Sur les rapports topologiques d'un problème d'analyse combinatoire.

Par Dénes König à Budapest.

§ 1.

Nos considérations se rapporteront à certaines matrices

$$\| a_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} \|$$
$$(i_1, i_2, \ldots, i_\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

à ν dimensions et d'ordre n, constituées par les éléments $a_{i_1 i_2 \ldots i_\nu}$ en nombre n^ν. Si n de ces éléments ne diffèrent entre eux que par l' α-ième indice, nous dirons qu'ils forment une *ligne* de la matrice $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$. Le nombre des lignes de la même „direction" α est évidemment $n^{\nu-1}$, donc le nombre total des lignes est $\nu n^{\nu-1}$. En additionnant les éléments correspondants de deux ou de plusieurs matrices de même dimension et de même ordre, on obtient une matrice qui sera appelée la *somme* des premières:

$$\| a_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} \| + \| b_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} \| + \ldots = \| a_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} + b_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} + \ldots \|$$
$$(i_1, i_2, \ldots, i_\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous supposerons dans ce qui suit que les éléments sont des nombres entiers non négatifs.

Si la somme des éléments de chaque ligne est le même nombre $d\,(>0)$, la matrice sera appelée *régulière* et du *degré* d.[1]) Les matrices du premier degré joueront un rôle essentiel; elles peuvent être caractérisées par le fait que toute ligne contient un

---

[1]) Les matrices régulières sont les seules auxquelles nous attribuons un „degré". Les termes „ordre", „degré", „régulier" sont choisis de telle façon qu'ils correspondent pour $\nu = 2$ à la terminologie employée par Petersen dans la théorie des graphes (*Acta Mathematica*, t. 15). Mais à l'*addition* des matrices quadratiques correspond chez Petersen la *multiplication* des graphes.

seul élément égal à 1, les autres éléments étant nuls. Pour $\nu = 2$ les matrices du premier degré correspondent au termes du développement d'un déterminant à n^2 éléments, leur nombre est donc $n!$. Par l'induction complète on peut facilement prouver que pour un nombre ν quelconque de dimensions il existe des matrices du premier degré et que leur nombre est $(n!)^{\nu-1}$. Voici un exemple d'une matrice du premier degré et de trois dimensions:

1		
	1	
		1

Couche 1.

	1	
		1
1		

Couche 2.

		1
1		
	1	

Couche 3.

(Dans les cases vides on suppose des zéros). Cette représentation d'une matrice à 3 dimensions, dont nous nous servirons encore plus tard, est facile à comprendre: les trois couches sont considérées comme placées l'une sur l'autre.

D'après la définition, donnée plus haut, de l'addition des matrices, la somme de deux ou de plusieurs matrices régulières, de même dimension et de même ordre, est également une matrice régulière et son degré est égale à la somme des degrés des matrices additionnées. On a en particulier:

En additionnant des matrices du premier degré (de la même dimension et du même ordre), en nombre d, on obtient une matrice de degré d.

Le problème, dont nous voulons nous occuper a pour objet la réciproque de cette proposition évidente. C'est dire que nous posons la question suivante:

Étant donnée une matrice du degré d, peut-elle, oui ou non, être considérée comme la somme de matrices (en nombre d) du premier degré?

Pour le cas de $\nu = 2$ dimensions, j'ai démontré ailleurs que la réponse était toujours affirmative.[2])

[2]) J'ai énoncé ce théorème, ou plutôt son équivalent se rapportant à la théorie des graphes, dans une conférence faite au Congrès de Philosophie Mathématique à Paris (avril, 1914). Cette conférence vient de paraitre dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* (t. 30, 1923, p. 443). J'ai donné une démonstration détaillée, ainsi que des applications concernant l'Analysis situs et la théorie générale des ensembles dans les *Mathematische Annalen* (t. 77, 1916, p. 453). Une autre démonstration a été donnée plus tard par Frobenius (*Sitzungsberichte der preussischen Akademie*, 1917, p. 274). Tout dernièrement M. Sainte-Laguë, qui ne connaissait pas ma publication parue pendant la guerre, a retrouvé ce théorème (*Comptes Rendus*, t. 176, 1923, p. 1202)

Mais cela cesse d'être vrai déjà pour $\nu = 3$; c'est ce qu'on peut prouver par l'exemple de la matrice du troisième ordre que voici :

0	1	1
1	0	1
1	1	0

Couche 1.

