Verallgemeinerung des vorstehenden Satzes von Herrn Bauer.

Von ÖYSTEIN ORE in Kristiania.

Herr BAUER gibt in seiner Note eine interessante Relation zwischen den Neigungszahlen (PUISEUXsche Zahlen) des Polygons in bezug auf p und der Primidealzerlegung von p. Diese Relation gestattet auch, für Spezialfälle, eine Bestimmung der Primideale, welche in p aufgehen.

Herr BAUER hat mir die Vermutung ausgesprochen, dass sein Satz zu dem allgemeineren Falle der Primfunktionenpolygone[1]) erweitert werden könne, so dass man einen Satz erhalte, der für jede Gleichung $f(x)=0$ eine Aussage gäbe. Wie ich im Folgenden zeige, ist diese Verallgemeinerung in der Tat möglich.

Der Satz von Herrn BAUER setzt voraus, wenn er nicht trivial sein soll, dass die Zahl ω mit p einen Idealfaktor gemeinsam hat, d. h. es ist $c_n \equiv 0 \pmod{p}$; x muss daher ein Primfunktionteiler von $f(x) \pmod{p}$ sein. Ich betrachte nun allgemeiner den Fall, dass $\varphi(x)$ eine Primfunktion m^{ten} Grades ist, welche $(\bmod\ p)$ in $f(x)$ aufgeht.

Dann sei

$$(1) \qquad p = \mathfrak{p}_1^{g_1} \mathfrak{p}_2^{g_2} \ldots \mathfrak{p}_k^{g_k} P$$

$$\varphi(\omega) = \mathfrak{p}_1^{a_1} \mathfrak{p}_2^{a_2} \ldots \mathfrak{p}_k^{a_k} Q \qquad N\mathfrak{p}_i = p^{f_i}$$

die Primidealzerlegung von p und $\varphi(\omega)$, wobei die Ideale P und Q durch keines der Primideale $\mathfrak{p}_i$ teilbar sind und weiter P zu Q relativ prim ist. Hier muss auch der Grad f_i von $\mathfrak{p}_i$ durch m teilbar sein[2]), man kann folglich

$$(2) \qquad f_i = e_i m$$

schreiben, wo e_i eine ganze rationale Zahl bedeutet.

[1]) Man sehe meine Arbeit: Zur Theorie der algebraischen Körper, *Acta Mathematica*, Bd. 44.

[2]) Loc. cit. Kap. 3. § 5.

Bildet man nun das Polygon $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$, so sind in (1) die Verhältnisse $\frac{a_i}{g_i}$ gleich einer der Neigungszahlen dieses Polygones. Wenn umgekehrt eine Seite S die Projektionen h und l auf die Y-Achse, bzw. X-Achse besitzt, so ist

$$\frac{h}{l} = \frac{eH}{e\lambda} = \frac{H}{\lambda}, \quad (H, \lambda) = 1$$

die Neigungszahl dieser Seite und es gibt immer solche Primideale $\mathfrak{p}_i$, dass $\frac{h}{l} = \frac{a_i}{g_i}$ ist.[3])

Man habe nun für diese Seite

(3) $$\frac{h}{l} = \frac{a_{i_1}}{g_{i_1}} = \frac{a_{i_2}}{g_{i_2}} = \dots = \frac{a_{i_r}}{g_{i_r}},$$

während alle andere Verhältnisse $\frac{a_i}{g_i}$ von $\frac{h}{l}$ verschieden seien.

Dann bestehen die Relationen

(4) $$m\,l = f_{i_1} g_{i_1} + f_{i_2} g_{i_2} + \dots + f_{i_r} g_{i_r},$$

(5) $$m\,h = f_{i_1} a_{i_1} + f_{i_2} a_{i_2} + \dots + f_{i_r} a_{i_r}.$$

Der Beweis kann durch eine Verallgemeinerung des zweiten Beweises des Herrn Bauer geleistet werden. Nach dem Henselschen Hauptsatze folgt aus (1) eine Zerlegung von $f(x)$ in irreduzible p-adische Faktoren und zwar so, dass der Faktor, welcher dem Primideale $\mathfrak{p}_i$ entspricht, vom Grade $f_i g_i$ wird. Man hat daher auch eine Zerlegung

(6) $$f(x) \equiv f_1(x) f_2(x) \dots f_k(x) P(x) \pmod{p^M},$$

wobei der Exponent M beliebig gross gewählt werden kann, und jedes $f_i(x)$ vom Grade $f_i g_i$ ist.

Hier muss, wie leicht ersichtlich $f_i(x)$ (mod p) kongruent einer Potenz von $\varphi(x)$ sein, während $P(x)$ (mod p) nicht durch $\varphi(x)$ teilbar ist. Ferner muss $f_i(x)$ immer ein geradliniges Polygon $(p, \varphi(x))$ besitzen, indem sonst $f_i(x)$ immer (mod p^M) reduzibel würde, wie gross auch M gewählt wird.[4]) Da $f_i(x)$ vom Grade $f_i g_i = e_i g_i m$ ist, wird

$$f_i(x) \equiv \varphi(x)^{e_i g_i} \pmod{p};$$

das geradlinige Polygon von $f_i(x)$ wird daher eine Projektion von

---

[3]) Die Richtigkeit dieser Bemerkungen folgt aus dem Satze 26. Kap. 3. § 5 in meiner oben erwähnten Arbeit.

[4]) Loc. cit. Satz E, Kap. 2. § 6.

der Länge $e_l g_l$ auf der X-Achse haben Ist nun für ein Primideal $\mathfrak{p}_{l_j}$ die Relation (3) erfüllt, so wird das entsprechende $f_{l_j}(x)$ ein geradliniges Polygon mit der Neigungszahl $\frac{a_{l_j}}{g_{l_j}} = \frac{h}{l}$ besitzen.

Nach (6) hat man

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) \ldots f_k(x) P(x) + p^M N(x),$$

und man kann hier M so gross annehmen, dass die Glieder $p^M N(x)$ keinen Einfluss auf dem Polygone $(p, \varphi(x))$ von $f(x)$ haben. Indem man den Multiplikationssatz[5]) für Polygone anwendet, ersieht man, dass das Hauptpolygon von $f(x)$ aus den geradlinigen Polygonen der Faktoren $f_l(x)$ nach steigender Neigung zusammengesetzt ist. Dieses Polygon wird daher auch eine Seite mit der Neigungszahl $\frac{h}{l} = \frac{H}{\lambda}$ besitzen und diese Seite ist natürlich mit S identisch. S entsteht daher durch Zusammensetzen der Polygone der Faktoren

$$f_{l_j}(x) \quad (j = 1, 2, \ldots r);$$

folglich ist auch die Projektion l von S auf der X-Achse gleich der Summe der Projektionen dieser Polygonen, also

$$l = e_{l_1} g_{l_1} + e_{l_2} g_{l_2} + \ldots + e_{l_r} g_{l_r}. \tag{7}$$

Multipliziert man diese Relation mit m so folgt nach (2) die Relation (4). Die Richtigkeit der Relation (5) ergibt sich dann aus (4) indem man die Beziehungen (3) beachtet.

Wenn für die Seite S $e = 1$ ist, wird h zu l relativ prim, und es folgt aus (3), dass alle g_{l_j} durch l teilbar werden. Dann ist aber nach (7) $r = 1$, $g_{l_1} = l$ und $a_{l_1} = h$ und auch $f_{l_1} = m$.

Kristiania, 29 April 1924.

---

[5]) Man sehe meine Arbeit: Zur Theorie der Irreduzibilitätskriterien, *Math. Zeitschr.* Bd. 18, pp 278—288.