Über die konformen Abbildungen schlichter Gebiete.

Von TIBOR RADÓ in Szeged.

Einleitung.

Wir betrachten im folgenden die konformen Abbildungen von beschränkten schlichten Gebieten, welche von einer endlichen Anzahl von geschlossenen Jordankurven begrenzt sind.[1])

Zwei Gebiete G_n und G'_n sind für $n=1$ nach dem Fundamentalsatze[2]) stets aequivalent im Sinne konformer Abbildung. Für $n \geqq 2$ ist dies hingegen im Allgemeinen nicht mehr der Fall; beispielsweise sind zwei konzentrische Kreisringe $K_1: r_1 < |z| < R_1$ und $K_2: r_2 < |z| < R_2$ dann und nur dann konform aequivalent, wenn $\frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2}$ ist.[3]) In § 1 zeigen wir, einer Anregung des Herrn KOEBE folgend, dass es eine *gegenseitige Lage* der Gebiete G_n und G'_n gibt, welche die konforme Aequivalenz unmöglich macht. Für den Fall zweier konzentrischer Kreisringe K_1 und K_2 wird diese gegenseitige Lage durch die Ungleichungen $r_1 < r_2 < R_2 < R_1$ karakterisiert.

---

[1]) Bekanntlich bleiben diese Abbildungen auch am Rande stetig und ein-eindeutig.

[2]) Für den Fundamentalsatz haben die Herrn L. FEJÉR und F. RIESZ einen äusserst einfachen Beweis gegeben, welcher in meiner Note *Über die Fundamentalabbildung schlichter Gebiete* veröffentlicht wurde (diese Zeitschrift Bd. I. Seite 240).

[3]) Vgl. KOEBE, Über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche etc., Jahresberichte der D. M. V. Bd. 15, Seite 142. Von grundlegender Bedeutung für diese Fragen ist die Arbeit von SCHOTTKY, Über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen, Journal f. d. r. n. a. Math. Bd. 83.

Die weiteren Entwicklungen beziehen sich auf die konformen Abbildungen eines Gebietes G_n auf sich selbst. Für $n = 1$ und $n = 2$ gibt es unendlich viele solche Abbildungen; beispielsweise gestattet eine Kreisfläche $|z| < r$ unendlich viele Drehungen, desgleichen ein Kreisring $r < |z| < R$. Für $n > 2$ gilt hingegen der *Endlichkeitssatz*, dass es nur endlich viele solche Abbildungen geben kann.[4]) Dieser Satz hat, wie wir wohl sagen können, einen topologischen Karakter, da seine Gültigkeit von der Anzahl der Randkurven abhängt. Es dürfte daher nicht ohne Interesse sein, eine Herleitung dieser Tatsache zu geben, bei welcher die topologischen und die funktionentheoretischen Gründe klar hervortreten. Wir versuchen dies in §§ 2—5, welche auch einige weitere Sätze über topologische Eigenschaften der hier betrachteten konformen Abbildungen enthalten. Wir betrachten ein Gebiet G_n mit $n > 2$ und eine (nicht *die*) Gruppe von topologischen Abbildungen des Gebietes auf sich selbst, wobei die einzelnen Abbildungen der Gruppe auch am Rande stetig und ein-eindeutig sein und die Indikatrix erhalten sollen. Ist die Gruppe endlich, also ihre Abbildungen periodisch, so erhält man leicht folgendes über ihr Verhalten in der Umgebung ihrer Fixpunkte:[5])

a) Ist T eine nicht identische Abbildung der Gruppe, so hat T nur isolierte Fixpunkte, von welchen kein einziger am Rande liegen kann.

b) Ist P ein Fixpunkt von T, so gibt es geschlossene Jordankurven mit beliebig kleinem Durchmesser, welche P im Innern enthalten und bei der Abbildung T in sich übergehen.

Es kann nun sehr einfach gezeigt werden, dass die Bedingungen *a)* und *b)* nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für die Endlichkeit der Gruppe sind. Ebenso einfach kann man aber beweisen, mit Hilfe einer von Herrn Bieberbach herrührenden eleganten Schlussweise, dass diese Bedingungen sicher erfüllt sind, wenn die Gruppe aus konformen Abbildungen besteht. Dementsprechend zerfällt die folgende Untersuchung in einen funktionentheoretischen (§ 2) und in einen topologischen (§§ 3—5) Teil. Die Methode gestattet auch eine funktionentheoretische Einkleidung, indem man

---

[4]) Vgl. l. c. [3]), sowie Koebe, Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung IV (Acta Mathematica Bd. 41. Seite 323).

[5]) Vgl. v. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie I, Abschnitt VI, § 6 (Berlin, 19_3).

sich durchgängig auf die Betrachtung konformer Abbildungen beschränken und den topologischen Hilfssatz in § 4 durch den Residuensatz ersetzen kann (s. den Schluss von § 5).

