$.

*Satz 9a.* Ein Jordan-Bogen bestimmt in der Ebene *ein* Gebiet.

*Satz 9b.* Gehört $j$ ganz einem Gebiete an, so ist *$(\gamma - j)$ ein* Gebiet.

Jede um einen Punkt von $j$ beschriebene Kreislinie enthält Punkte, die nicht zu $j$, sondern zu dem durch $j$ bestimmten Gebiete gehören. Also gilt

*Satz 10:* Jeder Punkt von $j$ ist Grenzpunkt des durch $j$ bestimmten Gebietes.

Es sei $J$ eine Jordan-Kurve, $j$ ein Teilbogen von $J$, $P$ ein Punkt, der nicht auf $J$ liegt. Dann hat das durch $J$ bestimmte, $P$ enthaltende Gebiet Grenzpunkte auf $j$. Es sei nämlich $Q$ ein innerer Punkt von $j$. Man konstruire ein Polygon $\mathfrak{P}_0$, das $(J-j)$ im Innern enthält, während $P$ und $Q$ ausserhalb des Polygons liegen. Man wandere auf einem Weg, der ausserhalb $\mathfrak{P}_0$ verlauft, von $P$ nach $Q$ und stosse zuerst in $R$ auf einen Punkt von $j$; dann ist $R$ ein Grenzpunkt von der behaupteten Art. Da die Grenze eines Gebietes abgeschlossen ist, hat man

*Satz 11:* Jeder Punkt von $J$ ist Grenzpunkt eines *jeden* durch $J$ bestimmten Gebietes.

*

Um nun den Teilungssatz zu beweisen, betrachten wir zunächst die folgende, besonders einfache Figur:

Ein Jordan-Bogen $j$ habe die Endpunkte in $M(-a, 0)$ und $N(+a, 0)$. Alle übrigen Punkte von $j$ liegen *innerhalb* des Vierecks mit den Endpunkten $A(+a, +b)$, $B(-a, +b)$, $C(-a, -b)$, $D(+a, -b)$.

*Satz 12.* Das Innere des Vierecks wird durch $j$ in zwei Gebiete zerschnitten.

Es sei $P$ ein Punkt innerhalb des Vierecks, aber nicht auf $j$, $\mathfrak{P}$ ein Polygon, das $j$ im Innern enthält und $j$ von $P$ trennt. Man durchlaufe die Strecke von $P$ nach $M$ bis zum ersten Schnittpunkt mit dem Polygon, von diesen aus setze man den Weg längs des Polygons fort bis zum ersten Treffpunkt mit dem Viereck. Hat dieser ein positives $y$, so gehört $P$ demjenigen Gebiet an, das an $AB$ heranreicht, sonst demjenigen, das an $CD$ anstosst. Also bestimmt $j$ innerhalb des Vierecks *höchstens* zwei Gebiete.

Man wähle innerhalb des Vierecks Punkte $A_1$ und $D_1$ so nahe an $A$ und $D$, dass die aus $A_1$ beobachtete Arcus-Änderung beim Umlauf der Jordan-Kurve $MCDNM$ und die aus $D_1$ beobachtete

Richtungsänderung beim Umlauf von $MNABM$ gleich Null sind. Nun durchlaufe ein Punkt die Linie $MCDNMNABM$ und man beobachte aus $A_1$. Die Richtungsänderung beträgt $2\pi$, da von $NMN$ abgesehen das Viereck positiv umlaufen wurde. Daher ist die Arcus-Änderung beim Umlauf von $MNABM$ gleich $2\pi$ oder 0, jenachdem von $A_1$ oder $D_1$ aus beobachtet wird. $A_1$ und $D_1$ gehören verschiedenen innerhalb des Vierecks durch $j$ bestimmten Gebieten an; die Anzahl dieser Gebiete ist genau zwei. Unter dem oberen, resp. unteren Gebiet werden wir das an $AB$, resp. $CD$ anstossende verstehen.

