Über die Fundamentalabbildung schlichter Gebiete.

Von Tibor Radó in Szeged.

Einleitung.

Die Herrn *L. Fejér* und *F. Riesz* teilten mir eine neue Beweisanordnung für den fundamentalen Satz mit, dass jedes einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Zahlenebene mit wenigstens zwei Randpunkten umkehrbar eindeutig und konform auf das Innere eines Kreises abgebildet werden kann. Mit der freundlichen Erlaubnis der genannten Herrn teile ich ihren Beweis gleich in dieser Einleitung mit. Die weiteren Entwicklungen dieser Arbeit bezwecken, mit Hilfe einer sinngemässen Erweiterung der *Fejér-Riesz*schen Methode das Grenzkreistheorem für das allgemeinste schlichte Gebiet zu begründen.[1])

Was die Einzelheiten der Darstellung anbelangt, so ist dabei die von Herrn *Bieberbach*[2]) aufgestellte Forderung bestimmend gewesen, dass nämlich das Grenzkreistheorem rein funktionentheoretisch, also ohne potentialtheoretische und topologische Überlegungen begründet werden soll. Im speciellen Falle, mit welchem wir uns allein beschäftigen werden, nämlich im Falle eines gewöhnlichen schlichten Gebietes, gelingt es tatsächlich, dieser Forderung gerecht zu werden.

---

[1]) Die beiden genannten Theoreme sind vielfach behandelt worden, für uns kommen hauptsächlich die beiden ersten *Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung* des Herrn *Koebe* in Betracht (Abh. I, Journal für Math. Bd. 145. und Abh. II, Acta mathematica Bd. 40.) auf welche wir auch wegen Literaturangaben verweisen, ferner die Arbeit des Herrn *Carathéodory* in der *Schwarz*-Festschrift: Elementarer Beweis für den Fundamentalsatz der konformen Abbildungen.

[2]) *L. Bieberbach,* Über die Einordnung des Hauptsatzes der Uniformisierung in die Weierstrassische Funktionentheorie, Math. Annalen 78.

Die Fejér-Rieszsche Beweisanordnung.

Sei G ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet, welches den Nullpunkt im Innern enthält. Wir betrachten die Gesamtheit der in G eindeutigen, regulären, schlichten und beschränkten Funktionen $f(z)$, welche im Nullpunkte verschwinden und die Ableitung 1 haben (eine solche Funktion ist z. B. z selbst). Mit $M(f)$ werde die obere Grenze des absoluten Betrages von $f(z)$ in G bezeichnet, und ϱ sei die untere Grenze aller $M(f)$.

Es gibt dann eine Folge

$$f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z), \ldots$$

für welche $M(f_n) \to \varrho$. Da die Folge gleichmässig beschränkt ist, so enthält dieselbe eine unendliche Teilfolge, welche in jedem abgeschlossenen Teilgebiete von G gleichmässig konvergiert. Sei $f(z)$ die Grenzfunktion. Diese ist in G regulär, im Nullpunkte ist $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Da mithin $f(z)$ nicht konstant ist, so ist sie schlicht in G, als gleichmässige Grenzfunktion von schlichten Funktionen. Ferner ist offenbar $M(f) = \varrho$.

Die Funktion $f(z)$ entwirft also von G ein Bild, welches ganz im Kreise mit dem Halbmesser ϱ und mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt enthalten ist. Wir können aber zeigen, dass das Bildgebiet das Innere dieses Kreises vollständig ausfüllt. Wäre dies nicht der Fall, so würde es einen Wert $r e^{i\varphi}$ mit $r < \varrho$ geben, welchen unsere Funktion $f(z)$ in G nicht annimmt. Dann können wir aber mit Hilfe der *Carathéodory-Koebe*schen Quadratwurzeltransformation aus $f(z)$ eine Funktion $F(z)$ ableiten, welche ebenfalls der eingangs erklärten Klasse angehört und für welche $M(F) < M(f)$ ist, was aber wegen $M(f) = \varrho$ ein Widerspruch ist. Damit ist bewiesen, dass die Extremalfunktion $f(z)$ das Gebiet G tatsächlich auf das Innere des Kreises abbildet, welcher den Nullpunkt zum Mittelpunkte und den Halbmesser ϱ hat.