§ 1.

Satz. *Sei G_n $(n > 1)$ ein beschränktes schlichtes Gebiet, begrenzt durch geschlossene Jordankurven $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Es seien ferner $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \ldots, C_n^{(1)}$ geschlossene Jordankurven, welche ganz im Innern von G_n verlaufen, einander nicht treffen, und eine solche Lage haben, dass zwischen C_i und $C_i^{(1)}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ keine weitere Kurve liegt.*

Diese Kurven $C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \ldots C_n^{(1)}$ begrenzen ein Gebiet $G_n^{(1)}$, auf welches G_n nicht umkehrbar eindeutig und konform abgebildet werden kann.

Dieser Satz muss wesentliche topologische Gründe haben, weil ja seine Gültigkeit von der gegenseitigen Lage der beiden Gebiete abhängt, er muss aber auch wesentliche funktionentheoretische Gründe haben, da die Gebiete topologisch aequivalent sind. Der folgende einfache Beweis ist so angeordnet, dass diese Gründe möglichst klar hervortreten.

1. Hilfssatz. *Es sei Σ ein beschränktes Gebiet, und $f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z), \ldots$ eine Folge von Funktionen, welche in Σ eindeutig, regulär und gleichmässig beschränkt sind. Diese Funktionen mögen ferner getrennte Wertegebiete haben, genauer: ist a gegeben, so gibt es unter den Funktionen der Folge höchstens eine, welche diesen Wert in Σ annimmt. Ist dann E eine abgeschlossene Teilmenge von Σ, und bedeutet λ_n die Schwankung von $f_n(z)$ auf E, so wird behauptet, dass λ_n gegen Null konvergiert.*

Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann enthält die Folge $f_{n_\varkappa}(z)$ eine unendliche Teilfolge, deren Elemente auf E Schwankungen haben, welche grösser als eine feste positive Zahl ε bleiben. Infolge der gleichmässigen Beschränktheit kann man daraus eine weitere Teilfolge aussondern, welche in Σ konvergent ist, und zwar auf jeder abgeschlossenen Teilmenge gleichmässig. Der Einfachheit wegen bezeichnen wir diese Teilfolge wieder mit $f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z), \ldots$, die Grenzfunktion mit $f_0(z)$, die Wertegebiete dieser Funktionen mit $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$

Weil $f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z), \ldots$ auf E Schwankungen haben, die grösser als die feste positive Zahl ε bleiben, so ist auch die Schwankung von $f_0(z)$ auf E grösser oder gleich ε, wegen der gleichmässigen Konvergenz auf E. Daraus schliessen wir, dass keine der Funktionen $f_0(z), f_1(z), f_2(z), \ldots$ konstant ist; mithin sind $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ wirkliche Gebiete, d. h. zusammenhängende Punktmengen, welche nur aus i n n e r e n Punkten bestehen.

Ist nun ζ_0 ein Punkt von Σ_0, also $\zeta_0 = f_0(a)$, wo a ein Punkt in Σ ist, so konvergiert die Punktfolge $\zeta_n = f_n(a)$ gegen ζ_0; wir können also sagen: ist ζ_0 ein Punkt in Σ_0, so gibt es eine Punktfolge $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ welche gegen ζ_0 konvergiert, wobei ζ_1 in Σ_1, ζ_2 in Σ_2 u. s. w. liegt. Weil Σ_0 ein Gebiet ist, so liegen fast alle Punkte ζ_n in Σ_0; wir brauchen aber nur die Tatsache, dass es einen Punkt ξ_0 von Σ_0 gibt, welcher gleichzeitig in einem anderen Gebiete Σ etwa in Σ_k, enthalten ist. Nach der soeben gemachten Bemerkung gibt es dann eine gegen ξ_0 konvergierende Punktfolge $\xi_1, \xi_2, \ldots$, wobei ξ_1 in Σ_1, ξ_2 in Σ_2, u. s. w. liegt. Weil ξ_0 in Σ_k liegt, und Σ_k ein Gebiet ist, so müssen fast alle Punkte ξ_n in Σ_k liegen; dies ist aber sicher unmöglich. Denn die Gebiete $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ liegen getrennt, und deswegen enthält die Folge ξ_n einen einzigen Punkt, nämlich den Punkt ξ_k, welcher in Σ_k liegt. Mit diesem Widerspruche ist der Hilfssatz bewiesen.

2. Wir betrachten nun die zu Anfang dieses Abschnittes erklärten Gebiete G_n und $G_n^{(1)}$, und bezeichnen mit T eine auch am Rande stetige und ein-eindeutige Abbildung von G_n auf $G_n^{(1)}$. Wir werden dann solche Eigenschaften der Abbildung herleiten, welche die Konformität derselben ausschliessen.