Nun sei $J$ eine Jordan-Kurve, $MN$ ein Diameter der Kurve; die beiden von $M$ und $N$ begrenzten Teilbogen sollen $p$ und $q$ heissen. Wir wählen ein Koordinatensystem so, dass $M$ und $N$ die Koordinaten $(-a, 0)$ und $(+a, 0)$ erhalten. Die übrigen Punkte von $J$ liegen im Gebiet $|x| < a$, $|y| < b$. Unter $A, B, C, D$ verstehen wir dasselbe, wie zuvor.

Der tiefste Schnittpunkt der Jordan-Kurve mit $x = 0$ heisse $P$, der höchste $Q$. Dann werden $P$ und $Q$ auf der Kurve durch $M$ und $N$ getrennt. Wären $P$ und $Q$ beide z. B. auf $p$, so wäre ja $Q$ im oberen, $P$ im unteren Gebiet von $q$ gelegen und der Teilbogen $PQ$ von $p$ müsste $Q$ treffen. Es liege etwa $P$ auf $p$ und $Q$ auf $q$. Mit $P$ liegt $p$ im unteren Gebiet von $q$, mit $Q$ liegt $q$ im oberen Gebiet von $p$.

*Satz 13.* Es gibt Punkte, die gleichzeitig im oberen Gebiet von $p$ und im unteren von $q$ liegen.

Es sei $P_1$ der höchste Schnittpunkt von $p$ und $x = 0$, $Q_1$ der tiefste Schnittpunkt von $q$ mit der Strecke $P_1Q$. Jeder Punkt zwischen $P_1$ und $Q_1$ hat die behauptete Eigenschaft.

*Satz 14.* Es sei $T$ ein willkürlich gewählter Punkt, der dem unteren Gebiet von $q$ und gleichzeitig dem oberen von $p$ angehört. Wird die Jordan-Kurve in der Richtung $MPNQM$ durchlaufen, so ist die von $T$ aus beobachtete Arcus-Änderung $2\pi$.

Im unteren Gebiet von $q$ wandere man von $T$ nach $P$, dann von $P$ aus auf $x = 0$ beliebig weit nach unten. Hierbei wird die Jordan-Kurve $NABMQN$ nichts getroffen. Also ist die von $T$ aus beobachtete Arcus-Änderung längs $NABM$ dieselbe, wie längs $NQM$ (Satz 2b und 3a); ebenso längs $MCDN$ dieselbe, wie längs $MPN$. Beim Umlauf des Vierecks ist die Richtungsänderung $2\pi$, also auch beim Umlauf von $J$.

Durch neuerliche Anwendung der Sätze 2b und 3a schliesst man:

*Satz 15.* Die Jordan-Kurve $J$ bestimmt *zumindest* zwei Gebiete.

*Satz 16.* $J$ bestimmt höchstens zwei Gebiete.

Die Punkte ausserhalb und auf dem Viereck $ABCD$, die im oberen Gebiet von $q$ und im unteren von $p$ gehören zu *einem* durch $J$ bestimmten Gebiete $\gamma$. Es sei nun $T$ ein Punkt, der nicht zu $\gamma$ gehört, sondern unterhalb $q$ und oberhalb $p$ liegt. In dem $T$ enthaltenden, durch $J$ bestimmten Gebiete $\pi$ wähle man $M_1$ und $N_1$ so nahe an $M$ und $N$ (Satz 11), dass die von $M_1$ aus beobachtete Arcus-Änderung beim Umlauf der Jordan-Kurve $Q_1P_1NQ_1$ und die von $N_1$ aus beobachtete Richtungsänderung längs $MP_1Q_1M$ gleich Null seien. Innerhalb $\pi$ führen wir einen Weg $w$ von $M_1$ nach $N_1$. Wir wollen zeigen, dass $w$ die Strecke $P_1Q_1$ trifft, woraus Satz 16 folgt.

Beobachtet man von $M_1$ aus die Arcus-Änderung längs $MP_1NQ_1M$, oder, was dasselbe ist, längs $MP_1Q_1P_1NQ_1M$, so beträgt diese $2\pi$ (Satz 14). Längs $Q_1P_1NQ_1$ ist die Variation Null, also längs $MP_1Q_1M$ beträgt sie $2\pi$. Längs derselben Kurve ist die von $N_1$ aus beobachtete Richtungsänderung Null, also muss $w$ die Kurve $MP_1Q_1M$ treffen, was nur auf $P_1Q_1$ erfolgen kann.

