Über die Positivität von Summen, die nach trigonometrischen oder Legendreschen Funktionen fortschreiten. (Erste Mitteilung.)

Von Leopold Fejér in Budapest.

Einleitung.

1. Bei der Behandlung vieler und verschiedenartiger Fragen, die sich auf trigonometrische Polynome und Reihen, so wie auf verwandte Polynome und Reihen beziehen, hat die folgende elementare Bemerkung eine gewisse Bedeutung gewonnen:

Die Summen der Partialsummen der Reihe

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta+\ldots$$

sind alle nichtnegativ. D. h. wenn ich $s_n^{(0)}=\frac{1}{2}+\cos\theta+\ldots+\cos n\theta$ und $s_n^{(1)}=s_0^{(0)}+s_1^{(0)}+\ldots+s_n^{(0)}$ setze, so ist $s_n^{(1)}\geqq 0$ für jedes reelle θ und für jeden nichtnegativen ganzzahligen Wert von n.

In den folgenden Zeilen möchte ich einige äusserst elementare Anwendungen dieser Bemerkung zusammenstellen. Die Resultate sind teils neu, teils alt, beziehen sich auf endliche oder unendliche Summen von der Form

$$\sum a_n\cos n\theta,\quad \sum(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta)\,r^n,\quad \sum a_n P_n(\cos\theta),$$

und bestehen aus vielfach gut brauchbaren hinreichenden Bedingungen für die Positivität der betrachteten unendlichen oder endlichen Summen. Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die Sätze, welche sich auf die Summen $\sum a_n P_n(\cos\theta)$ beziehen (wo $P_n(\cos\theta)$ das Legendresche Polynom bezeichnet) manchmal einen einfacheren Wortlaut haben als diejenige, welche sich auf die trigonometrischen Summen beziehen.

§ 1.

Unendliche und endliche trigonometrische und harmonische Summen. Ein Satz über die Partialsummen der Potenzreihe.

2. Betrachten wir die trigonometrische Kosinusreihe

$$(1) \qquad \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \ldots + a_n \cos n\theta + \ldots$$

und es sei

$$(2) \qquad S_n = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\theta + \ldots + a_n \cos n\theta.$$

Ferner sei

$$(3) \qquad \frac{1}{2} + \cos\theta + \ldots + \cos n\theta = s_n,$$

und

$$(4) \qquad s_0 + s_1 + \ldots + s_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2 = \sigma_n$$

gesetzt. Da $\sigma_n \geqq 0$, so ist, um Kriterien für Positivität zu gewinnen, nach Abel naheliegend statt $\frac{1}{2}$, $\cos\theta, \ldots \cos n\theta$ die nichtnegativen Grössen $\sigma_0, \sigma_1, \ldots \sigma_n$ einzuführen. Da

$$\cos n\theta = s_n - s_{n-1} = \sigma_n - \sigma_{n-1} - (\sigma_{n-1} - \sigma_{n-2}) = \\ = \sigma_n - 2\,\sigma_{n-1} + \sigma_{n-2},$$

so ist

$$(5) \qquad S_n = \sum_{\nu=0}^{n-2} (a_\nu - 2\,a_{\nu+1} + a_{\nu+2})\,\sigma_\nu + (a_{n-1} - 2\,a_n)\,\sigma_{n-1} + a_n\,\sigma_n.$$

Es sei

$$(\mathrm{I}) \qquad \lim a_n = 0.$$

Dann ist für eine innere Stelle θ des Intervalles $(0, 2\pi)$, da doch $\sigma_n(\theta) \leqq \frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$, auf Grund von (5):

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} S_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu - 2\,a_{\nu+1} + a_{\nu+2})\,\sigma_\nu,$$

falls die rechtsstehende Reihe konvergiert. Ich setze nun (ausser (I)) voraus, dass die Koeffizientenfolge $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ eine monoton abnehmende, konvexe Folge sei, d. h. dass nicht nur

(II') $$a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n \geqq \ldots \geqq 0,$$

sondern auch

(II'') $$a_0 - a_1 \geqq a_1 - a_2 \geqq \ldots \geqq a_n - a_{n+1} \geqq \ldots \geqq 0$$

gilt.[1]) Dann sind die Koeffizienten der Reihe (6) (mit Rücksicht auf (II'')) alle nichtnegativ, die Reihe (6) konvergiert (mit Rücksicht auf (I) und (II')), und es ist alsdann