Das Bildgebiet $G_n^{(1)}$ ist ein Teilgebiet von G_n, wir können also die Abbildung T iterieren, d. h. die Potenzen T^k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ bilden. Wenn wir mit $G_n^{(k)}$ das Bild von G_n durch T^k bezeichnen, so haben $G_n^{(k)}$ und $G_n^{(k+1)}$ dieselbe gegenseitige Lage, wie G_n und $G_n^{(1)}$; denn bei der Abbildung T^k geht G_n in $G_n^{(k)}$, $G_n^{(1)}$ in $G_n^{(k+1)}$ über. Wir können also die Randkurven von $G_n^{(k)}$ derart mit $C_1^{(k)}$, $C_2^{(k)}, \ldots C_n^{(k)}$ bezeichnen, dass zwischen $C_i^{(k)}$ und $C_i^{(k+1)}$ keine weitere Kurve C liegt. $(i = 1, 2, \ldots n;\ k = 1, 2, \ldots$ ad inf.) Da nun $n > 1$ ist, so hat jedes Gebiet $G_n^{(k)}$ wenigstens eine innere Randkurve; aus der gegenseitigen Lage der Gebiete $G_n^{(k)}$ und $G_n^{(k+1)}$ folgt dann, dass jede Kurve $C^{(k+1)}$ wenigstens eine Kurve $C^{(k)}$ im Innern enthält. Bezeichnen wir also mit ε den kleinsten unter den Durchmessern der Randkurven des Ausgangsgebietes G_n, so folgt aus dieser Bemerkung, dass jede bei der Iteration auftretende Kurve C einen Durchmesser $> \varepsilon$ hat.

Wir betrachten nun das Ringgebiet Σ, welches zwischen C_1 und $C_1^{(1)}$ liegt. Das Bild von Σ durch T^k heisse Σ_k; dann ist Σ_k wieder ein Ringgebiet, welches von einer Kurve $C^{(k)}$ und von einer Kurve $C^{(k+1)}$ begrenzt wird. Wir stellen zunächst fest, dass die Gebiete $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ getrennt liegen. Es ist nämlich Σ_k ein Teilgebiet von $G_n^{(k)}$, also wegen $G_n^{(1)} > G_n^{(2)} > \ldots$ auch Teilgebiet von $G_n^{(1)}$, während Σ keinen Punkt mit $G_n^{(1)}$ gemein hat; die Gebiete Σ und Σ_k liegen also sicher getrennt. Durch T^m geht Σ in Σ_m, Σ_k in Σ_{k+m} über; es liegen also auch Σ_m und Σ_{k+m} getrennt, wobei k urd m irgendwelche positive ganze Zahlen sind.

Nun nehmen wir in Σ eine geschlossene Jordankurve λ an, welche die beiden Randkurven von Σ voneinander trennt, und bezeichnen mit λ_k das Bild von λ durch T^k. Dann ist λ_k eine in Σ_k liegende geschlossene Jordankurve, welche die Randkurven von Σ_k voneinander trennt, mithin die innere Randkurve von Σ_k im Innern enthält. Da diese letztere Kurve einen Diameter $> \varepsilon$ hat, so ist auch der Diameter von λ_k grösser als ε. Zusammenfassend können wir sagen:

Bezeichnet Σ das Ringgebiet zwischen C_1 und $C_1^{(1)}$, und λ eine in Σ verlaufende geschlossene Jordankurve, welche die beiden Randkurven voneinander trennt; sind ferner Σ_k und λ_k die Bilder von Σ und λ durch T^k, so gelten die beiden Tatsachen:

a) Die Gebiete $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ liegen getrennt, und sind im ursprünglichen Gebiete G_n enthalten

b) Die Durchmesser der Kurven $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sind grösser als ε, wo ε den kleinsten unter den Durchmessern der Randkurven des ursprünglichen Gebietes G_n bedeutet.

Ein Blick auf unseren Hilfssatz 1 zeigt jetzt, dass die Abbildung T nicht konform sein kann.[6])

3. Auf konzentrische Kreisringe angewendet, ergibt dieser Satz die in der Einleitung erwähnte Tatsache, dass nämlich die konzentrischen Kreisringe $K_1: r_1 < |z| < R_1$ und $K_2: r_2 < |z| < R_2$ dann und nur dann konform aequivalent sind, wenn $\frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2}$ ist.

