Ein Problem von Dedekind.

Von Öystein Ore in Kristiania.

Es seien zwei Systeme von positiven, ganzen rationalen Zahlen

$$m_1, m_2, \ldots m_r \tag{1}$$

$$l_1, l_2, \ldots l_r \tag{2}$$

so gegeben, dass

$$m_1 l_1 + m_2 l_2 + \ldots + m_r l_r = n \tag{3}$$

sei. Es kann dann das folgende Problem gestellt werden:

Man soll alle algebraische Körper n-ten Grades bestimmen, in denen eine gegebene Primzahl p die Primidealzerlegung

$$p = \mathfrak{p}_1^{l_1} \mathfrak{p}_2^{l_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{l_r} \tag{4}$$

besitzt, wobei $N\mathfrak{p}_i = p^{m_i}$ *ist.*

Diese Aufgabe, welche Herr Bauer nach Dedekind benannt hat, wurde von Herrn Bauer[1]) für den Spezialfall

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_r = 1$$

behandelt und vollständig gelöst. In dieser Note möchte ich zeigen wie man das allgemeine Problem in Angriff nehmen kann, und auch diesen Fall vollständig erledigen. In meiner Arbeit „Zur Theorie der algebraischen Körper“ (Kap. IV. § 6)[2]) habe ich gezeigt, dass immer ein Körper von der gewünschten Art existiert, d. h., dass die Dedekindsche Aufgabe immer lösbar ist. Im Folgenden sollen allgemein die gesuchten Körper dadurch bestimmt werden, dass man die Form einer erzeugenden Gleichung des Körpers angibt.

Es seien

$$m^{(1)}, m^{(2)}, \ldots m^{(s)}$$

---

1) M. Bauer: Über ein Problem von Dedekind diese Zeitschrift, Bd 1.

2) Acta mathematica Bd. 44.

die verschiedenen unter den Zahlen (1) und

$$l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \ldots l_{r_i}^{(i)} \tag{5}$$

die Exponenten in (4), wofür die Grade der zugehörigen Primideale $\mathfrak{p}_\gamma^{(i)}$ gleich $m^{(i)}$ sind. Setzt man dann

$$l_1^{(i)} + l_2^{(i)} + \ldots + l_{r_i}^{(i)} = \lambda^{(i)} \tag{6}$$

so geht (3) in

$$m^{(1)}\lambda^{(1)} + m^{(2)}\lambda^{(2)} + \ldots + m^{(s)}\lambda^{(s)} = n \tag{7}$$

über. Die Primidealzerlegung (4) von p kann man dann auch in der Form

$$p = \prod_{i=1}^{s} \left(\mathfrak{p}_1^{(i)\, l_1^{(i)}} \mathfrak{p}_2^{(i)\, l_2^{(i)}} \ldots \mathfrak{p}_{r_i}^{(i)\, l_{r_i}^{(i)}} \right)$$

schreiben, wo also $N\mathfrak{p}_\gamma^{(i)} = p^{m^{(i)}}$ ist.

Zu den Zahlen (5) kann man nun eine Reihe von anderen positiven, ganzen rationalen Zahlen

$$h_1^{(i)}, h_2^{(i)}, \ldots h_{r_i}^{(i)} \tag{8}$$

so bestimmen, dass immer $h_\gamma^{(i)}$ zu $l_\gamma^{(i)}$ relativ prim ist, und ausserdem

$$\frac{h_1^{(i)}}{l_1^{(i)}} < \frac{h_2^{(i)}}{l_2^{(i)}} < \ldots < \frac{h_{r_i}^{(i)}}{l_{r_i}^{(i)}} \tag{9}$$

ist. Weiter bestimmt man, was immer möglich ist, eine Reihe von Primfunktionen (mod p)

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots \varphi_s(x),$$

so dass der Grad von $\varphi_i(x)$ gleich $m^{(i)}$ ist.

Wenn nun in einem Körper $P(\vartheta)$ n-ten Grades die Zerlegung (4) bestehen soll, so kann man, wie ich in der Arbeit: „Weitere Untersuchungen zur Theorie der algebraischen Körper"[3]) gezeigt habe, immer eine solche primitive Zahl Θ des Körpers bestimmen, dass $\varphi_i(\Theta)$ $(i = 1, 2, \ldots s)$ durch das Primideal $\mathfrak{p}_\gamma^{(i)}$ genau in der Potenz $\mathfrak{p}_\gamma^{(i)\, h_\gamma^{(i)}}$ $(\gamma = 1, 2, \ldots r_i)$ teilbar wird.

Bildet man nun die Gleichung $F(x) = 0$, welcher diese Zahl Θ genügt, so folgt daraus, wie in der letzterwähnten Abhandlung gezeigt worden ist, dass $F(x)$ die beiden folgenden Eigenschaften besitzen muss:

I. Man hat

$$F(x) \equiv \varphi_1(x)^{\lambda^{(1)}} \varphi_1(x)^{\lambda^{(2)}} \ldots \varphi_s(x)^{\lambda^{(s)}} \pmod{p}.$$

[3]) Die Arbeit wird in den Acta mathematica Bd. 45 erscheinen.

II. Das Hauptpolygon $(p, \varphi_l(x))$ von $F(x)$[4]) besteht aus r_l Seiten, für welche die Projektionen auf die X-Achse bzw. Y-Achse gleich

$$l_1^{(l)}, l_2^{(l)}, \ldots l_{r_l}^{(l)}$$
$$h_1^{(l)}, h_2^{(l)}, \ldots h_{r_l}^{(l)}$$

sind.

Wenn also in einem Körper $P(\vartheta)$ die Zerlegung (4) besteht, so muss es auch für diesen Körper mindestens eine erzeugende Gleichung $F(x) = 0$ geben, wofür die beiden Bedingungen I und II erfüllt sind. Umgekehrt folgt aber auch[5]), dass jede irreduzible Gleichung $F(x) = 0$, für welche diese Bedingungen erfüllt sind, einen algebraischen Körper $P(\Theta) = P(\vartheta)$ definiert, in dem die Primidealzerlegung (4) für die Primzahl p besteht.

Man kann das Ganze folgendermassen zusammenfassen:

Die Lösung der Dedekindschen Aufgabe wird durch alle Körper n-ten Grades geliefert, für die es eine irreduzible, erzeugende Gleichung $F(x) = 0$ gibt, welche den Bedingungen I und II genügt.

In den Forderungen I und II können die Primfunktionen $\varphi_l(x)$ beliebig vom Grade m_l gewählt werden, und weiter unterliegen die Zahlen $h_\Upsilon^{(l)}$ nur der Bedingung, dass $h_\Upsilon^{(l)}$ zu $l_\Upsilon^{(l)}$ relativ prim sei und ausserdem die Verhältnisse (9) verschieden seien. Alle irreduzible Gleichungen, welche sich aus I und II unter diesen Bedingungen ergeben, definieren Körper $P(\vartheta)$, in denen die Zerlegung (4) besteht. Wie man aber leicht sieht, erhält man auch alle Körper dieser Art, wenn man die Primfunktionen $\varphi_l(x)$ und die Zahlen $h_\Upsilon^{(l)}$ als fest gegeben annimmt.

---

[4]) Ich wende hier die Bezeichnungen der unter [2]) zitierten Arbeit an.
[5]) Man sehe die in [2]) zitierte Arbeit, Kap. IV.