Note sur „Le troisième problème du jeu".

Par M. DANIEL ARANY à Budapest.

M. LOUIS BACHELIER traite dans son ouvrage „Calcul des probabilités" (Paris, Gauthier-Villars, 1912) le problème de la théorie générale du jeu, comme il suit:

1. *On suppose deux joueurs A et B ayant chacun à leur disposition une somme illimitée, jouant un nombre déterminé* (μ) *de parties, quelle est la probabilité que A perde a unités eu μ parties?* (Premier problème du jeu, article 52. p. 33).

Soient à chaque partie, p la probabilité que le joueur A gagne et $q = 1 - p$ la probabilité, qu'il perde.

Soient k le nombre des parties gagnées, $\mu - k$ le nombre des parties perdues, on doit avoir

$$(\mu - k) - k = a$$

d'où

$$\mu = a + 2k.$$

La probabilité, que A perde a unités eu $a + 2k$ parties, est

$$\omega_{a+2k,\,a} = \binom{a+2k}{k} p^k q^{a+k} \tag{1}$$

La quantité $\omega_{a+2k,\,a}$ est assujetie à la condition, exprimée par l'équation aux différences finies suivante:

$$\omega_{a+2k,\,a} = p\,\omega_{a+1+2(k-1),\,a+1} + q\,\omega_{a-1+2k,\,a-1} \tag{2}$$

dont la condition aux limites est $\omega_{0,0} = 1$.

2. *Le joueur A, ayant à chaque partie probabilité p de gagner 1 et probabilité $q = 1 - p$ de perdre 1, quelle est la probabilité qu'il perde a unités eu $a + 2k$ parties. Le joueur A possède seulement a unités, le joueur B une somme illimitée ou simplement supérieure à k.* (Second problème du jeu, article 146. p. 106).

Désignons par $\omega_{a+k,a,a}$ la probabilité cherchée. Elle satisfait à l'équation aux différences finies suivante:

$$\omega_{a+2k,a,a} = p\,\omega_{a+1+2(k-1),a+1,a+1} + q\,\omega_{a-1+2k,a-1,a-1} \tag{3}$$

dont les conditions aux limites sont: $\omega_{0,0,0} = 1$, $\omega_{2k,0,0} = 0$.

La solution de l'équation aux différences finies (3) est:

$$\omega_{a+2k,a,a} = \frac{a}{a+2k}\binom{a+2k}{k} p^k q^{a+k}. \tag{4}$$

On déduit de l'équation (3) la valeur de l'expression $\omega_{a+2k,a,a}$ dans la forme suivante:

$$\begin{aligned} \omega_{a+2k,a,a} = {} & p\,\omega_{a+1+2(k-1),a+1,a+1} \\ & + q\,p\,\omega_{a+2(k-1),a,a} \\ & + q^2\,p\,\omega_{a-1+2(k-1),a-1,a-1} \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ & + q^{a-1}p\,\omega_{\;+2(k-1),2\;,2} \end{aligned} \tag{5}$$

Elle réduit l'expression $\omega_{a+2k,a,a}$ dite de l'ordre k, à la somme de a expressions, tous de l'ordre $k-1$, c'est-à-dire réduites d'une unité.

3. *Le joueur A possède a unités, le joueur B possède b unités; quelle est la probabilité, que le joueur perde a unités en $a+2k$ parties?* (Troisième problème du jeu, article 192. p. 136)

M. Bachelier présente la valeur de cette probabilité, que je désignerai par $\omega_{a+2k,a,a,b}$ dans la forme suivante:

$$\omega_{a+2k,a,a,b} = p^k q^{a+k} \left\{ \begin{aligned} & \varphi_{a+2k,a} && - \varphi_{a+2k,a+2b} \\ + & \varphi_{a+2k,3a+2b} && - \varphi_{a+2k,3a+4b} \\ + & \varphi_{a+2k,5a+4b} && - \varphi_{a+2k,5a+6b} \\ + & \text{etc} && - \text{etc.} \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

où $\varphi_{a+2k,a}$ est définie par l'équation:

$$\varphi_{a+2k,a} = \frac{a}{a+2k}\binom{a+2k}{k} \tag{7}$$

La série contenue dans les parenthèses de l'équation (6) s'arrête, quand $(2\lambda-1)\,a+2\lambda b$ ou $(2\lambda+1)\,a+2\lambda b$ est supérieur à $a+2k$.