Sei etwa $\frac{r_1}{R_1} < \frac{r_2}{R_2}$, also $\frac{r_1}{r_2} < \frac{R_1}{R_2}$. Dann bestimmen wir die reelle

[6]) Es gibt auch keine konforme Abbildung mit Umlegung der Winkel man erkennt dies durch die Betrachtung der geraden Potenzen der Abbildung T.

positive Zahl ϱ derart, dass $\frac{r_1}{r_2} < \varrho < \frac{R_1}{R_2}$ wird. Durch die Ähnlichkeitstransformation $z' = \varrho z$ geht K_2 in den Kreisring $\varrho r_2 < |z| < \varrho R_2$ über, welcher wegen $r_1 < \varrho r_2 < \varrho R_2 < R_1$ die in unserem Satze geforderte Lage gegen K_1 hat, mithin keine konforme Abbildung auf K_1 gestattet. Wenn hingegen $\frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2}$ ist, so kann K_2 durch eine Ähnlichkeitstransformation in K_1 überführt werden.

Aus Hilfssatz 1 folgt auch sofort das folgende hübsche Lemma des Herrn KOEBE:

Es seien $C_0, C'_0, C_1, C'_1, C_2, C'_2, \ldots$ *geschlossene Jordankurven, von welchen jede die folgenden im Innern enthält, und sei* Σ_n *das Gebiet zwischen* C_n *und* C'_n. *Wenn alle Gebiete* Σ *konform aequivalent sind, so konvergieren die Durchmesser der Kurven* C *gegen Null.*[7])

Nach Voraussetzung gibt es eine in Σ_0 eindeutige reguläre Funktion $f_n(z)$, welche Σ_0 umkehrbar eindeutig und konform auf Σ_n abbildet. Wir nehmen in Σ_0 eine geschlossene Jordankurve λ_0 an, welche C_0 und C'_0 trennt, und bezeichnen mit λ_n das Bild von λ durch $f_n(z)$; dann liegt λ_n in Σ_n und enthält C'_n im Innern. Da die Gebiete $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ getrennt liegen, so folgt aus Hilfssatz 1, dass die Durchmesser der Kurven λ_n gegen Null konvergieren. Dasselbe gilt dann auch für die Kurven C, da λ_n die Kurven C_m, C'_m im Innern enthält, wenn $m > n$ ist.

§ 2.

Es sei Σ ein beschränktes schlichtes Gebiet und $f(z)$ eine in Σ eindeutige reguläre Funktion, welche eine umkehrbar eindeutige Abbildung von Σ auf sich selbst vermittelt. Wir nehmen an, dass die Abbildung einen Fixpunkt hat; dann gilt der folgende

Hilfssatz 2. *Im Fixpunkte ruft die Abbildung keine Verzerrung hervor; hingegen findet dort immer eine Drehung statt, den trivialen Fall ausgenommen, wo sich die Abbildung auf die Identität reduziert.*[8])

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir den Fixpunkt mit dem Punkte $z = 0$ zusammenfallen lassen~~; in der~~ Um-

[7]) KOEBE, Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven II, Math. Annalen 69.

[8]) BIEBERBACH, Über einen Satz des Herrn CARATHÉODORY, Göttinger Nachrichten 1913. Dort wird der Satz als *Eindeutigkeitssatz* bezeichnet.

gebung des Nullpunktes gilt dann eine Entwicklung:

$$f(z) = \gamma z + \dots \qquad \gamma \neq 0.$$

Wir zeigen zunächst, dass im Fixpunkte keine Verzerrung stattfindet, dass also $|\gamma| = 1$ ist. Sonst können wir annehmen, dass $|\gamma| > 1$ ist; wäre nämlich $|\gamma| < 1$, so würden wir einfach die inverse Abbildung betrachten. Setzen wir:

$$f_2(z) = f[f(z)], \dots f_n(z) = f[f_{n-1}(z)], \dots,$$

so sind alle diese Funktionen in Σ eindeutig, regulär und gleichmässig beschränkt: $|f_n(z)| < R$, wo R den Radius eines Kreises bezeichnet, welcher $z = 0$ zum Mittelpunkte hat und das Gebiet Σ im Innern enthält. Es sei nun $|z| < \varrho$ eine Kreisfläche, welche ganz in Σ liegt; dann gilt die bekannte Ungleichung $|f_n'(0)| < \frac{R}{\varrho}$. Offenbar ist nun $f_n'(0) = \gamma^n$, so dass die Ungleichung

$$|\gamma|^n < \frac{R}{\varrho}$$

besteht. Wegen $|\gamma| > 1$ wird die linke Seite zugleich mit n unendlich, während die rechte Seite von n nicht abhängt; mit diesem Widerspruche ist die Behauptung $|\gamma| = 1$ erwiesen.

Wir zeigen weiter: wenn im Fixpunkte keine Drehung stattfindet, so reduziert sich die Abbildung auf die Identität. Mit anderen Worten: aus $\gamma = 1$ folgt $f(z) \equiv z$. Sonst wäre

$$f(z) = z + a_k z^k + \dots, \quad a_k \neq 0.$$

Dann folgt:

$$f_2(z) = z + 2 a_k z^k + \dots,$$
$$f_3(z) = z + 3 a_k z^k + \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Ist wieder $|z| < \varrho$ eine ganz in Σ enthaltene Kreisfläche, so folgt nach der bekannten Koeffizientenabschätzung:

$$n|a_k| < \frac{R}{\varrho^k}, \quad \text{also} \quad |a_k| < \frac{1}{n}\frac{R}{\varrho^k}.$$

Daraus folgt $a_k = 0$, entgegen der Annahme.