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu\theta = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu - 2a_{\nu+1} + a_{\nu+2})\, \sigma_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu - 2a_{\nu+1} + a_{\nu+2}) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\nu+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu - 2a_{\nu+1} + a_{\nu+2}) \sin^2(\nu+1)\frac{\theta}{2} \geqq 0.$$

Wir haben also das folgende Theorem erhalten:

Theorem I. *Bilden die Koeffizienten* $a_0, a_1, \ldots a_m \ldots$ *der trigonometrischen Reihe*

(7) $$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos\theta + \ldots + a_n \cos n\theta + \ldots$$

eine nichtnegative, monoton zu Null abnehmende, konvexe Folge, so ist die Reihe (7) *für* $0 < \theta < 2\pi$ *nicht nur konvergent, sondern ihre Summe ist nichtnegativ; u. zw. ist*

(8) $$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu\theta = \frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu - 2a_{\nu+1} + a_{\nu+2}) \sin^2(\nu+1)\frac{\theta}{2},$$

$$(0 < \theta < 2\pi).$$

3. Interessant ist der Spezialfall des trigonometrischen Kosinuspolynoms

(9) $$\frac{\lambda_0}{2} + \lambda_1 \cos\theta + \lambda_2 \cos 2\theta + \ldots + \lambda_n \cos n\theta.$$

Um Theorem I anwenden zu können, muss die Folge

(10) $$\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n, 0, 0, 0, \ldots$$

eine konvexe Nullfolge sein. Hierzu ist jedenfalls notwendig, dass die $(n+1)$ Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n$ eine nichtnegative, monoton ab-

---

[1]) Wenn für eine Folge die Bedingungen (I), (II'), (II'') befriedigt sind, so nenne ich sie kurz eine konvexe Nullfolge.

nehmende, konvexe Zahlenfolge bilden; dies ist aber nicht hinreichend. Wenn aber ausserdem für das letzte Koeffizientenpaar $\lambda_{n-1} - \lambda_n \geqq \geqq \lambda_n - 0$, d. h.

(11) $$\lambda_{n-1} \geqq 2\lambda_n,$$

dann (und nur dann) ist (10) eine konvexe Nullfolge. Ich habe also auf Grund von Theorem I das folgende (auch aus der Identität (5) unmittelbar fliessende) Theorem erhalten:

Theorem II. *Bilden im trigonometrischen Polynome*

$$T(\theta) = \frac{\lambda_0}{2} + \lambda_1 \cos\theta + \ldots + \lambda_n \cos n\theta$$

die $(n+1)$ *Koeffizienten*

$$\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n$$

eine nichtnegative, monoton abnehmende, konvexe Zahlenfolge, und ist für das letzte Koeffizientenpaar λ_{n-1}, λ_n

(12) $$\lambda_{n-1} \geqq 2\lambda_n,$$

dann ist für jedes θ

(13) $$T(\theta) \geqq 0.$$

4. Es sei hier eine bekannte Bemerkung eingeschaltet: Sind

(14) $$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n, \ldots$$

(15) $$\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n, \ldots$$

beide nichtnegative, abnehmende, konvexe Folgen, so ist auch

(16) $$\alpha_0\beta_0, \alpha_1\beta_1, \ldots \alpha_n\beta_n, \ldots$$

eine solche. Denn wegen

(17) $$\alpha_n\beta_n - \alpha_{n+1}\beta_{n+1} = \alpha_n(\beta_n - \beta_{n+1}) + \beta_{n+1}(\alpha_n - \alpha_{n+1})$$

ist einerseits $\alpha_n\beta_n - \alpha_{n+1}\beta_{n+1} \geqq 0$, andererseits nimmt diese Differenz mit wachsendem n monoton ab.

