Über subharmonische Funktionen und ihre Rolle in der Funktionentheorie und in der Potentialtheorie.[1]

Von Friedrich Riesz in Szeged.

Meine Herren!

Gestatten Sie mir, dass ich ohne geschichtliche Einleitung sofort sage, was ich unter einer *subharmonischen* Funktion verstehe. Um mich bequemer ausdrücken zu können, spreche ich von Funktionen von 2 Veränderlichen; die Verallgemeinerung auf mehrere Veränderliche liegt an der Hand. Eine im Inneren eines Gebietes G definierte, stetige oder nach oben halbstetige Funktion $u(x, y)$, die auch an einzelnen Stellen negativ unendlich werden darf, heisse subharmonisch, wenn sie folgende Eigenschaft besitzt. Jede in einem beliebigen inneren Teilgebiete G' harmonische und auf dem Rande von G' stetige Funktion $U(x, y)$, die auf dem Rande von G' grösser oder gleich $u(x, y)$ ist, erfüllt diese Ungleichung auch innerhalb G'.

Für stetige Funktionen $u(x, y)$ und für solche Teilgebiete und Randwerte, für welche das Dirichletsche Problem gelöst werden kann, lässt sich, was ich ja nicht näher begründen muss, die erklärende Eigenschaft auch so formulieren: Im Inneren von G' ist $u(x, y) \leqq$ als diejenige harmonische Funktion $U(x, y)$, die auf dem Rande von G' dieselben Randwerte besitzt. Sie werden übrigens bald sehen, dass wir uns gleich bei der Definition auf Teilgebiete spezieller Art mit sehr anständigen Rändern, z. B. auf Kreisgebiete hätten beschränken können. Ich will auch sofort betonen, dass der Ansatz, nach welchem wir halbstetige Funktionen

[1] Vortrag, gehalten und wiederholt in den mathematischen Gesellschaften in Stockholm (15. 9. 1924) und in Kopenhagen (18. 9. 1924) und in der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Innsbruck (24. 9. 1924).

und Unendlichkeitsstellen zulassen, keineswegs bei den Haaren herangezogen ist, sondern sich später, besonders bei den potentialtheoretischen Fragen, als natürlich und notwendig erweisen wird.

Wie erkennt man nun, ob eine vorgelegte Funktion subharmonisch ist? Hiefür habe ich vor einigen Jahren ein sehr einfaches und handliches Kriterium angegeben.[2]) Man wird dazu durch die folgende Betrachtung geführt. Ist $u(x, y)$ subharmonisch im Gebiete G und ist K eine Kreisscheibe innerhalb G mit dem Mittelpunkt (x_0, y_0) und mit dem Radius r, so ist

$$u(x_0, y_0) \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\varphi,\ y_0 + r\sin\varphi)\, d\varphi,$$

d. h. der Wert von u im Mittelpunkt ist $\leqq$ dem Mittelwert auf der Kreislinie. Für stetige $u(x, y)$ folgt dies unmittelbar aus der Poissonschen resp. schon aus der spezielleren Gaussschen Formel, wonach der Mittelwert $= U(x_0, y_0)$ ist, wo $U(x, y)$ die in K harmonische Funktion mit denselben Randwerten wie $u(x, y)$ bedeutet. Im Falle einer halbstetigen Funktion gelangt man zu derselben Ungleichung, indem man die Funktion durch stetige Funktionen von oben annähert.

Die obige Ungleichung besagt im wesentlichen nur soviel, dass die definierende Bedingung für Kreisgebiete u. zw. im Mittelpunkt derselben erfüllt ist, also scheinbar viel weniger, als die Definition erfordert. Dass es dem nicht so ist und dass unsere Ungleichung, ja sogar auch schon wenn sie für genügend kleine Werte von r erfüllt ist, eine nicht nur notwendige, sondern auch hinreichende Bedingung darstellt, das wird Ihnen auch ohne den — übrigens sehr kurzen und einfachen — Beweis[3]) sofort einleuchten, wenn Sie nur bemerkt haben, dass die subharmonischen Funktionen die unmittelbare Verallgemeinerung der *konvexen* Funktionen $u(x)$ einer Veränderlichen sind. Denn die harmonischen Funktionen einer Veränderlichen sind ja die linearen Funktionen, und die definierende Eigenschaft der konvexen Funktionen, wonach jeder Bogen der Bildkurve unterhalb der entsprechenden Sehne liegt, entspricht genau der definierenden Eigenschaft der

---

[2]) F. Riesz, Sur les valeurs moyennes du module des fonctions harmoniques et des fonctions analytiques, *Acta universitatis Franc.-Jos.* I, (1922), p. 27—32.