Hilfssatz 3. *Sei Σ ein beschränktes schlichtes Gebiet, und T eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung von Σ auf sich selbst, welche einen Fixpunkt P hat. Dann gibt es geschlossene Jordankurven von beliebig kleinem Durchmesser, welche den Fixpunkt P im Innern enthalten und durch T in sich transformiert werden.*

Es genügt zu zeigen, dass es ein einfach zusammenhängendes, den Fixpunkt P enthaltendes Teilgebiet G von Σ gibt, welches für die Abbildung T invariant ist; bildet man nämlich dieses Teilgebiet G auf das Innere des Einheitskreises konform ab, derart dass P in den Mittelpunkt übergeht, so wird die durch T bewirkte Abbildung desselben in eine Drehung transformiert, bei welcher die konzentrischen Kreise einzeln in sich überführt werden.

Ein solches invariantes Gebiet G können wir nun wie folgt erhalten. Wir betrachten eine Kreisfläche $\varkappa$ vom Radius ϱ, welche P zum Mittelpunkte hat und ganz in Σ liegt, und wenden auf $\varkappa$ alle Abbildungen T^k an ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Da nach Hilfssatz 2 diese Abbildungen im Fixpunkte P keine Verzerrung hervorrufen, so gibt es nach dem Verzerrungssatze eine konzentrische Kreisfläche von nicht verschwindendem Radius, welche in allen Bildgebieten enthalten ist. Es gibt also wirkliche Gebiete, welche den Punkt P enthalten und in allen Bildgebieten von $\varkappa$ enthalten sind. Durch Vereinigung aller solcher Gebiete erhalten wir ein Gebiet G, das grösste Gebiet mit dieser Eigenschaft. Dann ist G offenbar invariant für die Abbildung T; es hängt aber auch einfach zusammen. Sei nämlich C eine in G liegende geschlossene Jordankurve; nach der Erklärung von G liegt dann C in allen Bildgebieten von $\varkappa$. Weil aber diese Bildgebiete einfach zusammenhängen, so ist auch das Innere von C in allen Bildgebieten enthalten, folglich auch in G, weil sonst G durch Hinzufügung des Inneren von C vergrössert werden könnte, ohne seine karakteristische Eigenschaft zu verlieren. Damit ist gezeigt: ist eine geschlossene Jordankurve in G enthalten, so ist auch das Innere derselben in G enthalten. Dadurch ist G als einfach zusammenhängendes Gebiet gekennzeichnet.

Hilfssatz 4. *Sei ein Gebiet G_n mit $n > 1$ vorgelegt, und T sei eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung von G_n auf sich selbst. Dann hat T keinen Fixpunkt am Rande des Gebietes, vom trivialen Falle abgesehen, wo sich T auf die Identität reduziert.*

Wenn T einen Fixpunkt P am Rande hat, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass dieser Fixpunkt auf einer inneren Randkurve liegt, welche mit dem Einheitskreise zusammenfällt. Durch Spiegelung am Einheitskreise erhalten wir ein Gebiet G'_n; dasselbe bildet zusammen mit G_n ein Gebiet G_{2n-1}, und die Abbildung T kann durch Spiegelung am Einheitskreise zu einer umkehrbar eindeutigen konformen Abbildung von G_{2n-1} auf sich selbst erweitert werden. Im Fixpunkte P findet nun keine Drehung statt, weil der Einheitskreis mit Erhaltung des Umlaufssinnes in sich transformiert wird; nach Hilfssatz 1 ist also T die identische Abbildung.

§ 3.

In diesem Abschnitte stellen wir einige vielfach verwendete Tatsachen über Arcusvariation zusammen, die wir in der Folge benötigen.

Wir betrachten in der z-Ebene zwei geschlossene Jordankurven, C_1 und C_2, und eine umkehrbar eindeutige stetige Abbildung dieser Kurven aufeinander. Ist P_2 ein Punkt auf C_2, P_1 der entsprechende Punkt auf C_1, so setzen wir voraus, dass P_2 und P_1 nie zusammenfallen. Unter arc $\overrightarrow{P_1 P_2}$ verstehen wir den bis auf Vielfache von 2π bestimmten Winkel, welchen der *„Transformationsvektor"* $\overrightarrow{P_1 P_2}$ mit der reellen positiven Achse einschliesst.