5. Da nun

$$\lambda_0 = n+1, \ \lambda_1 = n, \ldots \lambda_{n-1} = 2, \ \lambda_n = 1$$

die Bedingungen des Theorems II befriedigen, so ist

(18) $$\frac{n+1}{2} + n\cos\theta + \ldots + \cos n\theta \geqq 0,$$

womit ich aber nur meine Ausgangsungleichung $s_n^{(1)} \geqq 0$ wiedergewonnen habe. Nun ist aber auch

(19) $$1, r, r^2, \ldots r^n, \ldots$$

für $0 \leqq r \leqq 1$ abnehmend-konvex, also ist, mit Rücksicht auf N° 4,

$$\frac{n+1}{2} + n \cdot r \cos\theta + \ldots + 1 \cdot r^n \cos n\theta \geqq 0, \tag{20}$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots \infty$, $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, woraus dann unmittelbar das ebenfalls bekannte, im § 2 zu benützende Resultat folgt, dass, wenn die harmonische Entwickelung

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) r^n \tag{21}$$

für $0 \leqq r < 1$ konvergiert und ihre Summe ebenda zwischen den Grenzen m und M liegt, dann auch die arithmetischen Mittel ihrer Partialsummen zwischen m und M liegen. Ist also speziell im Einheitskreise $u > 0$, dann sind für $0 \leqq r \leqq 1$ sämmtliche arithmetischen Mittel der harmonischen Entwickelung (21) nichtnegativ.

6. Es sei nun $0 \leqq r \leqq \frac{1}{2}$. Dann ist nicht nur

$$1, r, \ldots r^n, r^{n+1}, \ldots \tag{22}$$

sondern auch

$$1, r, \ldots r^n, 0, 0, 0, \ldots \tag{23}$$

konvex. Also ist, auf Grund von Theorem II und N° 4, für $0 \leqq r \leqq \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} + r \cos\theta + \ldots + r^n \cos n\theta \geqq 0, \tag{24}$$

eine Ungleichung, die auf Grund der Formel

$$\frac{1}{2} + r\cos\theta + \ldots + r^n \cos n\theta = \frac{1 - r^2 + 2r^{n+1}(r\cos n\theta - \cos(n+1)\theta)}{2(1 - 2r\cos\theta + r^2)}$$

leicht zu verifizieren ist. Ich habe also das folgende Theorem gefunden:

Theorem III. *Die Partialsummen der Reihe*

$$\frac{1}{2} + r\cos\theta + \ldots + r^n \cos n\theta + \ldots \tag{25}$$

sind im Kreise

$$0 \leqq r \leqq \frac{1}{2} \tag{26}$$

alle nichtnegativ; d. h.

$$\frac{1}{2} + r\cos\theta + \ldots + r^n \cos n\theta \geqq 0, \tag{27}$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots \infty$; $0 \leqq r \leqq \frac{1}{2}$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$.

7. Somit ist folgender Satz bewiesen: Ist in der harmonischen Entwickelung

$$\frac{a_0}{2} + a_1 r \cos\theta + \ldots + a_n r^n \cos n\theta + \ldots \tag{28}$$

die Koeffizientenfolge $a_0, a_1, \ldots a_n \ldots$ nichtnegativ, abnehmend und konvex, so ist ihre Summe für $0 \leq r < 1$, ihre Partialsummen für $0 \leqq r \leqq \frac{1}{2}$ und jedes n nichtnegativ.

Dieser Satz lässt sich nicht „verbessern" weil für

$$\frac{1}{2} + r\cos\theta + \ldots + r^n \cos n\theta + \ldots \tag{29}$$

die Partialsumme $s_1 = \frac{1}{2} + r\cos\theta$ auf dem Kreise $r = \frac{1}{2} + \varepsilon$ (wo $\varepsilon > 0$) negativ wird.

8. Mein Schüler Herr S. Szidon, dem ich alles Vorhergehende mitgeteilt habe, hat nun die interessante Bemerkung gemacht, dass die zweite Behauptung des Satzes von N° 7 für beliebige, im Einheitskreise positive harmonische Funktionen gültig ist. Es besteht also das

Theorem IV. *Ist die harmonische Summe*

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) r^n \tag{30}$$

für $0 \leqq r < 1$ *positiv, so sind sämmtliche Partialsummen von* (30) *im Kreise* $0 \leqq r \leqq \frac{1}{2}$ *nichtnegativ. Für* $0 \leqq r \leqq \frac{1}{2} + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ *ist das Theorem nicht richtig.*

Die Behauptung ist auf Grund meines Theorems III und der Formel für die n-te Partialsumme von (30)

$$u_n(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\varrho, \varphi) \left[\frac{1}{2} + \frac{r}{\varrho} \cos(\theta - \varphi) + \ldots + \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n \cos n(\theta - \varphi) \right] d\varphi \tag{31}$$

evident, wenn man erst $0 \leqq 2r \leqq \varrho < 1$ annimmt, und dann ϱ zu 1 konvergieren lässt.

