

## Bibliographie.

**B. v. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie I. (Grundlehren der math. Wissenschaften VII.) VIII + 270 S., Berlin, J. Springer, 1923.**

Dieses Buch entstand aus den Vorlesungen, die der Verfasser, Privatdozent an unserer Universität, auf Einladung der Universität Göttingen im Sommersemester 1922 gehalten hat.

Der vorliegende erste Band enthält die Topologie der Ebene und der Flächen und gliedert sich in 7 Abschnitte: 1. Punktmengen; 2. Kurven; 3. Gebiete; 4. Polyederflächen; 5. Offene Flächen; 6. Abbildungen von Flächen; 7. Kurvenscharen auf Flächen. Es ist darin in lebhafter Darstellung ein reiches Material zu einem wertvollen Lehrbuche verarbeitet, welches besonders jenen, die die Topologie hauptsächlich wegen ihrer Anwendungen auf Funktionentheorie, Differentialgleichungen oder Variationsrechnung interessiert, sehr gute Dienste leisten wird. Die Topologie der mehrdimensionalen und der abstrakten Räume, sowie die kombinatorische Topologie, und damit also die eigentliche systematische Darstellung der Methoden, sollen in einem zweiten Bande folgen. Den reichen Inhalt dieses zweiten Bandes lässt schon jenes weit ausholende Referat über die Probleme der Topologie ahnen, welches dem vorliegenden Bande als Einleitung an die Spitze gestellt ist.

Zum Schlusse sei es mir gestattet den Wunsch auszusprechen, dass im zweiten Bande derartige klassische Sätze, wie z. B. der JORDANSche Kurvensatz, ausführlicher mit Litteraturnachweisen belegt und wenigstens die leitenden Gedanken der verschiedenartigen Beweise kurz angedeutet werden.

F. R.

**A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, zweite erweiterte Auflage (Grundlehren der math. Wissenschaften IX.) IX + 251 S., Berlin, J. Springer, 1923.**

Die erste Hälfte des Buches gibt eine sehr breite und sehr klare Darstellung der wichtigsten Tatsachen der klassischen Mengenlehre, die in hohem Masse geeignet ist Anfänger, Nicht-Mathematiker und Philosophen in das Gebiet einzuführen. Ausser den grundlegenden Begriffsbildungen und Resultaten CANTOR's werden nur noch der Äquivalenzsatz (für den nicht der einfachste Beweis angeführt wird) und der ZERMELO'sche Wohlordnungssatz behandelt.

Die zweite Hälfte des Buches beschäftigt sich mit den Erschütterungen, die durch die Antinomien von BURALI-FORTI, RUSSELL und RICHARD in der

Mengenlehre und hiermit in der ganzen Mathematik hervorgerufen wurden und mit den Rettungsarbeiten, die seit etwa 15 Jahren im Zuge sind.

Am ausführlichsten wird die ZERMELOSche Axiomatik behandelt, zu der der Verf. wertvolle Beiträge geliefert hat. (Ist aber in der neuen Form des Axiomes V., S. 198, kein Zirkel enthalten?). Ausser dieser formalistischen Methode werden noch besonders zwei in ausführlichen Darstellungen vorliegende, tiefer in philosophische Probleme eingreifende Grundlegungen behandelt, nämlich die von RUSSELL und die von JULIUS KÖNIG. Durch die sehr glückliche Auswahl einiger, charakteristischer Momente wird der Verf. sicherlich auch hier sein Ziel erreicht haben, nämlich zum Studium der Originalarbeiten anzuregen und ihre Lektüre zu erleichtern. Dasselbe gilt über die Behandlung der neuesten Untersuchungen HILBERT's betreffend das Problem der Widerspruchslosigkeit; auch wird auf die „weitgehende Übereinstimmung“ der HILBERT'schen Arbeiten mit dem System von KÖNIG hingewiesen.

Der „radikal-revolutionistische“ Intuitionismus von BROUWER und WEYL der bis auf KRONECKER zurückgeführt wird, wird vom Verf. grösstenteils abgelehnt, was wohl fast allgemeine Zustimmung erwecken dürfte. Hieran anschliessend wird der POINCARÉ-RUSSELLSche Verbot der nicht prädikativen Definitionen erörtert. Man muss aber keineswegs Intuitionist im BROUWERschen Sinne sein — wie der Verf. zu behaupten scheint — um diesen Einwand, bis kein Widerspruchslosigkeitsbeweis vorliegt, als berechtigt anzuerkennen.