[3]) l. c. [2])

subharmonischen Funktionen. Unserer Ungleichung entspricht nun bei den konvexen Funktionen die Ungleichung

$$u(x_0) \leqq \frac{1}{2} \left\{ u(x_0 - h) + u(x_0 + h) \right\}.$$

Durch eine bekannte Schlussweise folgt auch umgekehrt aus dem Erfülltsein dieser Ungleichung für alle x_0 innerhalb eines Intervalls (a, b) und für genügend kleine Werte von h die Konvexität der Funktion $u(x)$ und genau ebenso *folgt aus dem Erfülltsein der ersten Ungleichung für alle* (x_0, y_0) *und für kleine* r, *dass die Funktion* $u(x, y)$ *subharmonisch ist.*

Ich bemerke noch und weise dabei wieder auf die Analogie mit den konvexen Funktionen hin, dass für solche subharmonische Funktionen, die zweimal stetig differenzierbar sind, die Ungleichung

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} \geqq 0$$

stattfindet, und dass umgekehrt diese Ungleichung das subharmonische Verhalten zur Folge hat. Doch braucht eine subharmonische Funktion nicht unbedingt und keinesfalls überall zweimal differenzierbar zu sein; man denke nur wieder an die Analogie mit den konvexen Funktionen.

Ich möchte den Begriff der subharmonischen Funktion noch von einer anderen Seite her, sozusagen nicht mehr von oben, sondern von unten her beleuchten. Sie wissen ja, dass man die konvexen Funktionen auch auf folgende Weise aus linearen Funktionen erzeugt: man geht aus von einer endlichen oder unendlichen Anzahl von auf einer Strecke linearen Funktionen d. i. von geraden Linienstücken und setzt $u(x)$ überall gleich der grössten Ordinate resp. der oberen Schranke der Ordinaten; mit anderen Worten, man bildet die *obere Enveloppe* der Geradenstücke. Derselbe Prozess, angewandt auf eine endliche oder unendliche Anzahl von in einem Gebiete harmonischen Funktionen $h(x, y)$, liefert eine subharmonische Funktion $u(x, y)$; im Falle unendlich vieler Funktionen ist dabei noch besonders vorauszusetzen, dass die Enveloppe $u(x, y)$ stetig oder nach oben halbstetig ist. Ist nämlich die Funktion $U(x, y)$ in einem inneren Teilgebiete G' harmonisch und auf dem Rande von G' stetig und auf letzterem $\geqq u(x, y)$ so ist sie daselbst und somit auch im Inneren $\geqq$ den Funktionen $h(x, y)$ und also auch $\geqq$ ihrer oberen Enveloppe $u(x, y)$. Dieselbe Schlussweise gilt auch, wenn man über die

Funktionen $h(x, y)$ nur soviel voraussetzt, dass sie subharmonisch sind; die obere Enveloppe ist dann, sobald sie stetig oder nach oben halbstetig ist, ebenfalls subharmonisch.