4. Je veux présenter l'expression de $\omega_{a+2k,a,a,b}$ dans une forme qui n'est qu'une légère modification de celle de M. Bachelier.

Dans ce but, je pars de l'équation aux différences finies suivante:

$$\omega_{a+2k,a,a,b} = p\,\omega_{a+1+2(k-1),a+1,a+1,b-1} + q\,\omega_{a-1+2k,a-1,a-1,b+1} \tag{8}$$

dont les conditions aux limites sont: $\omega_{0,0,0,b}=1$, $\omega_{2k,0,0,b}=0$ et $\omega_{a+2k,a,a,0}=0$.

De l'équation (8) on déduit $\omega_{a+2k,a,a,b}$ dans la forme

$$
\begin{aligned}
\omega_{a+2k,a,a,b} = {} & p\,\omega_{a+1+2(k-1),a+1,a+1,b-1} \\
& + q\; p\,\omega_{a+2(k-1),a,a,b} \\
& + q^2\; p\,\omega_{a-1+2(k-1),a-1,a-1,b+1} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + q^{a-1} p\,\omega_{2+2(k-1),2,2,b+a-2}
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

Elle réduit l'expression $\omega_{a+2k,a,a,b}$ que nous dirons de l'ordre k, à la somme de a expressions, de l'ordre $k-1$, c'est-à-dire réduites d'une unité.

Si l'on choisit $k=1$, on reconnaît que

$$\omega_{a+2,a,a,b} = \omega_{a+2,a,a} \qquad (10)$$

quand $b>1$ (v. équation (5)) et que

$$\omega_{a+2,a,a,b} = \omega_{a+2,a,a} - \left(\frac{p}{q}\right)^{b} \omega_{a+2,a+2b,a+2b,a} \qquad (11)$$

quand $b=1$.

Je démontrerai, que l'équation:

$$\omega_{a+2\lambda,a,a,b} = \omega_{a+2\lambda,a,a} - \left(\frac{p}{q}\right)^{b} \omega_{a+2\lambda,a+2b,a+2b,a} \qquad (12)$$

qui est vraie pour $\lambda=1$, reste vraie de même pour $\lambda=k$, si l'on suppose qu'elle est vraie pour $\lambda=k-1$.

Dans ce but j'écrirai le système d'équations (en nombre a) suivant:

$$
\begin{aligned}
\omega_{a+2k-1,a+1,a+1,b-1} &= \omega_{a+2k-1,a+1,a+1} - \left(\frac{p}{q}\right)^{b-1} \omega_{a+2k-1,a+1+2(b-1),a+1+2(b-1),a+1} \\
\omega_{a+2k-2,a,a,b} &= \omega_{a+2k-2,a,a} - \left(\frac{p}{q}\right)^{b} \omega_{a+2k-2,a+2b,a+2b,a} \\
\omega_{a+2k-3,a-1,a-1,b+1} &= \omega_{a+2k-3,a-1,a-1} - \left(\frac{p}{q}\right)^{b+1} \omega_{a+2k-3,a-1+2(b+1),a-1+2(b+1),a-1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\omega_{a+2k-a,2,2,b+a-2} &= \omega_{a+2k-a,2,2} - \left(\frac{p}{q}\right)^{b+a-2} \omega_{a+2k-a,2+2(b+a-2),2+2(b+a-2),2}
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