Zur erwähnten Funktion $F(z)$ gelangen wir auf die folgende Weise. Wir führen zunächst Funktionen $t(z)$, $u(z)$, $v(z)$, $w(z)$ ein, welche alle in G eindeutig, regulär, schlicht und absolut kleiner als 1 sind:

$$t = \frac{1}{\varrho e^{i\varphi}} f; \quad u = \frac{t-\beta}{\beta t - 1}, \text{ wo } \beta = \frac{r}{\varrho}; \quad v^2 = u \text{ mit } v(0) = \beta^{1/2};$$

$$w = \frac{v - \beta^{1/2}}{\beta^{1/2} v - 1}.$$

Insbesondere wird v in G eindeutig sein, weil u dort nicht verschwindet und weil G einfach zusammenhängt. Nach einer einfachen Rechnung erhalten wir:

$$w'(0) = \frac{\beta+1}{2\beta^{1/2}} \frac{1}{\varrho e^{i\varphi}}.$$

Für die Funktion

$$F(z) = \frac{2\beta^{1/2}}{\beta+1} \varrho e^{i\varphi} w(z)$$

haben wir folglich $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ und wegen $|w| < 1$ noch $M(F) \leq \frac{2\beta^{1/2}}{\beta+1}\varrho$. Da $0 < \beta < 1$ ist, so ist $\frac{2\beta^{1/2}}{\beta+1} < 1$, also $M(F) < \varrho$, wie wir es haben wollten.

§ 1.

Vorbereitungen.

1. Sei G ein Gebiet der komplexen Zahlenebene, welches den unendlichfernen Punkt nicht im Innern enthält. Wenn ein Funktionselement längs aller Wege in G fortgesetzt werden kann, so werden die sämtlichen Fortsetzungen desselben i. A. keine in G eindeutige Funktion ergeben. Ist dies aber für alle innerhalb G unbegrenzt fortsetzbare Funktionselemente der Fall, so heisse G einfach zusammenhängend. Diese Eigenschaft ist gegenüber konformer Abbildung offenbar invariant, d. h. sind G, G' zwei Gebiete, welche ein-eindeutig konform aufeinander abgebildet werden können, so werden sie gleichzeitig einfach zusammenhängen oder nicht. Wir stellen zunächst fest, dass die Kreisscheibe einfach zusammenhängt. Dies ist eigentlich, wie mir Herr *Koebe* bemerkte, nur eine Ausdrucksweise für den Satz, dass am Rande des wahren Konvergenzkreises einer Potenzreihe wenigstens ein singulärer Punkt liegt. Sei nämlich $f(z)$ eine in der Umgebung des Mittelpunktes reguläre Funktion, welche längs aller Wege auf der Kreisscheibe fortgesetzt werden kann. Wir betrachten die Potenzreihe derselben für den Mittelpunkt und behaupten, dass der wahre Konvergenzradius derselben nicht kleiner sein kann, als der Radius der Kreisscheibe. Denn am Rande des wahren Konvergenzkreises liegt wenigstens ein solcher Punkt, dass $f(z)$ über denselben hinaus nicht fortgesetzt werden kann. Da nun die Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ auf der ganzen Kreisscheibe konvergiert, so definiert dieselbe eine auf der Scheibe eindeutige reguläre Funktion, welche in der Umgebung des Mittelpunktes mit $f(z)$ übereinstimmt, und folglich die Fortsetzungen von $f(z)$ liefert. Dieselbe Schlussweise lässt auch den einfachen Zusammenhang der ganzen endlichen Ebene erkennen.

2. Wir betrachten nun ein Gebiet G, welches den unendlichfernen Punkt nicht enthalten soll, sonst aber ganz beliebig ist, und bezeichnen mit $\Sigma(G)$ die Gesamtheit der (i. A. mehrdeutigen) Funktionen, welche längs aller Wege in G regulär fortgesetzt werden können. Eine solche Funktion heisst schlicht, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Ist $A(z)$ ein Element von $f(z)$ mit dem Mittelpunkte a, und $B(z)$ ein Element mit dem Mittelpunkte b, so ist immer $A(a) \neq B(b)$, wenn $a \neq b$ ist. Man sieht sofort: ist $f(z)$ schlicht in G, und sind $A_1(z)$ und $A_2(z)$ zwei nicht identische Elemente von $f(z)$ mit demselben Mittelpunkte a, so ist $A_1(a) \neq A_2(a)$. Ist ferner T das Gebiet der von $f(z)$ in G angenommenen Werte, so ist die Umkehrfunktion von $f(z)$ in T eindeutig.