Ein für die Funktionentheorie besonders wichtiger Fall solcher Enveloppe" ist *der Positivlogarithmus* $\overset{+}{\log} |f(z)|$ *des absoluten Betrages einer analytischen Funktion* $f(z)$, d. i. die obere Enveloppe von $\log |f(z)|$ und von Null.[4])

Ein anderes, sehr interessantes Beispiel steht schon in einer Arbeit von Herrn Hartogs aus dem Jahre 1906.[5]) Betrachten wir eine unendliche Reihe von der Form

$$\sum f_n(z) w^n,$$

wo die $f_n(z)$ in dem Gebiete G analytische Funktionen sind. Für jeden Wert z aus G besitzt diese Reihe, als Potenzreihe in w betrachtet, einen bestimmten Konvergenzradius $R(z)$. Nach der Cauchy-Hadamardschen Regel ist dann

$$-\log R(z) = \lim\sup \frac{1}{n} \log |f_n(z)|.$$

Bildet man also die obere Enveloppe $u_k(z)$ der Funktionen $\frac{1}{n} \log |f_n(z)|$ für $n \geqq k$, so hält $u_k(z)$ bei unbegrenzt wachsendem k abnehmend gegen $-\log R(z)$. Daraus schliesst man, dass $-\log R(z)$ subharmonisch ist, jedenfalls nur in einem etwas allgemeinerem Sinne, da diese Funktion zwar nach unten, aber nicht notwendig auch nach oben halbstetig ist, wie dies das Beispiel

$$\sum z w^n$$

zeigt.

Ein besonders wichtiger Spezialfall sind die Potenzreihen von zwei Veränderlichen; für die associierten Konvergenzradien solcher Reihen folgt nach Hartogs aus obigem eine Beziehung, die an den bekannten Hadamardschen Dreikreisesatz

---

[4]) Hat die Funktion $f(z)$ im Gebiete Nullstellen, so ist die Funktion $\log |f(z)|$, obzwar im allgemeinen harmonisch, im Gebiete als subharmonisch zu betrachten; sie übernimmt hier gewissermassen die Rolle einer konvexen und abteilungsweise linearen Funktion.

[5]) F. Hartogs, Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen etc., *Math. Annalen*, 62, p. 1—88. Das angeführte Beispiel habe ich erst nachträglich in den Text aufgenommen, wie ich denn überhaupt erst nach meinem Vortrage auf den Zusammenhang zwischen der Hartogsschen Arbeit und unserem Ideenkreis aufmerksam wurde. Vgl. auch [9]).

erinnert und auch ähnlich bewiesen wird. Ich gehe darauf nicht näher ein, sondern komme jetzt über einen neueren funktionentheoretischen Satz zu sprechen, der mich vor einigen Jahren zur Idee der subharmonischen Funktion geführt hat und der übrigens auch den Dreikreisesatz als Grenzfall enthält.

Es handelt sich um den in 1915 veröffentlichten Satz von HARDY:

Sei $f(z)$ eine im Kreise $|z|<R$ analytische Funktion, α eine positive Zahl und

$$M_\alpha(r)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|^\alpha d\varphi\right\}^{\frac{1}{\alpha}} \quad (r<R).$$

Dann ist 1) *$M_\alpha(r)$ eine nicht abnehmende Funktion von r;* 2) *$M_\alpha(r)$ und auch* $\log M_\alpha(r)$ *sind konvexe Funktionen von* $\log r$.[6])

Die eleganten Beweise, die Herr HARDY und bald darauf Herr LANDAU[7]) gegeben haben, leuchten nicht genügend in das Wesen des Satzes hinein; ich möchte daher heute den einfachen Beweis vorführen, den ich vor zwei Jahren veröffentlicht habe[8]) und der die Natur des Satzes scharf hervortreten lässt. Der Weg führt über einen entsprechenden allgemeinen Satz betreffend beliebige subharmonische Funktionen, den ich so ausspreche:

Sei $u(x,y)$ eine im Gebiete G subharmonische Funktion; sei

$$I(r)=I(r,u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\varphi,\ y_0+r\sin\varphi)\,d\varphi$$

der Mittelwert dieser Funktion auf der innerhalb G verlaufenden Kreislinie mit dem Mittelpunkt (x_0, y_0) und dem Radius r. Dann gilt Folgendes:

1. *Wenn der Punkt (x_0, y_0) dem Gebiete angehört, so ist $I(r)$ eine nicht abnehmende Funktion von r, solange die entsprechende Kreisscheibe im Inneren von G verbleibt;*

2. *$I(r)$ ist eine konvexe Funktion von* $\log r$ *in jedem in G enthaltenen Kreisringe.*

---

[6]) G. H. HARDY, On the mean value of the modulus of an analytic function, *Proceedings of the London Math. Soc.*, ser. 2, 14 (1915), p. 269—277.