En multipliant la première équation du système (13) par p, la seconde par pq, la troisième par pq^2 et la a-ième par pq^{a-1} et puis additionnant ces produits, on obtient (v. équations (5) et (9)) l'équation:

$$\omega_{a+2k,a,a,b} = \omega_{a+2k,a,a} - \left(\frac{p}{q}\right)^b \left\{ \begin{aligned} & q\,\omega_{a+2k-1,a+1+2(b-1),a+1+2(b-1),a+1} \\ & + pq\,\omega_{a+2k-2,a+2b,a+2b,a} \\ & + p^2q\,\omega_{a+2k-3,a-1+2(b+1),a-1+2(b+1),a-1} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + p^{a-1}q\,\omega_{a+2k-a,2+2(b+a-2),2+2(b+a-2),a} \end{aligned} \right\} \qquad (14)$$

Pour reconnaître que l'expression contenue dans les parenthéses de l'équation (14) est égale à $\omega_{a+2k,a+2b,a+2b,a}$, on doit former le dernier système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \omega_{a+2k,a+2b,a+2b,a} &= p\,\omega_{a+2k-1,a+2b+1,a+2b+1,a-1} + q\,\omega_{a+2k-1,a+2b-1,a+2b-1,a+1} \\ \omega_{a+2k-1,a+2b+1,a+2b+1,a-1} &= p\,\omega_{a+2k-2,a+2b+2,a+2b+2,a-2} + q\,\omega_{a+2k-2,a+2b,a+2b,a} \\ \omega_{a+2k-2,a+2b+2,a+2b+2,a-2} &= p\,\omega_{a+2k-3,a+2b+3,a+2b+3,a-3} + q\,\omega_{a+2k-3,a+2b+1,a+2b-1,a-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_{a+2k-a,a+2b+a-1,a+2b+a-1,1} &= p\,\omega_{a+2k-a,a+2b+a,a+2b+a,0} + q\,\omega_{a+2k-a,a+2b+a-2,a+2b+a-2,2} \end{aligned} \qquad (15)$$

En multipliant la seconde équation du système (15) par p, la troisième par p^2, la a-ième par p^{a-1} et puis additionnant ces produits on reconnaît enfin que la quantité contenue dans les parenthèses de l'équation (14) est égale à $\omega_{a+2k,a+2b,a+2b,a}$.

L'équation (12) réduit l'expression $\omega_{a+2k,a,a,b}$ dite de l'ordre k, à une autre ne contenant qu'une expression du même genre que $\omega_{a+2k,a,a,b}$ mais dont l'ordre est *abaissé* de b unités.

L'équation (12) fournit les mêmes résultats que celle de M. Bachelier, laquelle est représentee par l'équation (6) de cette note.

5. Si l'on désigne par

$$\omega_{a-y+2k,a-y,a,b}$$

la probabilité que le joueur A, possédant une fortune a, perde ou gagne $a-y$ unités (selon que $a-y \gtrless 0$) en $a-y+2k$ parties, le joueur B possédant une fortune de b unités, on démontre par des procédés analogues aux précédents qu'elle satisfait à l'équation :

$$\omega_{a-y+2k,a-y,a,b} = \omega_{a-y+2k,a-y,a} - \left(\frac{p}{q}\right)^b \omega_{a-y+2k,a-y+2b,a+2b,a} \qquad (16)$$

quand $k \geq b > 0$, où

$$\omega_{a-y+2k,a-y,a} = \omega_{a-y+2k,a-y} - \left(\frac{p}{q}\right)^y \omega_{a-y+2k,a+y}. \qquad (17)$$

Pour la démonstration de l'équation (17) v. article 154, p. 109—110, de l'ouvrage cité de M. Bachelier.

La fonction $\omega_{a-y+2k,a-y,a}$ est *discontinue* pour $y=0$ et on doit faire usage en ce point de l'équation (4) de cette note.

Budapest, le 14. avril 1923.