Die hier erwähnten Grundlegungen sind voneinander ziemlich unabhängig entstanden, ihre Autoren haben sich wenig umeinander gekümmert und manche von ihnen bilden eine sehr mühsame Lektüre. Um so dankbarer muss man dem Verf. sein, dass er „ohne eine gewisse Breite der Darstellung zu scheuen“ mit ausserordentlicher Klarheit — die an den Styl der populär-philosophischen Schriften RUSSELL's erinnert — und mit strenger Objektivität diese verschiedenen Auffassungen zusammengestellt hat. Er geht in seiner Objektivität so weit, auch solche Einwände (namentlich die Angriffe des Philosophen ZIEHEN) zu berücksichtigen, die einfach auf Missverständnissen beruhen. Zum Schutze gegen solche Missverständnisse kann das schöne Buch FRAENKEL's auch Philosophen wärmstens empfohlen werden.

Dénes König.

**P. Bachmann, Zahlentheorie. Viertel Teil: Die Arithmetik der quadratischen Formen. Zweite Abteilung, herausgegeben von R. Haussner. XXII + 537 S., Berlin, B. G. Teubner, 1923.**

Das Lebenswerk PAUL BACHMANN's: eine Gesamtdarstellung der Zahlentheorie in ihren Hauptteilen zu verfassen, erhält durch das vorliegende Buch einen würdigen Abschluss. Es ist demjenigen Teil der arithmetischen Theorie der quadratischen Formen gewidmet, der — gestützt auf die Untersuchungen CH. HERMITE's — in den letzten Jahrzehnten durch die bahnbrechenden Arbeiten des so früh verstorbenen H. MINKOWSKI's eine wunderbare Durchsichtigkeit und Vollkommenheit erhalten hat. Die Methoden MINKOWSKI's

die auf einer geometrischen Interpretation beruhen, wurden in seiner „*Geometrie der Zahlen*“ in einer nicht leicht verständlichen Weise veröffentlicht; die „*Diophantische Approximationen*“ MINKOWSKI's waren berufen, seine Ideen einem grösseren Leserkreis näher zu bringen. BACHMANN's Werk ist eine vollkommen gelungene Verschmelzung der MINKOWSKISCHEN Methoden mit den arithmetisch-algebraischen Methoden, die mit der Kettenbruchstheorie LAGRANGE's beginnen und in den Arbeiten HERMITE's gipfeln. Der Punktgitter — den ja schon GAUSS zur Untersuchung der quadratischen Formen heranzog — wird gleich am Anfang des Buches eingeführt und darauf die Theorie der gewöhnlichen Kettenbrüche gegründet und die damit zusammenhängenden Approximationssätze entwickelt. Sodann wird mit Hilfe der GAUSS'schen Zuordnung eines Punktgitters zu einer Klasse von äquivalenten quadratischen Formen die Reduktionstheorie der binären und ternären quadratischen Formen begründet, wobei MINKOWSKI's Methoden und insbesondere seine Anwendungen des konvexen Körpers und die dichteste Lagerung von Kugeln herangezogen werden. In ähnlicher Weise wird dann die Reduktionstheorie der positiven Formen mit  $n$  Unbestimmten behandelt und auf sie die Äquivalenztheorie gestützt. Die Theorie der zerlegbaren Formen mit einem Hinweis auf die Theorie der algebraischen Zahlkörper bildet den Übergang zu den Kriterien für die Irrationalitäten 2-ten und 3-ten Grades. Daran schliesst sich die Theorie des JACOBI'schen Kettenbruchalgorithmus, die durch PERRON's Untersuchungen wesentlich gefördert wurde. MINKOWSKI's Kriterien zur arithmetischen Charakterisierung der Irrationalitäten  $n$ -ten Grades und die unbestimmten quadratischen Formen mit mehreren Variablen schliessen das Buch ab.