[7]) E. LANDAU, Neuer Beweis eines HARDYschen Satzes, *Archiv der Math. u. Phys.*, 3. Reihe, 25 (1916), p. 173—178.

[8]) l. c [2])

Beweis von 1.: Es seien $r_1 < r_2$ zwei in Betracht kommende Radien, denen also zwei konzentrische Kreise entsprechen. Für den äusseren Kreis bilde man die harmonische Funktion $U(x, y)$ mit denselben Randwerten auf dem Kreise wie jene von $u(x, y)$. Dann ist auf dem inneren Kreise $u \leqq U$ und dasselbe gilt für die entsprechenden Mittelwerte: $I(r_1, u) \leqq I(r_1, U)$. Nach der GAUSSschen Formel für harmonische Funktionen ist aber $I(r_1, U) = I(r_2, U) = I(r_2, u)$ und damit ist 1. bewiesen.

Beweis von 2: Ähnlich wie von 1., nur hat man hier die harmonische Vergleichsfunktion $U(x, y)$, wieder mit denselben Randwerten wie $u(x, y)$, nicht für einen Kreis, sondern für einen Kreisring zu bilden und dann zu beachten, dass für harmonische Funktionen der Mittelwert $I(r, U)$ linear von $\log r$ abhängt.

Nun an den HARDYschen Satz! Die Funktion $u(x, y) = |f(z)|^\alpha$ ist für $|x + iy| = |z| < R$ subharmonisch. Ist nämlich $f(z_0) = 0$, so ist das angegebene Kriterium für z_0 evidentermassen erfüllt, da $u(x, y)$ in z_0 gleich 0, sonst aber $\geqq 0$ ist. Ist aber $f(z_0) \neq 0$, so kann man $u(x, y)$ deuten als den absoluten Betrag eines in der Umgebung von z_0 eindeutig festzulegenden Zweiges von $(f(z))^\alpha$ und man hat nach CAUCHY oder auch nach GAUSS

$$(f(z_0))^\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(z_0 + r e^{i\varphi}))^\alpha \, d\varphi,$$

woraus die Ungleichung $u(x_0 y_0) \leqq I(r, u)$ für kleine r sofort folgt.

Da nun $|f(z)|^\alpha$ subharmonisch ist, so ist also $M_\alpha(r)$ eine nicht abnehmende Funktion von r und eine konvexe Funktion von $\log r$. Um zu zeigen, dass auch $\log M_\alpha(r)$ eine konvexe Funktion von $\log r$ ist, hat man nur die Rolle von $(f(z))^\alpha$ der Funktion $z^\beta (f(z))^\alpha$ zu übergeben und auf diese Weise zu schliessen, dass für jeden reellen Wert von β auch $r^\beta M_\alpha(r)$ eine konvexe Funktion von $\log r$ ist; daraus ergibt sich die Behauptung durch einen vom Dreikreisesatze her wohlbekannten Kunstgriff.

Ich habe über diesen Beweis deshalb so ausführlich berichtet, weil die darin in ihrer primitivsten Form zu Tage tretende Methode sich auch bei anderen funktionentheoretischen Fragen bewährt. Diese Methode, die man als *Methode der kleinsten harmonischen Majorante* bezeichnen dürfte, hat vor dem klassischen Maximumprinzip den Vorteil grösserer Präcision, da bei ihr als Majorante nicht eine Konstante, sondern eine sich sehr stark, ja möglichst nahe anschmiegende harmonische Funktion verwendet wird.[9])