*

Bei der obigen Beweisanordnung hat man mit dem Teilungssatz gleichzeitig die Sätze über Arcus-Änderung beim Umlauf der Jordan-Kurve miterhalten. Es ist dann ein leichtes etwa folgende Sätze zu beweisen: Ein Querschnitt zerschneidet das Innere einer Jordan-Kurve in zwei Gebiete. Zwei innere Querschnitte treffen sich, wenn sich ihre Endpunkte auf der Jordan-Kurve trennen. Sind $a$, $b$ und $c$ drei Jordan-Bogen, die zu zweien eine Jordan-Kurve bilden, so gibt es einen und nur einen unter diesen, der innerhalb der durch die beiden andern gebildeten Jordan-Kurve liegt, etc. etc.

Für die weitergehende Untersuchung der Jordan-Kurve hat man ein gutes Hülfsmittel im folgenden

*Satz 17.* Haben die Jordan-Kurven $a$ und $b$ zumindest zwei gemeinsame Punkte, so wird jedes durch $(a+b)$ bestimmte Gebiet durch eine Jordan-Kurve begrenzt.

Beweis: Um Worte zu sparen, werde gleich vorausgesetzt, dass $b$ in das Innere von $a$ eindringt und wir betrachten ein durch

$b$ innerhalb $a$ bestimmtes Gebiet $\pi$. Es sei $P$ ein Punkt dieses Gebietes. Von $P$ aus führen wir einen Weg innerhalb $a$, der $b$ trifft; der erste Treffpunkt mit $b$ heisse $Q$.

Die Punkte von $b$ innerhalb $a$ bilden eine endliche oder abzählbare Folge von Querschnitten des Inneren von $a$. Der erste Fall ist uninteressant einfach. Betrachten wir also den zweiten und sei

$$q_0, q_1, q_2, \ldots\ldots \tag{5}$$

die Folge dieser Querschnitte; ein innerer Punkt eines $q_i$ gehört keinem $q_k$, $i \gtrless k$ an; $q_0$ sei derjenige Querschnitt, der $Q$ enthält; $q_0$ teilt $a$ in die Bogen $a_1$ und $a_2$; $P$ und $\pi$ liegen innerhalb $(a_1 + q_0)$ oder $(a_2 + q_0)$, sie sollen z. B. innerhalb $(a_1 + q_0)$ liegen.

*Beide* Endpunkte von $q_i$, $i > 0$ liegen auf einem der (abgeschlossenen) Bogen $a_1$ und $a_2$, und begrenzen einen Teilbogen von $a_1$ resp. $a_2$, den ich den Stützbogen von $q_i$ nennen will. Ein $q_i$, dessen Stützbogen auf $a_2$ fällt, verlauft ausserhalb $(a_1 + q_0)$. Solche $q_i$ werde aus der Folge (5) gestrichen; es bleibt die Folge

$$r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots \tag{6}$$

zurück; in dieser wird wiederum ein $r_i$ gestrichen, wenn der Stützbogen von $r_i$ den (echten) Teil des Stützbogens eines anderen $r_k$ ausmacht; zurückbleibt dabei die Folge

$$t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots \tag{7}$$

von Querschnitten mit den Stützbogen

$$s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots \tag{7a}$$

Die (nicht abgeschlossenen) Bogen $s_i$ und $s_k$, $i \gtrless k$ haben keinen gemeinsamen Punkt.

Ersetzt man in $a_1$ den Bogen $s_i$ durch $t_i$, so erhält man eine Punktmenge $a'$. Wir wollen zeigen, dass $a'$ ein Jordan-Bogen ist.

