Über die Fourier-Koeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung.

Von S. SIDON in Budapest.

(Aus einem Briefe an Herrn F. Riesz)

Vor einigen Jahren bewiesen Sie,[1]) dass in der für die FOURIER-Koeffizienten einer Funktion von beschränkter Schwankung gültigen altbekannten Abschätzung a_n und $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, das O selbst bei den *stetigen* Funktionen[2]) der nämlichen Klasse nicht durch o ersetzt werden kann.

Die von Ihnen daselbst aufgeworfenen Probleme löste Herr PAUL CSILLAG[3]) mit Hilfe des folgenden Satzes, der eine Verallgemeinerung eines Resultates des Herrn L. FEJÉR[4]) ist:

Ist $\Sigma\ (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ die FOURIER-Reihe einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung, so ist im Intervalle $0 \leqq x < 2\pi$ überall

$$\lim \frac{s'_n(x)}{n} = 0,$$

wo $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ ist.

---

[1]) Über die FOURIER-Koeffizienten stetiger Funktionen von beschränkter Schwankung, Math. Zeitschrift 2 (1918), S. 312—315.

[2]) Unter einer stetigen Funktion ist hier immer eine im Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$ überall stetige, periodische Funktion zu verstehen.

[3]) Korlátos ingadozású függvények FOURIER-együtthatóiról. Math. és Phys. lapok 27 (1918), S. 301—308. Siehe auch die ebendort erschienene Note des Verfassers.

[4]) Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer FOURIER-Reihe. Journal für r. u. a. Mathematik 142 (1913), S. 165—188. Dort wird der Sprung an einer beliebigen x Stelle aus der FOURIER-Reihe der Funktion durch einen in den Koeffizienten linearen Grenzwert ausgedrückt; bei einer stetigen Funktion muss dieser Grenzwert für jedes x verschwinden.

Für $x = 0$ ergibt sich hieraus

$$1) \qquad \lim \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k b_k}{n} = 0.$$

Aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ für $x = 0$ folgt auch $\lim \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k a_k}{n} = 0$. Die arithmetischen Mittel von $(n a_n)$ und $(n b_n)$ konvergieren also gegen 0.

Gestatten Sie mir, eine Verschärfung dieses Satzes mitzuteilen. Es gilt nämlich auch der Satz:

Bei einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung bestehen die Gleichungen

$$2) \qquad \lim \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} |k a_k|}{n} = \lim \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |k b_k|}{n} = 0.$$

Beweis: Mit $\Sigma (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ zugleich sind auch $\Sigma a_n \cos nx$ und $\Sigma b_n \sin nx$ die FOURIER-Reihen stetiger Funktionen von beschränkter Schwankung. Laut eines YOUNG'schen Satzes[5]) lässt sich dies auch von den trigonometrischen Reihen $\Sigma n a_n^2 \sin nx$ und $\Sigma n b_n^2 \sin nx$ behaupten. Wenden wir auf diese letzteren Reihen 1) an, so ergibt sich

$$\lim \frac{\Sigma (k a_k)^2}{n} = \lim \frac{\Sigma (k b_k)^2}{n} = 0$$

und hieraus mit Hilfe einer sehr geläufigen Ungleichung 2). Aus 2) folgt offenbar $\overline{\lim} | n a_n | = \overline{\lim} | n b_n | = 0$. Es lässt sich sogar schliessen, dass $(n a_n)$ und $(n b_n)$ quasi gegen 0 konvergieren, d.