Ich komme nun über eine zweite Anwendung dieser Methode zu sprechen, die von den Herren F und R. NEVANLINNA herrührt. Diese beiden Herren haben bald nach meiner ersten Veröffentlichung dieselbe Methode unabhängig und in etwas verschiedener Form, stark in Formelapparat verhüllt, auf eine Reihe von wichtigen funktionentheoretischen Problemen angewandt.[10]) Ich greife von diesen Anwendungen nur eine sehr einfache, aber frappante heraus. Sie wissen, dass unter den in einem Gebiete regulär analytischen Funktionen jene, die im Gebiete ausserdem beschränkt sind, eine besondere Rolle spielen oder wenigstens eine Zeit lang spielten. Für diese hat Herr FATOU schon 1906, wenigstens für den Fall eines Kreisgebietes, von welchem man dann durch konforme Abbildung auch auf andere Gebiete übergeht, die Existenz von Randwerten „fast überall", d. i. mit eventueller Ausnahme einer Menge vom Masse Null, nachgewiesen.[11]) Dasselbe haben mein Bruder und ich in einem in 1916 in Stockholm gehaltenen Kongressvortrage für beliebige rektifizierbare Kurven bewiesen und zugleich gezeigt, dass die Randfunktion fast überall von Null verschieden ist.[12]) Die Verteilung der Nullstellen im Inneren des Gebietes wurde durch Herrn BLASCHKE klargelegt.[13]) Ich erinnere noch an die verschiedenen Konvergenzsätze für beschränkte Funktionenfolgen. Alle diese Resultate hat man dann schrittweise, mit mehr oder weniger Mühe, auf umfassendere Funktionenklassen

---

[9]) Diese Methode scheint zuerst in 1906 bei HARTOGS. l. c. [5]), aufzutreten, u. zw. für den Beweis der Stetigkeit (und damit auch des analytischen Verhaltens im gewöhnlichen Sinne) einer Funktion von mehreren Veränderlichen, falls nur dieselbe in bezug auf jede einzelne Veränderliche analytisch ist.

[10]) F. u. R. NEVANLINNA, Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, *Acta Soc. Scient. Fennicae*, 50 (5) (1922), p. 3—46.

[11]) P. FATOU, Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta math.*, 30 (1906), p. 335—400.

[12]) F. u. M. RIESZ, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, *Compte rendu du quatrième congrès des math. scandinaves à Stockholm* (1916), p. 27—44.

[13]) W. BLASCHKE, Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen. *Berichte d. sächs. Ges. d. Wiss.*, Math.-phys. Klasse, 67 (1915), p. 194—200.

ausgedehnt. Nun kamen die beiden NEVANLINNA mit folgendem Gedanken heran. Es leuchtet unmittelbar ein, dass alle diese Eigenschaften auch dem Quotienten

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

zweier beschränkter Funktionen zukommen, wenn nur $h(z)$ im Inneren des Gebietes nirgends verschwindet. Wie erkennt man nun, *ob eine Funktion $f(z)$ eine derartige Zerlegung gestattet?*

Antwort: *Notwendig und hinreichend hiefür ist, dass $\overset{+}{\log}|f(z)|$ in dem in Betracht kommenden Gebiete eine harmonische Majorante besitze.* In jedem inneren Teilgebiete gibt es natürlich immer solche Majoranten; ja, da $\overset{+}{\log}|f(z)|$ subharmonisch ist, so kann man auch für die Teilgebiete (mit anständiger Begrenzung) eine kleinste Majorante angeben, nämlich die harmonische Funktion mit denselben Randwerten; hier handelt es sich aber über das Vorhandensein einer einzigen harmonischen Funktion, welche die Funktion $\overset{+}{\log}|f(z)|$ im ganzen Gebiete überragt.

Nun an den Beweis der Behauptung! Erstens: Gibt es eine Zerlegung der gewünschten Art, wobei man noch evidentermassen $|g(z)| \leqq 1$ voraussetzen darf, so ist

$$\overset{+}{\log}\,|f(z)| \leqq \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{h(z)}\right| \leqq \overset{+}{\log}\max|h(z)| - \log|h(z)|;$$

rechts steht die gewünschte harmonische Majorante. Umgekehrt, ist $U(x, y)$ oder anders geschrieben, $U(z)$ eine harmonische Majorante und $V(z)$ ihre konjugierte Funktion, so ergibt $h(z) = e^{-U-iV}$, $g(z) = h(z)\,f(z)$ die gewünschte Zerlegung.