Ist $f(z)$ schlicht in G, und ist ihr Wertegebiet einfach zusammenhängend, so heisst $f(z)$ eine *Uniformisierende* von G. Die fundamentale Eigenschaft einer solchen besteht im folgenden. Sei a ein Punkt von G, $A(z)$ ein Element von $f(z)$ mit diesem Mittelpunkte, und $F(z)$ ein Funktionselement mit demselben Mittelpunkte, welches längs aller Wege in G regulär fortgesetzt werden kann. Das Wertegebiet von $f(z)$ heisse wieder T, wir denken uns dasselbe in einer x-Ebene gelegen. Durch $x = A(z)$ wird die Umgebung von a ein-eindeutig konform auf eine Umgebung von $A(a)$ abgebildet, und wenn wir $F(z)$ mit hinüberpflanzen, so erhalten wir eine in dieser Umgebung eindeutige reguläre Funktion $\Phi(x)$. Da die Umkehrfunktion von $f(z)$ in T eindeutig ist, und $A(z)$, $F(z)$ in G überall fortgesetzt werden können, so ergibt sich sofort, dass $\Phi(x)$ längs aller Wege in T fortgesetzt werden kann. Weil aber nach Voraussetzung T einfach zusammenhängt, so folgt hieraus, dass $\Phi(x)$ in T eindeutig ist. In der Umgebung des Punktes a besteht aber die Gleichung:

$$F(z) = \Phi[f(z)],$$

und diese bleibt bestehen, wenn $f(z)$ und $F(z)$ in G simultan fortgesetzt werden. Diese Tatsache pflegt man kurz so auszudrücken, dass alle in G überall fortsetzbare, i. A. mehrdeutige Funktionen eindeutige Funktionen der Uniformisierenden $f(z)$ sind.

Sei wieder a ein Punkt von G, und $f_1(z), f_2(z)$ zwei Funktionselemente mit diesem Mittelpunkte, welche zu Uniformisierenden von G gehören. Mit T_1, T_2 bezeichnen wir die Wertegebiete dieser Uniformisierenden, wobei diese Gebiete in der x-Ebene liegen sollen. Man hat dann, wie wir gesehen haben:

$$f_1(z) = \Phi_2[f_2(z)], \; f_2(z) = \Phi_1[f_1(z)],$$

wo $\Phi_1(x)$ in T_1, $\Phi_2(x)$ in T_2 eindeutig und regulär ist. Da Φ_1 und Φ_2 inverse Funktionen voneinander und beide eindeutig sind, so folgt sogleich, dass durch diese Funktionen die Gebiete T_1 und T_2 ein-eindeutig konform aufeinander abgebildet werden.

3. Eine Uniformisierende, deren Wertegebiet mit dem Innern des Einheitskreises oder mit der ganzen endlichen Ebene identisch ist, heisst eine *Grenzkreisuniformisierende* von G. Die durch eine solche bewirkte Abbildung heisst *Fundamentalabbildung*. Wenn man beachtet, dass die endliche Ebene keine konforme Abbildung auf das Innere des Einheitskreises gestattet, und dass die konformen Abbildungen der genannten Gebiete in sich lineare Transformationen sind, so erhält man durch Anwendung der Resultate in 2. die folgenden Sätze:

Sind $f_1(z), f_2(z)$ zwei Grenzkreisuniformisierende von G, so bilden sie G beide auf das Innere des Einheitskreises oder beide auf die ganze endliche Ebene ab.