1	1	0
1	1	0
0	0	2

Couche 2.

1	0	1
0	1	1
1	1	0

Couche 3.

On voit, que la somme des éléments d'une quelconque des 27 lignes est égale à 2; on a donc une matrice régulière du second degré. En examinant toutes les possibilités on peut vérifier que cette matrice ne peut être la somme de deux matrices du premier degré. On peut construire un tel exemple avec les seuls éléments 0 et 1 — ce qui a son importance pour certaines applications —, mais alors l'ordre sera au moins 4. Voici l'exemple ($\nu = 3$, $n = 4$, $d = 2$) :

1	1	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1
1	0	0	1

Couche 1.

1	0	0	1
0	0	1	1
0	1	1	0
1	1	0	0

Couche 2.

0	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1

Couche 3.

0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0

Couche 4.

Ici encore on peut assez facilement envisager toutes les possibilités et vérifier de la sorte que cette matrice du second degré ne peut non plus être décomposée en deux matrices du premier degré.

Comme nous avons dit plus haut, la possibilité d'une telle décomposition peut être demontrée dans le cas de $\nu = 2$, mais la démonstration cesse d'être applicable, quand le nombre des dimensions dépasse 2. Pour expliquer ce fait nous montrerons que *notre question, au moins pour $d = 2$,* **est** *intimement liée à une* proposition de l'Analysis situs qui, elle non plus, n'est vraie que pour le plus petit nombre possible de dimensions. En effet, tandis que toutes les variétés à une dimension (c'est-à-dire les lignes) sont *bilatères,* on trouve parmi les variétés à deux dimensions (ce sont les surfaces) et à plusieurs dimensions, et cela quel que soit le nombre des dimensions (> 1), des variétés *unilatères*. Dans le § 2 nous ferons voir la relation entre notre question purement combinatoire et les considérations topologiques concernant le caractère unilatère on bilatère des variétés à deux ou à plusieurs dimensions, deux groupes de problèmes qui, à première vue, semblent bien éloignés l'un de l'autre.

§ 2.

Soit d'abord le nombre des dimensions $\nu = 2$. On peut faire correspondre à chaque matrice quadratique

$$\| a_{ij} \|$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

un *graphe* (assemblage, réseau, complexe de lignes) qui, au sens de l'Analysis situs, est parfaitement déterminé, et cela de la manière suivante.[3]) On fait correspondre aux lignes (des deux directions) de la matrice deux fois n points

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ et } B_1, B_2, \ldots, B_n$$

et on joint chaque A_i à chaque B_j par a_{ij} arêtes, ce nombre pouvant être nul. Ni deux points A, ni deux B ne seront reliés. Si la matrice est régulière, le nombre des arêtes concourantes en un point (A ou B) sera le même pour chaque point. Dans ce cas le graphe est appelé *régulier* En appelant *degré* le nombre des arêtes concourantes en un point du graphe régulier, on voit que celui-ci est égal au degré de la matrice correspondante.

Si le degré de la matrice est $d = 2$, le graphe correspondant consiste d'une ou de plusieurs lignes fermées (polygones), chacune d'elles ayant un nombre *pair* de côtés (arêtes). Cette dernière propriété permet de montrer très facilement[3]) qu'une matrice quadratique du second degré se décompose toujours en deux matrices du premier degré.