Wir lassen nun den Punkt P_2 in einem gewissen Sinne einen Umlauf auf C_2 ausführen; dann führt der Bildpunkt P_1 einen Umlauf auf C_1 aus. Ist Θ eine stetige Bestimmung von arc $\overrightarrow{P_1 P_2}$, so ändert sich Θ bei diesem Umlauf um eine Grösse von der Form $2k\pi$, wo k eine ganze Zahl ist. Die Arcusvariationen der Vektoren $\overrightarrow{P_1 P_2}$ und $\overrightarrow{P_2 P_1}$ stimmen dabei überein; ist nämlich Θ eine stetige Bestimmung von arc $\overrightarrow{P_1 P_2}$, so ist $\Theta' = \Theta + \pi$ eine stetige Bestimmung von arc $\overrightarrow{P_2 P_1}$, so dass sich Θ und Θ' um dieselbe Grösse ändern. Durch Umkehrung des Umlaufssinnes ändert hingegen die Arcusvariation das Vorzeichen.

In gewissen Fällen kann man die Arcusvariation durch die folgende Kontinuitätsbetrachtung bestimmen. Wir nehmen innerhalb C_1 einen nicht auf C_2 gelegenen Punkt A an und bilden das Innere von C_1 auf das Innere des Einheitskreises konform ab, so dass A in den Mittelpunkt übergeht; diese Abbildung ist bekanntlich auch am Rande stetig und ein-eindeutig. Mit $C_1(\varrho)$ bezeichnen wir die Kurve, welche bei dieser Abbildung in den konzentrischen Kreis vom Radius ϱ übergeht; es ist hiernach $C_1(1)$ mit C_1 identisch, und unter $C_1(0)$ wollen wir den Punkt A verstehen. Als Radien bezeichnen wir die Bögen, welche bei der Abbildung in Radien des Einheitskreises transformiert werden. Nunmehr erklären wir eine Abbildung von C_2 auf $C_1(\varrho)$, indem wir dem Punkte P_2 denjenigen Punkt $P_1(\varrho)$ auf $C_1(\varrho)$ zuordnen, welcher mit P_1 auf einem Radius liegt. Wenn dann P_2 für keinen Wert von ϱ mit seinem Bildpunkte zusammenfällt, so wollen wir sagen, dass die Kurve C_1 auf den Punkt A zusammengezogen werden kann. Ist dies der Fall, so gilt die beinahe evidente Bemerkung, dass die Arcusvariation des Transformationsvektors $\overrightarrow{P_1 P_2}$ gleich der Arcusvariation des Vektors $\overrightarrow{A P_2}$ ist (also gleich Null, wenn A ausserhalb, und gleich $\pm 2\pi$, wenn A innerhalb C_2 liegt). Bezeichnet man nämlich die Arcusvariation des Vektors $\overrightarrow{P_1(\varrho) P_2}$ mit $\Delta(\varrho)$, so ist diese für $0 \leqq \varrho \leqq 1$ eindeutig erklärte Funktion offenbar stetig. Da sie aber nur Werte von der Form $2k\pi$ annehmen kann, wo k eine ganze Zahl ist, so reduziert sich dieselbe auf eine Konstante; es ist also $\Delta(1) = \Delta(0)$.

Für unsere Zwecke kommen die folgenden Fälle in Betracht:

a) Die Kurven C_1 und C_2 schliessen einander aus. Dann kann C_1 auf einen Punkt ausserhalb C_2 zusammengezogen werden, mithin ist die Arcusvariation Δ gleich Null.

b) Die eine der beiden Kurven enthält die andere im Innern. Dann kann man die innere Kurve auf einen Punkt zusammenziehen; es ist also $\Delta = 2\pi$ oder $\Delta = -2\pi$, je nachdem die äussere Kurve im mathematisch positiven oder negativen Sinne umlaufen wird.

c) Die beiden Kurven liegen vereinigt. Dann zieht man etwa C_1 auf einen inneren Punkt zusammen und erhält $\Delta = \pm 2\pi$, wie im Falle *b)*.

Wir brauchen schliesslich einen Satz über die Arcusvariation einer stetigen Funktion. Es sei ein Gebiet G_n vorgelegt und eine in G_n einschliesslich Randes eindeutige stetige Funktion $f(z)$, welche dort nirgends verschwindet. Dann kann man $\operatorname{arc} f(z)$ auf jeder Randkurve C_i stetig fortsetzen; die Änderung von $\operatorname{arc} f(z)$ bei einem in Bezug auf das Gebiet positiven Umlaufe auf C_i werde mit Δ_i bezeichnet. Dann gilt der auf Cauchy zurückgehende Satz, dass $\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n = 0$ ist. Da nämlich $f(z)$ im abgeschlossenen Bereiche G_n stetig und von Null verschieden ist, so hat dort $|f(z)|$ ein positives Minimum m. Ist die Schwankung von $f(z)$ in G_n kleiner als $\frac{m}{2}$, so erkennt man, dass jede stetige Bestimmung von arc $f(z)$ im ganzen Gebiete G_n eindeutig ist, so dass die Grössen Δ_i einzeln verschwinden. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so kann man, da $f(z)$ gleichmässig stetig ist, das Gebiet in endlich viele (krummlinige) Dreiecke zerlegen, so dass für jedes Dreieck die Schwankung kleiner als $\frac{m}{2}$ wird. Addiert man nun die Arcusvariationen, welche durch positiven Umlauf der einzelnen Dreiecke erhalten werden, so ist die Summe einerseits gleich $\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n$, da sich die von den inneren Dreiecksseiten herrührenden Beiträge gegenseitig aufheben, andererseits gleich Null, weil die Summanden einzeln verschwinden.