Seien $f_1(z), f_2(z)$ Elemente (mit demselben Mittelpunkte) von zwei Grenzkreisuniformisierenden. Erfolgt die Fundamentalabbildung auf die endliche Ebene, so ist $f_2 = af_1 + b$, wo a, b Konstanten sind. Erfolgt die Fundamentalabbildung auf das Innere des Einheitskreises, so ist

$$f_2 = \frac{af_1 + b}{cf_1 + d},$$

wo $\frac{ax+b}{cx+d}$ den Einheitskreis in sich transformiert.

Bedeuten $f_1(z), f_2(z)$ zwei Elemente mit demselben Mittelpunkte derselben Grenzkreisuniformisierenden, so ergibt die Anwendung dieser beiden Sätze, dass diese Elemente lineare Funktionen voneinander sind, was man kurz so auszudrücken pflegt, dass die Grenzkreisuniformisierende eine *linear polymorphe Funktion* ist. Auch erhält man sofort die bezüglichen Unitätssätze.

4. Was nun die Fundamentalabbildung anbelangt, so können wir dieselbe direkt angeben, wenn G die ganze endliche Ebene oder die endliche Ebene mit Ausnahme eines Punktes, etwa des Nullpunktes, ist. Im ersten Falle wird sie durch die Funktion z, im zweiten durch $\log z$ geliefert. Damit sind aber auch alle Fälle erschöpft, wo die Fundamentalabbildung auf die endliche Ebene erfolgt. Sobald G wenigstens zwei endliche Randpunkte hat, erfolgt die Abbildung auf das Innere des Einheitskreises. Um diese Fallunterscheidung treffen zu können, macht Herr *Koebe*[3]) von der Modulfunktion Gebrauch, die er durch die konforme Abbildung des Spitzendreiecks in der üblichen Weise gewinnt. Wir werden nicht mit der Modulfunktion, sondern mit dem *Schottky*schen Satze arbeiten. Dieser Satz kann bekanntlich in wenigen Worten bewiesen werden, wenn man einmal im Besitze der Modulfunktion ist. Wir stellen uns aber vor, wir hätten denselben durch die elementaren Betrachtungen gewonnen, welche Herr *Schottky*[4]) selbst zum Beweise seines Satzes verwendet hatte. Dadurch wird nämlich unser Existenzbeweis vollkommen unabhängig von dem Existenzsatze für einfach zusammenhängende Gebiete. — Den *Schottky*schen Satz werden wir in der folgenden Form gebrauchen: Sei a ein fester, von $0, 1, \infty$ verschiedener Wert. Es gibt dann eine positive Konstante M mit der folgenden Eigenschaft: Ist $g(z)$ in einem Kreise regulär, von Null und 1 verschieden und im Mittelpunkte gleich a, so gilt im halb so grossen konzentrischen Kreise die Abschätzung $|f(z)| < M$.

§ 2.

Der Existenzbeweis.

Wir kommen nun zu unserem eigentlichen Gegenstande, indem wir folgenden Satz beweisen:

Sei G ein Gebiet in der komplexen Zahlenebene, welches die Punkte $0, 1, \infty$ nicht enthält. Sei ferner a ein Punkt in G. Dann gibt es ein Funktionselement $f(z)$ mit dem Mittelpunkte a, welches längs aller Wege in G fortgesetzt werden kann, in G schlicht ist, und deren Wertegebiet mit dem Innern des Einheitskreises identisch ist. Man kann noch verlangen, dass $f(a) = 0$, $f'(a)$ reell und positiv sei, dann ist das Element $f(z)$ eindeutig bestimmt.

---

3) *Koebe*, l. c. 1) Abh. II.

4) *F. Schottky*, Problematische Punkte und die elementaren Sätze, die zum Beweise des Picardschen Theorems dienen, Journal für Math. Bd. 147.

Um a als Mittelpunkt zeichnen wir einen Kreis mit einem Halbmesser ϱ, welcher ganz in G liegt, und betrachten die Gesamtheit der Funktionselemente $f(z)$ mit dem Mittelpunkte a, welche in G überall fortgesetzt werden können, in G schlicht sind, absolut kleiner als 1 bleiben in G, und welche gemäss $f(a)=0, f'(a)>0$ normiert sind. Diese Gesamtheit bezeichnen wir mit $\Sigma(G)$.