Ich kann vielleicht die folgende zusammenfassende Bemerkung für die harmonische Entwickelung einer beliebigen im Ein-

heitskreise positiven harmonischen Funktion formulieren: die arithmetischen Mittel der Partialsummen einer solchen Entwickelung sind im ganzen Kreise $0 \leqq r \leqq 1$, die Partialsummen selbst sind im Kreise $0 < r \leqq \frac{1}{2}$ alle nichtnegativ.

Ist der Konvergenzradius von u gleich R, so muss im Wortlaute des Theorems $\frac{R}{2}$ statt $\frac{1}{2}$ gesetzt werden.

9. Aus dem Theoreme III ergiebt sich noch:

Theorem V. *Ist die Potenzreihe des komplexen Arguments z*

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

für $|z| < 1$ konvergent und ist $|f(z)| \leqq 1$ für $|z| < 1$, so ist

(32) $$|s_n(z)| = |c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n| \leqq 1,$$

für[2])

$$|z| \leqq \frac{1}{2}.$$

Die Behauptung ist auf Grund der Formel

(33) $$s_n(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varrho e^{i\varphi}) \left[\frac{1}{2} + \frac{r}{\varrho}\cos(\theta-\varphi) + \ldots + \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n \cos n(\theta-\varphi)\right] d\varphi$$

mit Rücksicht auf Theorem III evident.

Für $f(z) = \frac{z-a}{az-1}$, $(0 \leqq a < 1)$, ist $|f(e^{i\theta})| = 1$. Da, wegen

(34) $$f(z) = a - (1-a^2)z + \ldots,$$

(35) $$s_1(z) = a - (1-a^2)z$$

und also

(36) $$s_1\left(-\frac{1+\varepsilon}{2}\right) = a + \frac{(1-a^2)(1+\varepsilon)}{2} \qquad (\varepsilon > 0)$$

---

[2]) Da aus $|c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots| \leqq 1$ für $|z| < 1$ nach CAUCHY $|c_n| \leqq 1$ folgt, so ist für $|z| \leqq \frac{1}{2}$ die Ungleichung $|s_n(z)| \leqq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 2$ trivial. Im Theoreme V. ist also nur wesentlich, dass dort in der Ungleichung (32) die Zahl 2 durch 1 ersetzt ist. Ähnlicher Sachverhalt bei Theorem IV.

ist, so ist für $a = \frac{1}{1+\varepsilon}$

$$s_1\left(-\frac{1+\varepsilon}{2}\right) = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon)} > 1,$$

wie klein auch die positive Zahl ε sei. Also lässt sich der Wert $\frac{1}{2}$ des Kreisradius im Theoreme V nicht verkleinern.

Zusammenfassende Bemerkung: Ist $|a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots| \leqq M$ für $|z| < R$, so sind für $|z| \leqq R$ sämmtliche arithmetische Mittel der Potenzreihe,[3]) für $|z| \leqq \frac{R}{2}$ sämmtliche Partialsummen der Potenzreihe $\leqq M$.

§ 2.

Summen, die nach Legendrepolynomen fortschreiten.