Passant au cas $\nu = 3$, on peut — et cela par un procédé parfaitement analogue à celui du cas précédent — faire correspondre à chaque matrice cubique:

$$\| a_{ijk} \|$$
$$(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$$

un *complexe de surfaces*.[4]) On fait correspondre aux couches de trois positions différentes trois fois n points:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n,$$
$$B_1, B_2, \ldots, B_n,$$
$$C_1, C_2, \ldots, C_n$$

et on joint par une arête chaque couple de points qui sont désignées

[3]) Voir ma Note mentionnée, *Mathematische Annalen*, t. 77.

[4]) Pour la définition du „complexe de surfaces“ (Flächencomplex), voir l'article „Analysis situs“ de MM. Dehn et Heegaard dans l'*Encyklopädie der math. Wissenschaften*, t. III_1, p. 157.

par deux lettres différentes. On obtient ainsi un graphe G (composé de $3n$ points et de $3n^2$ arêtes), qui est évidemment régulier et de degré $2n$. Ce graphe (système de $3n^2$ arêtes) correspond au système de $2n$ points considéré dans le cas de $\nu = 2$ dimensions. Comme nous avons construit plus haut le graphe correspondant à la matrice quadratique en plaçant entre certains points un certain nombre d'arêtes (limitées par deux de ces points), maintenant nous formons le complexe de surfaces, que nous ferons correspondre à la matrice cubique, en plaçant un certain nombre de *membranes* (éléments de surface) triangulaires dans certains triangles (lignes fermées à trois arêtes) du graphe G, et cela de la manière suivante. Chaque triangle qu'on peut former des arêtes du graphe G a la forme $A_i B_j C_k$; il lui correspond donc un élément déterminé a_{ijk} de notre matrice. Nous plaçons dans chaque triangle $A_i B_j C_k$ des membranes triangulaires en nombre a_{ijk} (qui peut être nul). Les triangles sont les frontières des membranes; pour deux quelconques des membranes les points intérieurs seront considérés comme différents. Le complexe de surfaces, S, composé par ces membranes est — au sens de l'Analysis situs — parfaitement déterminé par la matrice cubique. À chaque ligne de la matrice correspond une arête de G, p. ex. l'arête correspondant à la ligne formée par les éléments

$$a_{311},\ a_{321},\ a_{331},\ a_{341},\ \ldots$$

est $A_3 C_1$. Ainsi aux éléments d'une même ligne correspondent des membranes ayant (à leur frontière) une arête commune. La régularité de la matrice s'exprime donc en disant que le nombre des membranes se rejoignant le long de la même arête est le même pour chaque arête. Dans ce cas le complexe de surfaces est appelé *régulier*. En appelant *degré* d'un complexe régulier de surfaces le nombre des membranes se rejoignant le long de la même arête, celui-ci est égal au degré d de la matrice cubique correspondante.

Nous nous occuperons du cas: $d = 2$. Dans ce cas chaque arête appartient à la frontière de deux membranes et de deux seulement. Donc: le complexe de surfaces correspondant à une matrice cubique du second degré est une *surface fermée*[5]), qui peut être connexe (d'un seul tenant) ou non.[6])

[5]) Nous employons ici le terme „surface fermée" dans un sens plus large que d'habitude. Pour qu'un complexe de surfaces soit appelé surface fermée dans la stricte acception du mot, il est aussi nécessaire que les

Dans le cas de $\nu = 3$, $d = 2$ nous pouvons maintenant donner la réponse suivante à la question posée au § 1:

Une matrice M à trois dimensions et du second degré se décompose en deux matrices du premier degré si la surface fermée F, correspondant à la matrice, est bilatère, et ne se décompose pas si cette surface est unilatère.