Die erste Frage ist, ob es überhaupt solche Funktionselemente gibt. Ist G beschränkt, so wird $z-a$, dividiert durch eine hinreichend grosse positive Konstante, ein solches Element liefern. Wenn aber G nur isolierte Randpunkte hat, so wird man solche Elemente unmittelbar nicht angeben können. Dies ist eben der Umstand, welcher entweder die Modulfunktion, oder die Anwendung des *Schottky*schen Satzes nötig macht.

1. Wir nehmen fürs erste an, $\Sigma(G)$ sei nicht leer. Ist dann $f(z)$ ein Element in $\Sigma(G)$, so wird wegen $|f(z)|<1$ und wegen der Regularität von $f(z)$ im Kreise $|z-a|<\varrho$ für $f'(a)$ die Ungleichung $f'(a)<\frac{1}{\varrho}$ gelten. Wenn nun $f(z)$ alle Elemente in $\Sigma(G)$ durchläuft, so hat $f'(a)$ eine endliche obere Grenze, die mit $\lambda(G)$ bezeichnet werden soll.

Es sei $f(z)$ ein Element von $\Sigma(G)$. Das Wertegebiet desselben (d. i. die Gesamtheit der Werte, welches es in G annimmt) liegt ganz im Einheitskreise Wenn $f(z)$ nicht gerade die gesuchte Grenzkreisuniformisierende ist, so wird dieses Wertegebiet das Innere des Einheitskreises nicht ausfüllen. Wir können dann mit Hilfe der *Carathéodory-Koebe*schen Quadratwurzeltransformation aus $f(z)$ ein Element $F(z)$ von $\Sigma(G)$ ableiten, für welche $F'(a)>f'(a)$ gilt, und zwar auf die folgende Weise. Wir führen der Reihe nach folgende Funktionselemente ein, welche a zum Mittelpunkte haben und in G überall fortgesetzt werden können, wobei sie absolut kleiner als 1 bleiben.

Sei $\beta e^{i\varphi}$ mit $0<\beta<1$ ein Wert, welchen $f(z)$ in G nicht annimmt. Dann setzen wir:

$$f_1(z) \quad \frac{1}{e^{i\varphi}} f(z)\,;\; f_2(z)=\frac{f_1(z)-\beta}{\beta f_1(z)-1}\,;\; f_3(z)^2=f_2(z),\, f_3(0)=\beta^{1/2}\,;$$

$$f_4(z)=\frac{f_3(z)-\beta^{1/2}}{\beta^{1/2} f_3(z)-1}.$$

Bezüglich $f_3(z)$ ist zu bemerken, dass dieselbe deswegen in G überall fortsetzbar ist, weil daselbst $f_2(z)$ nirgends verschwindet. Alle diese Elemente sind offenbar schlicht in G.

Nach einer einfachen Rechnung erhält man:

$$f_4'(a) = \frac{\beta+1}{2\beta^{1/2}} \frac{1}{e^{i\varphi}} f'(a) \dots \quad S)$$

Demzufolge wird

$$F(z) = e^{i\varphi} f_4(z)$$

ein Element von $\Sigma(G)$ sein. Wegen $0 < \beta < 1$ ist $\frac{\beta+1}{2\beta^{1/2}} > 1$, folglich $F'(a) > f'(a)$, wie wir es haben wollten.

Das soeben erhaltene Resultat wollen wir noch dazu verwenden, eine Abschätzung für $\lambda(G)$ zu erhalten. Aus der Erklärung von $\lambda(G)$ folgt, dass wir in $\Sigma(G)$ ein Element $f(z)$ finden können, für welche $f'(a) > {}^4/_5\, \lambda(G)$ ist. Wir behaupten, dass das Wertegebiet dieses Elementes die Kreisscheibe $|x| < {}^1/_4$ im Innern enthält. Sei nämlich wieder $\beta e^{i\varphi}$ ein Wert, welchen $f(z)$ in G nicht annimmt. Wenn in $S)$ $f(z)$ dieses Element bedeutet, so werden wir haben

$$\lambda(G) \geqq F'(0) = \frac{\beta+1}{2\beta^{1/2}} f'(0) > \frac{\beta+1}{2\beta^{1/2}} \frac{4}{5} \lambda(G)$$