Man statuire nämlich topologische Abbildungen zwischen den einzelnen $s_i$ und $t_i$, die die gemeinsamen Endpunkte zu Fixpunkten haben. Dann hat man eine eineindeutige Abbildung zwischen $a_1$ und $a'$; es ist zu zeigen, dass diese stetig ist. Wir wollen den Beweis z. B. für die „Stetigkeit nach rechts" durchführen. Die rechtsseitige Stetigkeit der Abbildung $a_1 \to a'$ ist evident für den Anfangs- oder inneren Punkt eines $s_i$. Nun sei $T$ kein solcher Punkt von $a_1$; er fällt mit seinem Bilde $T'$ zusammen. Es werde $\varepsilon > 0$ beliebig angegeben. Da die Abbildung einer Jordan-Kurve auf die Kreislinie *gleichmässig* stetig ist, wird es nur eine endliche Anzahl $i$ geben, für welche der Durchmesser von $s_i$ oder $t_i$, also der von

$(s_i + t_i)$ grösser als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist. Die zugehörigen $s_i$ seien irgendwie markirt. Nun wähle man einen Punkt $U$ auf $a_1$ rechts von $T$ so, dass der Durchmesser des Teilbogens $\widehat{TU}$ von $a_1$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ sei und dass $\widehat{TU}$ noch keinen Punkt eines markirten $s_i$ enthalte. Liegt dann $R$ auf $\widehat{TU}$, so ist $T'R' < \varepsilon$, d. h. die Abbildung ist in $T$ stetig nach rechts.

Somit haben wir in $(a' + q_0)$ eine Jordan-Kurve $p$, die eine Teilmenge von $(a + b)$ ist; kein Punkt von $a$ liegt innerhalb $p$; aber auch keiner von $b$. Denn ein Punkt von $b$, der innerhalb $(a_1 + q_0)$, doch nicht auf $p$ liegt, ist Punkt eines *gestrichenen* $r_i$, dessen Stützbogen also wirklicher Teil eines $s_k$, $i \gtrless k$ ist. Derjenige Endpunkt von $r_i$, der innerer Punkt von $s_k$ ist, liegt ausserhalb $p$ und da der offene Bogen kein $t_j$ trifft, liegt $r_i$ ganz ausserhalb $p$.

Es erübrigt noch zu zeigen, dass $P$ innerhalb $p$ liegt. Ein Punkt durchlaufe $a_1$, sein Bildpunkt $a'$. Beide Bewegungen werden aus $P$ beobachtet; die zwei Arcus-Änderungen stimmen überein. Denn man kann von $P$ nach $Q$, von $Q$ beliebig weit gelangen, ohne die Kurve $(a_1 + a')$ zu treffen. Durchlauft man $(a_1 + q_0)$ und beobachtet aus $P$, so ist die Arcus-Änderung $\pm 2\pi$, dasselbe gilt also beim Umlauf von $(a' + q_0)$; $P$ liegt innerhalb $p$ und $p$ ist die Grenze von $\pi$.

*Satz 18.* Die Jordan-Kurven $a$ und $b$ haben zumindest zwei Punkte gemein; $Q$ sei ein Punkt von $b$, der (z. B.) innerhalb $a$ liegt. Dann gibt es genau zwei durch $(a + b)$ bestimmte Gebiete, die $Q$ zum Grenzpunkt haben; eines liegt innerhalb, das andere ausserhalb $b$.

Es sei $q_0$ derjenige Bogen von $b$, der $Q$ enthält und einen inneren Querschnitt von $a$ bildet; $a_1$ und $a_2$ bedeute dasselbe, wie zuvor. Nach der zuvor beschriebenen Konstruktion bilden wir $a'$ als Abbild von $a_1$ und $a''$ als Abbild von $a_2$; $a'$ liegt ausserhalb $(a_2 + q_0)$, a fortiori ausserhalb $(a'' + q_0)$; $a'$ liegt ausserhalb $(a' + q_0)$; folglich liegt $q_0$ und speziell $Q$ innerhalb $(a' + a'')$. Jedes durch $(a + b)$ bestimmte, an $Q$ heranreichende Gebiet liegt also innerhalb $(a'' + a'')$. Es gibt aber nur zwei solche Gebiete: das Innere von $(a' + q_0)$ und das von $(a'' + q_0)$. Aus Satz 11 folgt dann, dass eines dieser Gebiete innerhalb, das andere ausserhalb $b$ liegt.