10. Ich habe schon in der Einleitung erwähnt, dass wir bei der Summe $\Sigma a_n P_n(\lambda)$ einen einfacheren Sachverhalt vorfinden. Ich will gleich das Gegenstück zu Theorem II formulieren:

Theorem VI. *Wenn die Zahlen $a_0, a_1, \ldots a_n$ monoton abnehmen, d. h.*

$$a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n \geqq 0, \tag{37}$$

dann ist für $-1 \leqq \lambda \leqq +1$

$$a_0 P_0(\lambda) + a_1 P_1(\lambda) + \ldots + a_n P_n(\lambda) \geqq 0,$$

wo $P_\nu(\lambda)$ das ν-te Legendre*sche Polynom bezeichnet.*

Das folgt unmittelbar aus der gewöhnlichen Abel'schen Umformung, mit Rücksicht auf mein altes Resultat,[4]) wonach die Summe der ersten n Legendrepolynome im Intervalle $(-1, +1)$ nichtnegativ ist, d. h.

$$P_0(\lambda) + P_1(\lambda) + \ldots + P_n(\lambda) \geqq 0, \tag{38}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots \infty;\ -1 < \lambda < +1).$$

---

[3]) Vrgl. E. Landau: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin (1916), S. 9 und erstes Kapitel: S. 17—29.

[4]) Aus dieser Tatsache kann man alle wesentliche Eigenschaften der arithmetischen Mittel 2-ter Ordnung der Laplaceschen und Legendreschen Reihe ableiten.

Ich möchte nun in der nächsten Nummer diese Ungleichung (38) aus dem Vorhergehendem ableiten.

11. Setzt man $\lambda = \cos\theta$, so lautet die erzeugende Funktion von $P_n(\cos\theta)$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2z\cos\theta+z^2}}. \tag{39}$$

In einer frühere Arbeit habe ich schon darauf hingewiesen, dass es manchmal vorteilhaft ist statt der Funktion (39)

$$w = \frac{1-z}{\sqrt{1-2z\cos\theta+z^2}} = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (P_n - P_{n-1})\, z^n, \tag{40}$$

d. h. die erzeugende Funktion von $P_n - P_{n-1}$ einzuführen. Die folgenden Ausführungen werden vielleicht noch mehr für die Zweckmässigkeit der Verwendung von (40) sprechen.

Da

$$u = \frac{1+z}{1-z} \tag{41}$$

das Innere des Einheitskreises $|z| < 1$ auf die rechte Hälfte der u-Ebene abbildet, so liefert

$$u^2 = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = \frac{1+2z+z^2}{1-2z+z^2} \tag{42}$$

die Abbildung von $|z| < 1$ auf die ganze Funktionsebene, wenn man letztere entlang der ganzen negativen Axe aufschlitzt. Daraus folgt, dass auch

$$v = \frac{1-\lambda}{2} u^2 + \frac{1+\lambda}{2} = \frac{1-2\lambda z+z^2}{1-2z+z^2} \tag{43}$$

den Kreis $|z| < 1$ auf die volle v-Ebene abbildet, nur das jetzt die v-Ebene entlang der reellen Axe von $v = \frac{1+\lambda}{2}$ bis $-\infty$ aufzuschlitzen ist. Daraus folgt weiter, dass

$$\sqrt{v} = \frac{\sqrt{1-2\lambda z+z^2}}{1-z} \tag{44}$$

den Kreis $|z| < 1$ auf die rechte Funktionshalbebene abbildet, wenn man dieselbe entlang der positiven Axe von 0 bis $\sqrt{\frac{1+\lambda}{2}} = \cos\frac{\theta}{2}$

aufschlitzt. Folglich bildet

$$(45) \qquad w = \frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1-z}{\sqrt{1-2\lambda z+z^2}}$$

den Kreis $|z|<1$ auf die rechte w-Halbebene ab, wenn man dieselbe entlang der positiven Axe von $\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$ bis $+\infty$ aufschlitzt.

Ich habe also das folgende Resultat erhalten:

Theorem VII. *Die erzeugende Funktion*

$$(46) \qquad w = \frac{1-z}{\sqrt{1-2z\cos\theta+z^2}} \qquad (0<\theta<\pi)$$

der Differenz $P_n(\cos\theta) - P_{n-1}(\cos\theta)$ *zweier* LEGENDRE*polynome bildet das Innere des Einheitskreises schlicht auf die rechte w-Halbebene ab, die aber entlang der positiven Axe von* $\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$ *bis* $+\infty$ *aufzuschlitzen ist.*