also:

$$\frac{\beta+1}{2\beta^{1/2}} < \frac{5}{4},$$

woraus $\beta > {}^1/_4$ folgt, w. z. b. w. Die Umkehrfunktion $\varphi(x)$ von $f(z)$ ist also im Kreise $|x| < {}^1/_4$ regulär, im Mittelpunkte gleich a, und in diesem Kreise von 0 und 1 verschieden. Im Kreise $|x| < {}^1/_8$ haben wir folglich nach dem *Schottky*schen Satze $|\varphi(x)| < M$, woraus $\varphi'(0) < 8M$ und wegen $f'(a) = \frac{1}{\varphi'(0)}$ schliesslich die gewünschte Abschätzung

$$\lambda(G) > \frac{1}{8M}$$

folgt.

2. Wie bereits erwähnt, wird man im Allgemeinen unmittelbar nicht sagen können, ob $\Sigma(G)$ leer ist oder nicht. Wir gehen nun daran, ein Element von $\Sigma(G)$ anzugeben, und zwar werden wir sofort die gesuchte Grenzkreisuniformisierende erhalten.

Wir schlagen um a als Mittelpunkt Kreise mit monoton ins Unendliche wachsenden Radien $R_1, R_2, \dots R_n, \dots$ Die gemeinschaftlichen Punkte von G und des Kreises mit dem Radius R_n bilden eine Punktmenge, welche in Gebiete zerfällt. Dasjenige dieser Gebiete, welches den Punkt a enthält, bezeichnen wir mit G_n. Da die Gebiete G_n beschränkt sind, so sind $\Sigma(G_1)$, $\Sigma(G_2), \ldots$ sicher nicht leer, und $\lambda(G_1)$, $\lambda(G_2), \ldots$ sind wohlbestimmte positive Zahlen, für welche die Ungleichung $\lambda(G_n) > \frac{1}{8M}$ gilt. Aus $\Sigma(G_n)$ greifen wir nun ein Element $f_n(z)$ heraus, für welches

$$\lambda(G_n) - f'_n(a) < \frac{1}{n}$$

ist. Auf diese Weise erhalten wir die Folge:

$$f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z), \ldots$$

deren Glieder im Kreise $|z-a| < \varrho$ regulär und absolut kleiner als 1 sind. Diese Folge enthält nun (nach dem *Montel*schen Satze) eine gleichmässig konvergente Teilfolge, die der Einfachheit halber ebenfalls mit $f_1, f_2, \ldots$ bezeichnet werden möge. Die Grenzfunktion bezeichnen wir mit $f(z)$ und behaupten, dass dieselbe ein Element von $\Sigma(G)$ ist, welches gerade zur gesuchten Grenzkreisuniformisierenden führt.

Zunächst stellen wir fest, dass $f(z)$ keine Konstante ist. Es ist nämlich $f'(a) > \frac{1}{8M}$, weil nach $S)$ $f'(a) = \lim f'_n(a) = \lim \lambda(G_n)$ ist und alle $\lambda(G_n)$ grösser als $\frac{1}{8M}$ sind. Nun wollen wir weiter zeigen, dass $f(z)$ längs aller Wege in G fortgesetzt werden kann. Sei nämlich L ein vom Punkte a zu einem Punkte b führender Weg, welcher ganz innerhalb G verläuft. Wenn n gross genug ist, so wird L ganz in G_n enthalten sein. Die Funktionselemente $f_n, f_{n+1}, \ldots$ können dann alle längs L fortgesetzt werden, wobei sie immer absolut kleiner als 1 bleiben. Da aber die Ausgangselemente gleichmässig konvergieren, so schliessen wir aus dem *Stieltjes*schen Satze, dass die simultanen Fortsetzungen ebenfalls gleichmässig konvergieren. Die Grenzfunktion der simultanen Fortsetzungen liefert aber offenbar die analytische Fortsetzung der Grenzfunktion $f(z)$ der Ausgangselemente. Wir können auch gleich einsehen, dass $f(z)$ in G schlicht ist. Seien nämlich c und d zwei verschiedene Punkte in G, $C(z)$ und $D(z)$ Elemente von $f(z)$ mit diesen Mittelpunkten. Dann ist nach dem soeben Gesagten $C(z)$ die gleichmässige Grenzfunktion einer Folge von Funktionselementen