*Satz 19.* (Glattheit der Jordan-Kurve.) Gegeben sei eine Jordan-Kurve $b$, ein Punkt $Q$ auf $b$ und ein $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ so, dass zwei innere oder zwei äussere Punkte von $b$, die der $\delta$-Umgebung von $Q$ angehören, durch eine stetige, $b$ nicht treffende, die $\varepsilon$-Umgebung von $Q$ nicht verlassende Linie verbunden werden können.

Als Kurve $a$ wählen wir den Kreis um $Q$ mit dem Radius $\varepsilon_1$ (das wir kleiner als den Durchmesser von $b$ voraussetzen); wir können nun nicht nur die Existenz eines brauchbaren $\delta$ einsehen, sondern das bestmögliche $\delta$, direkt angeben; dieses ist der Radius des grösstmöglichen, um $Q'$ beschriebenen, aus $(a' + a'')$ nicht heraustretenden Kreises.[4])

Aus der Glattheit folgt dann bekanntlich der Satz von der stetigen Erreichbarkeit; und es ist sofort ersichtlich, dass man mit den obigen Mitteln Glattheit und Erreichbarkeit für *innere* Punkte des Jordan-Bogens zeigen kann. Diese Sätze für die *Endpunkte* des Bogens nachzuweisen erfordert einen etwas grösseren Apparat, auf den ich hier nicht eingehe.[5])

Um die reiche Anwendbarkeit namentlich von Satz 5c zu zeigen, beweise ich

*Satz 20.* Das topologische Bild eines Gebietes ist wieder ein Gebiet. Es seien $O(x = 0,\ y = 0)$ und $O'(x' = 0,\ y' = 0)$ zwei entsprechende Punkte; durchlauft $(x, y)$ den Kreis

$$x = r \cos t,\ y = r \sin t,\ r > 0,\ 0 \leqq t \leqq 2\pi, \tag{8}$$

so möge der Bildpunkt die Jordan-Kurve

$$x' = f(r, t),\ y' = g(r, t),\ 0 \leqq t \leqq 2\pi$$

umlaufen. Es sei nun $(x'_0, y'_0)$ ein von $(x' = 0,\ y' = 0)$ verschiedener, sonst beliebiger Punkt innerhalb der Kurve

$$x' = f(\beta, t),\ y' = g(\beta, t),\ 0 \leqq t \leqq 2\pi. \tag{9}$$

Wir wählen $\alpha$ so klein, dass die Bewegung

$$x' = f(\alpha, t),\ y' = g(\alpha, t),\ 0 \leqq t \leqq 2\pi \tag{10}$$

in einem Kreise um $(x' = 0,\ y' = 0)$, welcher $(x'_0, y'_0)$ nicht enthält, vor sich geht. Beobachtet man die Bewegungen (9) und (10)

---

[4]) Vgl. *C. Carathéodory,* Ueber die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer Jordankurve auf einen Kreis, Mat. Ann., Band 73, S. 315.

[5]) Diesen ausführlicheren Apparat und einiges vom hier dargestellten skizzirte ich kurz in einer Note, die in der von den dänischen Matematikern Prof. J. Hjelmslev gewidmeten Festschrift erschien. S. Matem. Tidskr. 1923.

von $(x'_0, y'_0)$ aus, so ist die Arcus-Änderung $\pm 2\pi$ resp. 0, so dass $(x'_0, y'_0)$ auf einer Kurve

$$x' = f(r, t),\ y' = g(r, t),\ \alpha < r < \beta,\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

liegt, d. h. Bild eines Punktes $(x_0, y_0)$ mit $x_0^2 + y_0^2 < \beta^2$ ist. Mit $(x'_0, y'_0)$ liegt das Bild der ganzen Scheibe $x^2 + y^2 < \beta^2$ innerhalb (9) und erfüllt das Innere dieser Kurve.