Pour démontrer la première partie de ce théorème, supposons d'abord que F soit bilatère. D'après la définition de Möbius cela veut dire: qu'on peut choisir le sens de parcours (une „indicatrice") pour les frontières de toutes les membranes triangulaires de telle façon que chaque arête soit parcourue dans les deux sens contraires suivant qu'on regarde cette arête comme appartenant à la frontière de l'une ou de l'autre membrane auxquelles elle appartient (Loi de Möbius). Chaque membrane est du type

$$A_i B_j C_k$$
$$(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$$

et pour chacune d'elles un des deux ordres cycliques ABC on ACB est fixé. Dans le premier cas nous dirons que la membrane appartient à la classe I, dans le second cas à la classe II. D'après la loi de Möbius, si les frontières de deux membranes ont une arête commune, l'une des deux membranes appartient à la classe I, l'autre à la classe II. On peut faire correspondre à la classe I une matrice cubique $\| b_{ijk} \|$, d'ordre n, de la façon suivante. Nous posons $b_{ijk} = 1$, s'il existe une[7]) membrane $A_i B_j C_k$ appartenant à la

membranes se rejoignant en un sommet „forment un seul cycle" (v. Dehn et Heegaard, l. c.). Ici nous avons omis ce postulat et deux (ou plusieurs) portions de notre surface fermée peuvent être reliées par un seul point (singulier), comme, p. ex., les deux moitiés d'un cône. Mais cette différence n'a pas d'importance et ne compromet pas nos raisonnements ultérieurs, y compris ceux qui se rapporteront à la question du caractère unilatère on bilatère des surfaces. On peut, en effet, séparer ces portions de surface n'ayant en commun qu'un point isolé. Les surfaces obtenues ainsi sont des surfaces fermées dans le sens strict, et on peut remplacer par elles les surfaces fermées du texte.

[6]) La surface n'est certainement pas connexe p. ex. si, en supposant $n > 1$, un élément de la matrice est 2. On a alors deux membranes bornées par le même triangle et ces deux membranes forment — au sens de l'Analysis situs — une sphère, qui n'est contiguë à aucune autre portion de la surface.

[7]) La surface peut avoir deux membranes désignées par le même signe $A_i B_j C_k$ (v. la note précédente).

classe I; dans tout autre cas on pose $b_{ijk}=0$. La matrice $\| b_{ijk} \|$ ainsi définie est du premier degré, car, notre surface étant fermée, chaque arête appartient à une membrane de la classe I et à une seule, ce qui veut dire pour la matrice $\| b_{ijk} \|$ que dans chaque ligne il y a un élément égal à 1, les autres étant nuls. De même on peut faire correspondre à la classe II une matrice cubique $\| c_{ijk} \|$ également du premier degré. Comme les classes I et II épuisent les membranes de la surface, on a

$$\| b_{ijk} \| + \| c_{ijk} \| = M$$

et M est en effet décomposé.

En passant à la deuxième partie du théorème énoncé, supposons que notre matrice M puisse être décomposée en deux matrices du premier degré:

$$M = \| a_{ijk} \| = \| b_{ijk} \| + \| c_{ijk} \|.$$

Conformément à cette décomposition on peut partager les membranes de F en deux classes, I et II. S'il n'y a qu'une membrane désignée par $A_i B_j C_k$, c'est-à-dire, si $a_{ijk}=1$, nous la mettrons dans la classe I ou II, suivant qu'on a $b_{ijk}=1$ (et $c_{ijk}=0$) ou $c_{ijk}=1$ (et $b_{ijk}=0$). S'il y a deux membranes désignées par ce même signe ($a_{ijk}=2$) nous classerons une dans I, l'autre dans II. Ainsi deux membranes contiguës suivant une arête se trouveront toujours dans des classes différentes. En faisant correspondre aux frontières des membranes de la classe I l'ordre cyclique ABC, aux autres l'ordre cyclique ACB, la loi de Möbius se trouvera satisfaite. La surface F est donc en effet bilatère et la seconde partie du théorème énoncé est également démontrée.

Si on maintient la restriction $d=2$, on peut étendre notre résultat sans difficulté nouvelle à un nombre quelconque de dimensions. Ainsi la question, pour une matrice à ν dimensions et du second degré, d'être décomposable ou non, se ramène à la question de savoir si une variété à $\nu-1$ dimensions est bilatère ou unilatère.

Budapest, le 31 octobre 1923.