$C_1(z), C_2(z), \ldots$ mit dem Mittelpunkte c, welche durch simultane Fortsetzung von $f_1(z), f_2(z), \ldots$ längs eines von a nach c führenden Weges L_C erhalten werden. Ebenso ist $D(z)$ die gleichmässige Grenze einer Folge von Funktionselementen $D_1(z), D_2(z), \ldots$ mit dem Mittelpunkte d, welche durch simultane Fortsetzung längs eines Weges L_D zustande kommen. Wir betrachten nur grosse Werte von n, für welche die beiden Wege L_C, L_D in G_n enthalten sind. Um den Punkt c schlagen wir einen kleinen Kreis, um den Punkt d einen zweiten, so dass diese Kreise einander ausschliessen. Da $C(z)$ und $D(z)$ nicht konstant sind, so wird nach dem *Hurwitz*schen Satze für genügend grosses n $C_n(c') = C(c)$ für einen Punkt c' im ersteren Kreise, und $D_n(d') = D(d)$ für einen Punkt d' im zweiten Kreise sein, wo also $c' \neq d'$ ist. Aus $C(c) = D(d)$ würde dann $C_n(c') = D_n(d')$ folgen, was der vorausgesetzten Schlichtheit von $f_n(z)$ widerspricht. Folglich ist $f(z)$ schlicht in G. Sie bleibt dort kleiner als 1, weil dies für alle $f_n(z)$ der Fall ist und somit ist $f(z)$ ein Element von $\Sigma(G)$.

Da nun $\Sigma(G)$ nicht leer ist, so ist $\lambda(G)$ eine wohlbestimmte Zahl. Da jedes Element von $\Sigma(G)$ auch Element von $\Sigma(G_n)$ ist, weil ja G_n Teilgebiet von G ist, so ist offenbar $\lambda(G) \leqq \lambda(G_n)$. Nach der Erklärung von $\lambda(G)$ ist aber $\lambda(G) \geqq f'(a)$, also:

$$\lambda(G_n) \geqq \lambda(G) \geqq f'(a) = \lim f'_n(a).$$

Wegen $\lim \lambda(G_n) = \lim f'_n(a)$ folgt hieraus schliesslich $f'(a) = \lambda(G)$. Daraus folgt aber, dass das Wertegebiet von $f(z)$ das Innere des Einheitskreises ausfüllt. Sonst könnten wir nach einer früheren Bemerkung aus $f(z)$ ein Element $F(z)$ von $\Sigma(G)$ ableiten, für welches $F'(a) > f'(a) = \lambda(G)$ wäre.

Damit ist bewiesen, dass die Fundamentalabbildung existiert und dass dieselbe auf das Innere des Einheitskreises erfolgt.

§ 3.

Über einfach zusammenhängende Gebiete.

1. Sei G ein Gebiet der komplexen Zahlenebene, welches den unendlichfernen Punkt nicht enthält. Es gibt dann verschiedene Kriterien für den einfachen Zusammenhang desselben. Man kann das Verhalten des Gebietes in Bezug auf Querschnitte betrachten, oder mit Herrn *Weyl*[5]) die Überlagerungsflächen desselben in

[5]) *H. Weyl*, Die Idee der Riemannschen Fläche, § 9.

Betracht ziehen, oder mit Herrn *Bieberbach*[6]) zuschauen, ob die Fundamentalabbildung eindeutig ist oder nicht.

Die für die Funktionentheorie wichtige Eigenschaft der einfach zusammenhängenden Gebiete ist aber die, dass für sie der *Monodromiesatz* gilt: jedes Funktionselement, welches in einem einfach zusammenhängenden Gebiete überall fortgesetzt werden kann, führt zu einer im ganzen Gebiete eindeutigen regulären Funktion. Man kann es also versuchen, das einfach zusammenhängende Gebiet direkt durch diese Eigenschaft zu erklären und zuschauen, wie weit man dann rein funktionentheoretisch kommen kann.