Zum Schluss möchte ich einen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra mitteilen, der sich ebenfalls auf Satz 5c stützt. Dieser Beweis war einer älteren Generation wohlbekannt, scheint aber nun in Vergessenheit geraten zu sein. Unter allen Beweisen, die ich kenne, ist dieser der einzige, der von Anfang bis zu Ende in der Anschauung verfolgt werden kann; er lässt sich ganz leicht in die $\varepsilon-\delta$-Form einkleiden.[6])

*Satz.* Es sei

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,\ a_n \neq 0.$$

Dann gibt es ein $z = z_0$, für welches $P(z_0) = 0$ ist.

Durchlauft $z = x + iy$ den Kreis

$$x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ r > 0,\ 0 \leq t \leq 2\pi,$$

so führt $z' = P(z) = x' + iy'$ die Bewegung

$$x' = f(r,t),\ y' = g(r,t),\ 0 \leq t \leq 2\pi \tag{11}$$

aus; des weiteren setze man

$$\begin{aligned} P(z) &= z^n\left(1 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}\right) = \\ &= r^n(\cos nt + i\sin nt)\left[\varphi(r,t) + i\psi(r,t)\right] \end{aligned} \tag{12}$$

Nun wähle man $r = \alpha > 0$ so klein, dass die Bewegung

$$x' = f(\alpha,t),\ y' = g(\alpha,t),\ 0 \leq t \leq 2\pi \tag{13}$$

in einem so kleinen Kreis um $a_n \neq 0$ verlaufe, dass dieser Kreis $(x' = 0, y' = 0)$ nicht enthält, und man wähle $\beta$ so gross, dass die Bewegung

$$x' = \varphi(\beta,t),\ y' = \psi(\beta,t),\ 0 \leq t \leq 2\pi \tag{14}$$

in einem Kreise um $(x' = 1, y' = 0)$ verlaufe, der wiederum $(x' = 0, y' = 0)$ nicht enthält. Die von $(x' = 0, y' = 0)$ aus beobachtete Richtungsänderung längs (13) und längs (14) ist dann Null.

[6]) Diesen Beweis kann ich in keinem der im Encyklopedie-Artikel „Netto, Fundamentalsatz" referirten wiedererkennen; seine Kenntnis verdanke ich der mündlichen Mitteilung des vor kurzem verstorbenen Direktors der dänischen Gradmessung Kaptejn Dr. phil. F. Buchwaldt.

Aus dem letzteren Umstande folgt, dass die Richtungsänderung bei der Bewegung

$$x' = f(\beta, t),\ y' = g(\beta, t),\ 0 \leq t \leq 2\pi \qquad (15)$$

$2n\pi$ beträgt. Denn ist etwa $l(t)$ eine zu (14) gehörige Arcus-Funktion, so ist laut (12) $l(t) + nt$ eine zu (15) gehörige. Lau 5c liegt also $(x' = 0,\ y' = 0)$ auf einer Kurve

$$x' = f(r_0, t),\ y' = g(r_0, t),\ \alpha < r_0 < \beta,\ 0 \leq t \leq 2\pi, \text{ qu. e. d.}$$

*

Nach diesen reichlichen Anwendungen der ebenen Arcus-Funktion stellt man sich natürlich folgendes Problem: Gibt es eine räumliche Arcus-Funktion, d. h. eine Funktionale

$$F = F(\alpha.\ \beta,\ a,\ b,\ f,\ g,\ h,\ x_0,\ y_0,\ z_0),$$

welches für jede Fläche

$$x = f(u, t),\ y = g(u, t),\ z = h(u, t),\ \alpha \leq u \leq \beta,\ a \leq t \leq b$$

definirt ist, solange diese den Punkt $(x_0, y_0, z_0)$ nicht enthält, die sich bei stetiger Deformation der Fläche oder stetiger Bewegung des Beobachtungspunktes stetig ändert und die für geschlossene Flächen (deren Begriff freilich in der sorgfältigsten Weise zu umschreiben wäre) nur gewisse discrete Werte annehmen kann?

Über dieses interessante und gewiss lebensfähige Problem liegt meines Wissens nichts abschliessendes und allgemeines vor.