Für den Kreisfall $|z| < R$ kann man nun diese Bedingung leicht umformen. Gibt es nämlich eine Majorante U, so ist der auf den konzentrischen Kreisen $|z| = r < R$ gebildete Mittelwert $I(r, U)$ einerseits nach dem GAUSSschen Satze konstant, andererseits ist er eine Majorante für die entsprechenden *Mittelwerte von* $\overset{+}{\log}|f(z)|$. Also *liegen die letzteren unter einer Schranke,* oder auch, da sie mit r wachsen, so gehen sie bei $r \to R$ gegen einen endlichen Grenzwert. *Umgekehrt, wenn die Mittelwerte von $\overset{+}{\log}|f(z)|$ beschränkt sind,* so bilde man für die Kreise $|z| \leqq r$ die kleinsten harmonischen Majoranten und gehe mit r gegen R; dann wachsen diese Majoranten mit wachsendem r, bleiben im Mittelpunkte unter derselben Schranke wie die Mittelwerte und gehen somit nach dem HARNACKschen Satze gegen eine harmonische Funktion; diese ist die gewünschte *einheitliche Majorante für alle* $|z|<R$.

Ich möchte Sie noch auf ein wichtiges Korollar aufmerksam machen. Für alle Funktionen $f(z)$, für welche der HARDYsche Mittelwert $M_\alpha(r)$ im Kreise $|z|<R$ für irgendein $\alpha>0$ beschränkt bleibt, gilt dasselbe auch für den Mittelwert von $\overset{+}{\log}|f(z)|$; also lassen alle diese Funktionen die Darstellung $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$ durch beschränkte Funktionen zu Speziell gilt dies also auch für die beiden viel behandelten Funktionenklassen, welche den Werten $\alpha=1$ und $\alpha=2$ entsprechen.

Durch den soeben erklärten Zusammenhang zwischen den beschränkten Funktionen und allgemeineren Funktionenklassen lassen sich die erwähnten Sätze über beschränkte Funktionen, wie ich schon angedeutet habe, ohne Mühe, fast mechanisch auf alle diese Klassen übertragen. Einzelne der Sätze über die „logarithmische“ Klasse wurden auch, unabhängig von der NEVANLINNAschen Arbeit und ungefähr zur selben Zeit, durch die Herren PLESSNER und OSTROWSKI entdeckt.[14])

Es fehlt mir die Zeit, um über alle Fragen zu berichten, die mit den subharmonischen Funktionen in Verbindung stehen. So überspringe ich die schöne Arbeit des Herrn PERRON über das DIRICHLETsche Problem,[15]) wie auch jene überraschende Verallgemeinerung der ersten Hälfte des HARDYschen Satzes, die Herr LITTLEWOOD vor einigen Monaten in den Records der London Mathematical Society mitteilte[16]) und für welche ich daselbst die

---

[14]) A. PLESSNER, Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen, Dissertation, Giessen 1923.

A. OSTROWSKI, Über die Bedeutung der JENSENschen Formel für einige Fragen der komplexen Funktionentheorie, *Acta universitatis Franc.-Jos.*, 1 (1922), p. 80–87.

[15]) O. PERRON, Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u=0$, *Math. Zeitschrift*, 18 (1923), p. 42—54. Vgl. auch R. REMAK, Über potentialkonvexe Funktionen, *Math. Zeitschrift*, 20 (1924), p. 126–130; T. RADO u. F. RIESZ, Über die erste Randwertaufgabe für $\Delta u=0$, *Math. Zeitschrift*, 22 (1925), p, 41—44.

[16]) T. E. LITTLEWOOD, On inequalities in the theory of functions, *Proc. London Math. Soc.* (2), 22 (1923) (Records of Proc. at Meetings, November 8 th, 1923).

entsprechende Verallgemeinerung und einen ähnlich lautenden Beweis gab, wie früher für den HARDYschen Satz selbst.[17]) Durch die LITTLEWOODsche Entdeckung angeregt, suchte ich zugleich die entsprechende Verallgemeinerung für den zweiten Teil des HARDYschen Satzes aufzustellen, was mir nun vor einigen Wochen gelang. Der Satz, den ich fand, dürfte Sie interessieren, nicht nur weil er sehr einfach und allgemein ist, sondern auch weil er uns den Schlüssel zu dem Zusammenhange zwischen der allgemeinen subharmonischen Funktion und dem logarithmischen Potential in die Hand gibt.

