Zur Theorie der algebraischen Körper.

Von MICHAEL BAUER in Budapest.

1. Es sei

$$f(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n = 0 \tag{1}$$

eine irreduzible Gleichung mit rat.-ganzen Koeffizienten. Im Körper $K(\omega)$, der durch eine Wurzel bestimmt ist, sollen die Zerlegungen

$$\begin{aligned} p &= \mathfrak{p}_1^{g_1} \mathfrak{p}_2^{g_2} \ldots \mathfrak{p}_k^{g_k} \\ \omega &= \mathfrak{p}_1^{a_1} \mathfrak{p}_2^{a_2} \ldots \mathfrak{p}_k^{a_k} \mathfrak{q}, \quad (\mathfrak{q}, p) = 1 \end{aligned} \tag{2}$$

gelten, wo $\mathfrak{p}_i$ ein Primideal f_i-ten Grades bedeutet. Bekannterweise sind die Quotienten $\frac{a_i}{g_i}$ gleich den sog. PUISEUXschen Zahlen der Gleichung (1) in bezug auf p.[1]) Ist nämlich $\frac{b}{s}$ eine PUISEUXsche Zahl, dann ist sie gleich einem Quotienten $\frac{a_i}{g_i}$ und umgekehrt.

Es sei r die Anzahl der Quotienten $\frac{a_i}{g_i}$, welche gleich $\frac{b}{s}$ sind, es soll also

$$\frac{b}{s} = \frac{a_{i_1}}{g_{i_1}} = \frac{a_{i_2}}{g_{i_2}} = \ldots = \frac{a_{i_r}}{g_{i_r}} \tag{3}$$

ausfallen. Wir werden beweisen, dass aus (3) die Relationen

$$\begin{aligned} b &= f_{i_1} a_{i_1} + \ldots + f_{i_r} a_{i_r} \\ s &= f_{i_1} g_{i_1} + \ldots + f_{i_r} g_{i_r} \end{aligned} \tag{4}$$

folgen. Wenn

[1]) M. BAUER: Zur allgemeinen Theorie der algebraischen Grössen, *Journal für Mathematik*, Bd. 132 (1907), S. 21—32.

$$(4^*) \qquad (b, s) = 1$$

vorausgesetzt wird, bekommt man

$$g_{i_1} \equiv g_{i_2} \equiv \ldots \equiv g_{i_r} \equiv 0 \pmod{s},$$

daraus folgt $r = 1$, und wenn $i_1 = i$ gesetzt wird, ergeben sich

$$(4^{**}) \qquad b = a_i, \; s = g_i, \; f_i = 1.$$

Es ist zu betonen, dass wir bei dieser Folgerung nur eine der PUISEUXschen Zahlen benützt haben, im Gegensatze sowohl zu meinen früheren Publikationen, als zu den tiefgehenden Untersuchungen des H. ÖYSTEIN ORE.[2])

2. Wir werden zwei verschiedene Beweise angeben. Es sei $\mathfrak{P}$ ein beliebiges Primideal von p im GALOISschen Körper, der zu $K(\omega)$ gehört. Aus der sog. DEDEKINDschen Regel ist ableitbar, dass die Anzahl der Konjugierten des Ideals $\mathfrak{p}_i$, welche durch $\mathfrak{P}$ teilbar sind, gleich $f_i g_i$ ist. Wird ferner i durch einen anderen Index j vertauscht, so gehören die in Betracht kommenden Körper zu verschiedenen Konjugierten von ω.[3]) Nun betrachten wir die charakteristischen Zahlen der sämtlichen Wurzeln $\omega^{(i)}$ in bezug auf das Primideal $\mathfrak{P}$. Die Anzahl der Wurzeln, für welche die charakteristische Zahl gleich $\frac{b}{s}$ ausfällt, ist nach dem Vorigen gleich $f_{i_1} g_{i_1} + \ldots + f_{i_r} g_{i_r}$. Andererseits ist diese Anzahl gleich[4]) s, woraus sich

$$s = f_{i_1} g_{i_1} + \ldots + f_{i_r} g_{i_r}, \quad b = f_{i_1} a_{i_1} + \ldots + f_{i_r} a_{i_r}$$

ergeben.

3. Man kann den Beweis ohne Anwendung der Gruppentheorie leisten, wenn die Theorie der $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen herangezogen wird. Jeder p-adische irreduzible Faktor der Gleichung (1) besitzt eine einzige PUISEUXsche Zahl in bezug auf p, deren Zähler bzw. Nenner gleich einer der Zahlen $f_i a_i$ bzw. $f_i g_i$ ausfällt. Um-

---

[2]) Ö. ORE: Zur Theorie der algebraischen Körper, *Acta Mathematica*, Bd 44 (1923). S. 219—315. Durch die hier bewiesene Tatsache lassen sich gewisse bekannte Sätze verschärfen.

[3]) M. BAUER: Die Theorie der p-adischen bzw. $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen etc. *Math. Zeitschrift*, Bd. 14 (1922). S. 244—249, § 1.

[4]) Vgl. S. 26 der Arbeit [1]).

gekehrt gehört zu jedem Paare ein irreduzibler Faktor.[5]) Wendet man jetzt den DUMASschen Produktsatz an, so bekommt man (4).

4. Der Satz ist auf die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen ausdehnbar. (Hier kommt nur die erste Beweismethode in Betracht.) Zwar ist nicht der ganze Beweis der DEDEKINDschen Regel übertragbar, die Tatsache jedoch, die wir als Folgerung aus der Regel benützten, bleibt, wie ohne Weiteres zu ersehen ist, bestehen.

---

[5]) M. BAUER: Die Theorie der p-adischen bzw. $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen etc. II. *Math. Zeitschrift*, Bd. 20 (1924), S. 95—97. Vgl. noch die Fussnote [12]) der Arbeit 3). Der letzte Satz der Pussnote [11]) a. a. O. ist zu streichen.