---

[5]) W. H. YOUNG: On FOURIER-series and fonctions of bounded variation. London Royal Soc. Proc. 88 (1913), S. 561—568. Der hier in Betracht kommende Satz lautet: Ist $\Sigma (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ die FOURIER-Reihe einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung und die trigonometrische Reihe $\Sigma (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$ durch gliedweise Differentiation der FOURIER-Reihe einer Funktion von beschränkter Schwankung entstanden, so sind auch $\Sigma \alpha_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ und $\Sigma \beta_n (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$ die FOURIER Reihen stetiger Funktionen von beschränkter Schwankung. Die Behauptung des Textes ergibt sich hieraus, wenn $\Sigma a_n \cos nx$ und $\Sigma b_n \sin nx$ mit ihren eigenen „Derivierten" auf die YOUNG'sche Weise komponiert werden.

h. die Häufigkeit der Indices, für welche $|n a_n|$ und $|n b_n| > \varepsilon$ ist, ist 0.[6])

Zum Schluss zeige ich noch, wie sich als Korrolar von 2) der folgende Satz des Herrn J. von NEUMANN[7]) herleiten lässt: Sind die Partialsummen der trigonometrischen Reihe $\Sigma (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$ nirgends negativ, so ist $\underline{\lim} |A_n| = \underline{\lim} |B_n| = 0$.

Die trigonometrische Reihe $\sum \frac{1}{n} (B_n \cos nx - A_n \sin nx)$ ist die FOURIER-Reihe einer Funktion von beschränkter Schwankung $f(x)$. Die Funktion $f(x)$ ist stetig. Hätte sie Unstetigkeitsstellen, so liesse sich schreiben:

$$f(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x - x_k)}{n} = g(x) + h(x),$$

wo $g(x)$ stetig und von beschränkter Schwankung ist, $x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$ die ja höchstens in abzählbarer Menge vorhandenen Sprungstellen von $f(x)$, $d_1, d_2, \ldots d_n \ldots$ den Betrag des Sprunges an diesen Stellen bezeichnen; bekanntlich ist $\Sigma |d_k|$ convergent. Bezeichnen wir die Partialsummen der FOURIER-Reihen von $g(x)$ und $h(x)$ mit σ_n bezw. $\tau_n(x)$, so ist

$$\lim \frac{\sigma_n'(x)}{n} = 0 \text{ und zwar gleichmässig.}$$

Ferner lassen sich in der Umgebung eines jeden x_k zwei Werte ξ_1 und ξ_2 angeben, für welche $\tau_n'(\xi_1)$ und $\tau_n'(\xi_2)$ von entgegengesetzten Vorzeichen und

$|\tau_n'(\xi_1)|$ und $|\tau_n'(\xi_2)| > cn$ (c eine von n unabhängige Konstante) sind. Diese Bedingungen erfüllen z. B. $\xi_1 = x_k + \frac{\pi}{2n+1}$ $\xi_2 = x_k + \frac{3\pi}{2n+1}$. Im Falle endlich vieler Sprunge folgt dies un-

---

6) Unter Häufigkeit ist $\lim \frac{l}{n_l}$ zu verstehen. Der Begriff der *Quasi-Konvergenz* wurde von Herrn M. FEKETE eingeführt. Vizsgálatok a FOURIER-sorokról. Math. és Term. Ért. 34 (1916), S. 759—786.

7) Von dem NEUMANN'schen Satze, der durch eine STEINHAUS'sche Fragestellung entstand und den Anlass zur vorliegenden Note gab, nahm ich durch die mündliche Mitteilung des Herrn M. FEKETE Kenntniss. Auch Herr I. SCHUR gab einen Beweis dieses Satzes, der ebenfalls von der Komposition Gebrauch macht.

mittelbar aus der bekannten Formel für $\sum_{k=0}^{n} \cos kx$; daraus folgt aber die Behauptung auch im allgemeinen Falle, wenn man berücksichtigt, dass bei hinreichend grossem K:

$$\left| \sum_{k=K}^{\infty} d_k \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\,(x-x_k) \right| < \varepsilon\, n \quad (\varepsilon \text{ beliebig klein}) \text{ ist.}$$

Die Partialsummen von $\sum (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$ würden also ihr Vorzeichen wechseln. $f(x)$ muss demzufolge stetig sein, woraus nach 2) in der Tat $\underline{\lim}\,|A_n| = \underline{\lim}\,|B_n| = 0$ folgt.