Das vorliegende Werk BACHMANN's gibt nicht nur eine schöne Übersicht des mannigfaltigen bearbeiteten Gegenstandes, sondern ist auch in vorzüglicher Weise geeignet, zur Einführung in die geometrischen Ideen zu dienen, die MINKOWSKI's Gedankenwelt bildeten und die in den verschiedensten Disciplinen der Mathematik zur Anwendung gelangten. Deshalb wird dieses Buch auch ausserhalb derjenigen Fachgenossen, die sich speziell mit der Zahlentheorie beschäftigen, lebhaften Anklang finden und es gebührt der Dank aller Mathematiker dem Herausgeber Herrn R. HAUSSNER, der das Erscheinen dieses letzten Bandes der BACHMANN'schen Zahlentheorie ermöglichte, womit der letzte Wunsch dieses um die Zahlentheorie hochverdienten Gelehrten — dessen Ableben von allen Mathematikern beklagt wird — in Erfüllung ging.

A. H.

**L. Heffter, Lehrbuch der analytischen Geometrie.** Zweiter Band: Geometrie im Bündel und im Raum. XII + 421 S., Berlin, B. G. Teubner, 1923.

Seit dem Erscheinen des ersten Bandes dieses Lehrbuches sind 17 Jahre verflossen; im Vorworte zum vorliegenden zweiten Bande bemerkt aber der Verfasser mit vollem Rechte, dass das Werk noch immer einzig in seiner Art ist: es ist nämlich das einzige moderne Lehrbuch der analytischen

Geometrie. Der moderne Zug des Buches liegt in dem Plane, nach welchem der klassische Gegenstand der analytischen Geometrie: die Theorie der Kurven und Flächen zweiten Grades, dargestellt wird. „Dieser Plan besteht in folgendem: In jedem Grundgebilde wird zuerst die projektive Geometrie so vollständig entwickelt, dass nachher nur durch ihre Spezialisierung die Parallelgeometrie und durch deren Hinzufügung die affine Geometrie, dann durch weitere Spezialisierung die Orthogonalgeometrie und durch ihre Hinzunahme die äquiforme Geometrie entsteht.“ Dieser Weg „stellt sich also als der durch CAYLEYS Ausspruch vom Jahre 1859 (dass alle sogenannten metrischen Eigenschaften geometrischer Figuren als projektive Beziehungen zwischen diesen und dem „absoluten Gebilde“ angesehen werden können) vorgezeichnete heraus, als der Weg, den F. KLEIN in seinem Erlanger Programm vom Jahre 1872 und später wiederholt skizziert hat.“ Von diesem in seiner Einfachheit grossartigen Prinzip geleitet, hat der Verfasser ein Werk geschaffen, welches die ästhetische Wirkung eines monumentalen, im Einzelnen mit leichter Künstlerhand ausgebildeten Bauwerkes ausübt. Bei dem systematischen Aufbau der analytischen Geometrie beschränkt sich der Verfasser auf die Euklidische Geometrie, dass aber „durch eine derartige Darstellung der Euklidischen Geometrie die Wege für die Entwicklung einer absoluten Geometrie vorbereitet sind, braucht kaum gesagt zu werden.“ Der Leser, der dies weiter verfolgen will, möge *gleichzeitig* mit dem HEFFTERSchen Werke das schöne Buch von VAHLEN über Abstrakte Geometrie lesen, in welchem die Grundlagen der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Geometrien nach denselben Prinzipien untersucht werden, welche den Charakter des vorliegenden Lehrbuches bestimmt haben.

Tibor Radó.

**L. Bieberbach, Funktionentheorie** (Teubners technische Leitfäden Bd. 14). 118 S., Berlin, B. G. Teubner, 1922.

Das kleine Buch, welches zur ersten Einführung in die Funktionentheorie dienen soll, enthält zunächst alles, was der Anfänger an allgemeiner Funktionentheorie wissen muss, dann eine sehr gründliche Betrachtung der elementaren Funktionen, und Vieles aus der Theorie der konformen Abbildung. Das Werkchen, welches vom paedagogischen Sinne und von der frischen, anschaulichen Darstellungskunst seines Verfassers ein neues Zeugnis ablegt, werde hiermit der studierenden Jugend herzlichst empfohlen.

Tibor Radó.