§ 4.

Wir betrachten ein Gebiet G_n und eine die Indikatrix erhaltende, auch am Rande stetige und ein-eindeutige Abbildung von G_n auf sich selbst.[9]) Für $n = 1$ hat die Abbildung sicher einen Fixpunkt, wie Herr Brouwer gezeigt hatte. Für $n > 1$ hat Herr v. Kerékjártó folgende Fixpunktssätze angegeben: wenn bei der Abbildung keine Randkurve in sich transformiert wird, so gibt es wenigstens zwei Fixpunkte; wird eine einzige Randkurve in sich transformiert, so gibt es wenigstens einen Fixpunkt; desgleichen, wenn $n > 2$ ist, und alle Randkurven in sich transformiert werden. Versucht man nun, weitere spezielle Sätze zu bilden, so findet man sofort eine allgemeine Aussage, welche alle Fälle umfasst, wo sich die Existenz eines Fixpunktes behaupten lässt.

Fixpunktssatz. *Es sei ein Gebiet G_n vorgelegt. Sei T eine die Indikatrix erhaltende, auch am Rande stetige und ein-eindeutige Abbildung von G_n auf sich selbst, und ν die Anzahl der Randkurven, welche durch T in sich transformiert werden. Ist $\nu \neq 2$, so hat T wenigstens einen Fixpunkt; ist $\nu = 2$, so braucht es keinen Fixpunkt zu geben.*

Wir zeigen: wenn T keinen Fixpunkt hat, so ist $\nu = 2$.[10]) Mit $\varphi(z)$ bezeichnen wir die stetige Funktion, welche die Abbildung vermittelt, und bilden die Funktion $f(z) = \varphi(z) - z$. Wenn die Abbildung keinen Fixpunkt hat, so ist $f(z) \neq 0$ im ganzen

[9]) Für die in diesem Abschnitte behandelten Fragen vgl. l. c. [5]), Abschnitt VI, § 2.

[10]) Im Spezialfalle $\nu = n$ wird unser Beweis mit demjenigen des Herrn von Kerékjártó identisch; vgl. l. c. [5]), Seite 200, Satz VII.

Gebiete. Dann aber muss (§ 3) die Summe $S = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n$ verschwinden, wo Δ_i die Änderung von arc $f(z)$ bei einem in Bezug auf G_n positiven Umlauf der Randkurve C_i bedeutet.

Ist zunächst $\nu = 0$, so ist für die äussere Randkurve $\Delta = 2\pi$ (§ 3, Fall *b*), ebenso für diejenige innere Randkurve, welche in die äussere Randkurve transformiert wird; für jede weitere innere Randkurve ist $\Delta = 0$ (§ 3, Fall *a*). Es ist also in diesem Falle $S = 4\pi$.

Ist $\nu > 0$, so können wir annehmen, dass die äussere Randkurve in sich transformiert wird. Ist p die Anzahl der inneren Randkurven, welche in sich transformiert werden, so ergibt sich $S = (1-p) 2\pi$. In der Tat, für die äussere Randkurve ist $\Delta = 2\pi$, für jede innere Randkurve, welche in sich transformiert wird, $\Delta = -2\pi$ (§ 3, Fall *c*), für jede weitere innere Randkurve ist $\Delta = 0$ (Fall *a*). Aus $S = 0$ folgt, dass $p = 1$, also $\nu = 2$ ist, womit der Fixpunktssatz bewiesen ist.

§ 5.

Es sei nunmehr ein Gebiet G_n mit $n > 2$ vorgelegt und $\mathfrak{G}$ sei eine Gruppe von Abbildungen dieses Gebietes auf sich selbst, wobei die einzelnen Abbildungen der Gruppe auch am Rande ein-eindeutig und stetig sein und die Indikatrix erhalten sollen. Wir setzen ferner voraus, dass die folgenden beiden Fixpunktsbedingungen erfüllt sind:

I. Ist T eine nicht-identische Abbildung der Gruppe, so hat T höchstens endlich viele Fixpunkte, von welchen kein einziger am Rande des Gebietes liegt.