Da wir die Existenz der Fundamentalabbildung bereits bewiesen haben, so können wir zunächst behaupten, dass jedes einfach zusammenhängendes Gebiet ein-eindeutig konform auf die endliche Ebene oder auf das Innere des Einheitskreises abgebildet werden kann, denn diese Ein-eindeutigkeit folgt direkt aus der Erklärung des einfachen Zusammenhanges. Wenn das vorgelegte Gebiet nicht die endliche Ebene ist, so liegt der zweite Fall vor, denn das Gebiet muss dann wenigstens zwei endliche Randpunkte haben. Hätte es nämlich einen einzigen endlichen Randpunkt, etwa den Punkt $z=0$, so wäre $\log z$ eine im ganzen Gebiete fortsetzbare und doch nicht eindeutige Funktion.

2. Wenn nun ein Gebiet G vorgelegt wird, so entsteht die Frage, wie man entscheiden kann, ob dasselbe einfach zusammenhängt oder nicht. Für die Kreisscheibe haben wir diese Entscheidung auf die Tatsache gegründet, dass am Rande des wahren Konvergenzkreises einer Potenzreihe wenigstens ein singulärer Punkt liegt. Es gibt dann Gebiete, welche durch elementare Funktionen auf die Kreisscheibe abgebildet werden können, z. B. der Kreissektor, der Parallelstreifen. Diese hängen ebenfalls einfach zusammen. Dasselbe gilt von Gebieten, die aus zwei solchen Gebieten so zusammengesetzt werden, dass ihr gemeinsamer Teil *ein einziges Gebiet* ist. Unserer gegenwärtigen Auffassung entsprechend können wir dies etwa wie folgt einsehen: Mit G_1 und G_2 bezeichnen wir die beiden Gebiete, die vereinigt werden sollen, mit G das aus den beiden zusammengesetzte Gebiet, und mit T die Menge ihrer gemeinsamen Punkte, wo also T nach Voraussetzung ein einziges Gebiet bildet. Hierauf betrachten wir ein

[6]) *Bieberbach*, l. c. [2])

Funktionselement $f(z)$, dessen Mittelpunkt in T liegt und welches in G überall fortsetzbar ist. Beschränken wir uns bei dieser Fortsetzung zunächst auf das Gebiet G_1, so erhalten wir wegen des einfachen Zusammenhanges von G_1 eine in G_1 eindeutige reguläre Funktion $F_1(z)$, und ebenso bekommen wir in G_2 eine eindeutige Funktion $F_2(z)$, wobei diese Funktionen in der Umgebung des Mittelpunktes von $f(z)$ mit $f(z)$ übereinstimmen. Da aber T zusammenhängt, so gilt $F_1(z) = F_2(z)$ nicht nur in dieser Umgebung, sondern in T überhaupt, so dass $F_1(z)$, $F_2(z)$ zusammen eine im ganzen Gebiete G eindeutige Funktion $F(z)$ liefern, welche dann die analytische Fortsetzung von $f(z)$ bildet. Damit ist der einfache Zusammenhang von G erwiesen.

Um eine einfache Anwendung zu zeigen, wollen wir das Innere eines Quadrates betrachten. Dieses Gebiet kann aus zwei Kreissektoren zusammengesetzt werden, welche zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Quadrates zum Mittelpunkte haben und deren Öffnung gleich $\pi/2$ ist. Das Quadratinnere hängt also einfach zusammen und kann folglich auf eine Kreisscheibe abgebildet werden.

Nach unserer Auffassung ist also die Feststellung des einfachen Zusammenhanges als ein funktionentheoretisches Problem zu behandeln. Auf diese Weise entstehen dann Probleme, von welchen ich das folgende anführen möchte. Es seien G_1, G_2 zwei einfach zusammenhängende endliche Gebiete der Zahlenebene, welche gemeinsame Punkte besitzen. Die Menge ihrer gemeinschaftlichen Punkte zerfällt dann in Gebiete, welche alle einfach zusammenhängend sind. Es ist mir nicht gelungen, diese einfache Tatsache in rein funktionentheoretischer Weise zu begründen, ich denke aber, dass eine solche Begründung zu interessanten Betrachtungen Anlass geben würde.