Aus dieser Tatsache folgt aber, dass der reelle Teil von w für $|z|<1$ *positiv* ist. In der Tat, liegt doch der Bildpunkt w immer in der *rechten* Halbebene. Daraus folgt, mit Rücksicht auf N° 5, dass die Summen der Partialsummen (oder auch die arithmetischen Mittel) der harmonischen Entwickelung des reellen Teiles von w an jeder Stelle des Einheitskreises $|z|\leqq 1$, also speziell auch für $z=1$, nichtnegativ sind. Für $z=1$ geht aber diese harmonische Entwickelung mit Rücksicht auf (40) in

$$(47) \qquad P_0 + (P_1 - P_0) + \ldots + (P_n - P_{n-1}) + \ldots$$

über. Die n-te Partialsumme ist P_n, also die Summe der Partialsummen $P_0+P_1+\ldots+P_n$. Ich habe also erhalten: $P_0+P_1+\ldots+P_n \geqq 0$, w. z. b. w.[5])

[5]) Die Erzeugende Funktion (40) führt auch ganz kurz und ungezwungen zu den MEHLERschen Formeln für $P_n(\cos\theta)$. Da nämlich der reelle Teil von $w(e^{i\varphi})$ für $0\leqq\varphi<\theta$ gleich Null, für $\theta<\varphi\leqq\pi$ aber gleich $\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\varphi)}}$ ist, so ist nach der Formel von DIRICHLET für die Partialsumme der FOURIERschen Reihe (für $\varphi=0$)

$$(48) \qquad P_n = \frac{2}{\pi}\int_\theta^\pi \frac{2\sin\frac{t}{2}}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos t)}} \cdot \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt =$$

§ 3.

Schlussbemerkungen.

12. In dieser Note habe ich ausschliesslich die, mit Hilfe der ABELschen Umformung sich unmittelbar ergebenden, Konsequenzen der Tatsache besprochen, nach welcher die Summe der Partialsummen der Reihe

$$\frac{1}{2} + \cos\theta + \ldots + \cos n\theta + \ldots,$$

$$s_n^{(1)}(\theta) = \frac{n+1}{2} + n\cos\theta + \ldots + \cos n\theta \geqq 0$$

sind, für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$. Für die Reihe

$$\frac{1}{2} + \sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta + \ldots$$

ist sogar schon

$$s_n^{(0)}(\theta) = \frac{1}{2} + \sin\theta + \ldots + \sin n\theta \geqq 0.$$

für $0 \leqq \theta \leqq \pi$, während bei der Reihe

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta + \ldots$$

wieder nur

$$s_n^{(1)}(\theta) = n\sin\theta + (n-1)\sin 2\theta + \ldots + 1 \,.\, \sin n\theta \geqq 0$$

ist, für $0 \leqq \theta \leqq \pi$. Weiter ist

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin(n-1)\theta + \frac{\sin n\theta}{2} \geqq 0,$$

für $0 \leqq \theta \leqq \pi$, u. s. w.

Mit den Konsequenzen dieser Ungleichungen möchte ich mich kurz in einer zweiten Mitteilung beschäftigen. Dort werde ich auch die Polynome

$$\frac{\lambda_0}{2} + \lambda_1 \cos\theta + \ldots + \lambda_n \cos n\theta$$

berücksichtigen, in welchen die Folge $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n$ zwar nichtnegativ, monoton abnehmend und konvex ist, aber $\lambda_{n-1} \geqq 2\lambda_n$ *nicht*

$$= \frac{2}{\pi} \int_\theta^\pi \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}\, dt}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos t)}}$$

— die bekannte MEHLERsche Formel. Ähnlich kann man auch die zweite MEHLERsche Formel aus w erhalten.

besteht. In diesem Zusammenhange kann ich — durch eine Art Ergänzung — dann u. A. einige Resultate von Herrn W. H Young[6]) für das Polynom

$$\frac{\cos\theta}{1}+\frac{\cos 2\theta}{2}+\ldots+\frac{\cos n\theta}{n}$$

aus einem allgemeinen Satze herleiten.[7])

Budapest, den 18-ten Februar 1925.

---

[6]) W. H. Young: On a certain Series of Fourier [Proceedings of the London Math. Society, Ser. II, Bd. XI, (1913), S. 357—366].

[7]) Vrgl. auch E. Landau: Abschätzungen von Charaktersummen, Einheiten und Klassenzahlen, Göttinger Nachrichten (1918), insb. S. 83-84 Fussnote [12]).