II. Ist T eine Abbildung der Gruppe und P ein Fixpunkt von T, so gibt es geschlossene Jordankurven von beliebig kleinem Durchmesser, welche den Fixpunkt im Innern enthalten und durch T in sich transformiert werden.

Nach den Hilfssätzen von § 2 bilden insbesondere die konformen Abbildungen des Gebietes auf sich selbst eine Gruppe mit diesen Eigenschaften.

Zunächst können wir den Fixpunktssatz von § 4 für die Abbildungen der Gruppe wesentlich verschärfen. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Ist T eine nicht-identische Abbildung der Gruppe, ν die Anzahl der Randkurven, welche durch T in sich transformiert werden,

μ die Anzahl der Fixpunkte von T, so ist

$$\nu + \mu = 2.$$

Um dies einzusehen, umgebe man jeden Fixpunkt von T mit einer kleinen invarianten Kurve. Durch Entfernung der Innengebiete dieser Kurven entsteht ein Gebiet $G_{n+\mu}$, welches durch T ebenfalls auf sich selbst abgebildet wird, wobei $\nu + \mu$ Randkurven in sich transformiert werden. Da aber nunmehr kein Fixpunkt auftritt, so folgt aus dem Fixpunktssatze, dass $\nu + \mu = 2$ sein muss.

Aus dieser Relation kann man eine Reihe von Folgerungen ziehen. Zunächst folgt offenbar:

Wenn T mehr als zwei Fixpunkte hat, oder mehr als zwei Randkurven in sich transformiert, so ist T die identische Abbildung.

Da ferner jede Randkurve, welche durch T in sich transformiert wird, desgleichen jeder Fixpunkt von T auch durch T^k in sich übergeht, so wird für T^k die Relation $\nu + \mu = 2$ sicher nicht mehr bestehen, wenn das Auftreten einer neuen invarianten Randkurve oder eines neuen Fixpunktes festgestellt werden kann. Daraus folgt beispielsweise für $k = 2$:

Wenn T irgend zwei Randkurven oder irgend zwei Punkte vertauscht, so ist T involutorisch.

Es ergibt sich auch sofort die Endlichkeit der Gruppe. Jede Abbildung der Gruppe ruft eine bestimmte Permutation der Randkurven hervor; wenn aber zwei Abbildungen der Gruppe, T_1 und T_2, dieselbe Permutation hervorrufen, so sind sie identisch, da alsdann die Abbildung $T = T_1 T_2^{-1}$ mehr als zwei, nämlich alle n, Randkurven in sich transformiert. Es gibt also höchstens so viele Gruppenelemente, als es verschiedene Anordnungen von n Dingen gibt.

Die vorstehenden Entwicklungen liefern nicht nur die Endlichkeit der Gruppe, sondern überhaupt einen Einblick in die Struktur derselben. Für den Beweis des Endlichkeitssatzes reicht bereits ein Teil unserer Hilfsbetrachtungen, wie der Leser leicht erkennen wird. Wir wollen hier nur kurz angeben, wie man den Endlichkeitssatz für konforme Abbildungen beweisen kann, wenn man unsere Methode in die Sprache der Funktionentheorie übersetzt.

Es handelt sich also um die folgende Tatsache: Ist G_n ein Gebiet mit $n > 2$, und T eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung dieses Gebietes auf sich selbst, welche jede Randkurve in sich transformiert, so ist T die identische Abbildung. Ohne

Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass die Randkurven analytisch sind. Ist dann $f(z)$ die reguläre Funktion, welche die Abbildung vermittelt, so ist dieselbe auch am Rande analytisch. Dasselbe gilt dann von der Funktion $\varphi(z)=f(z)-z$, welche nach Hilfssatz 4 in § 2 am Rande von Null verschieden ist, wenn $f(z)\not\equiv z$ ist, was wir jetzt annehmen wollen. Bedeutet dann Δ_i die Variation von arc $\varphi(z)$ bei einem in Bezug auf das Gebiet positiven Umlauf der Randkurve C_i, so ist nach dem Residuensatze

$$\frac{1}{2\pi}(\Delta_1+\Delta_2+\ldots+\Delta_n)=\mu,$$

wo μ die Anzahl der innerhalb G_n gelegenen Nullstellen von $\varphi(z)$ bedeutet. Nun ist aber (§ 3, Fall c) für die äussere Randkurve $\Delta=2\pi$, für jede innere Randkurve $\Delta=-2\pi$; es folgt also

$$\mu=2-n.$$

Da aber die Zahl μ ihrer Bedeutung nach $\geqq 0$ ist, während wegen $n>2$ die Differenz $2-n$ sicher negativ ist, enthält diese Gleichung einen Widerspruch und damit ist der Endlichkeitssatz bewiesen.

Szeged, den 22. I. 1924.