Jener zweite Teil des HARDYschen Satzes resp. der entsprechende Satz über subharmonische Funktionen besagt, dass der auf konzentrischen Kreisen gebildete Mittelwert $I(r)$ der subharmonischen Funktion $u(x, y)$ eine konvexe Funktion von $\log r$ ist. Diese Tatsache kann auch so formuliert werden. Für $r_1 < r_2 < r_3$ ist

$$\frac{I(r_2)-I(r_1)}{\log r_2-\log r_1} \leqq \frac{I(r_3)-I(r_1)}{\log r_3-\log r_1} \leqq \frac{I(r_3)-I(r_2)}{\log r_3-\log r_2}.$$

Die für die Verallgemeinerung ausschlaggebende Idee ist nun die, dass man diese Quotienten auf die folgende Weise deutet. Man bildet für die in Betracht kommenden Kreisringe die kleinsten harmonischen Majoranten U_{12}, U_{13}, U_{23}, d. i. man löst das DIRICHLETsche Problem mit den Randwerten von $u(x, y)$. Dann ist der betreffende Quotient gleich

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \frac{dU}{dn_a}\, ds,$$

erstreckt über eine beliebige geschlossene Kurve Γ, die den betreffenden Ring in 2 andere Ringe zerschneidet. Das Integral stellt bekanntlich den sogenannten *Durchfluss* der durch U definierten Strömung durch die Kurve Γ dar; da die Strömung stationär ist, so hängt der Integralwert bekanntlich von der Wahl von Γ nicht ab. Der Integralwert ist auch konformen Abbildungen gegenüber invariant; ferner übergehen harmonische und subharmonische Funktionen bei konformer Abbildung in ebensolche. Damit ist die gesuchte Verallgemeinerung, die ich jetzt aussprechen will, schon sehr naheliegend.

[17]) F. RIESZ, Sur une inégalité de M. LITTLEWOOD dans la théorie des fonctions, *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, 23 (1924) (Records of Proc. at Meetings, March 13 th, 1924).

Es sei die Funktion $u(x, y)$ in einem Gebiete G subharmonisch und es seien C_1 in C_2 in C_3 drei geschlossene Kurven in G, welche zu je zwei die drei im Gebiete G gelegenen Ringe 12, 13, 23 einschliessen. Man bilde für jeden dieser Ringe die entsprechende harmonische Funktion U_{ik} mit denselben Randwerten wie $u(x, y)$; sind dann D_{12}, D_{13}, D_{23} die entsprechenden Durchflüsse:

$$D_{ik} = \int_{\Gamma} \frac{d U_{ik}}{d n_s} d s,$$

wo Γ immer den betreffenden Ring in zwei Ringe zerschneidet, so ist

$$D_{12} \leqq D_{13} \leqq D_{23}.$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Bemerkung, dass in dem Falle, wo die in einem Ringe harmonische Funktion auf der inneren oder auf der äusseren Randkurve verschwindet und auf der anderen Randkurve $\geqq 0$ ist, der Durchfluss $\geqq 0$ resp. $\leqq 0$ ist, eine Tatsache, die physikalisch evident ist und z. B. mittels konformer Abbildung auf einen Kreisring leicht bewiesen werden kann.

Nun weiter hinein in die Potentialtheorie! *Das logarithmische Potential einer beliebigen negativen Massenverteilung ist eine subharmonische Funktion,* eine Tatsache, auf welche ja schon die unter gewissen Stetigkeitsbedingungen bestehende Poissonsche Differentialgleichung

$$\Delta u = -2 \pi \varrho$$

hinweist, die man aber auch leicht direkt beweist u. zw. nicht nur für den Fall einer Massenverteilung mit wohlbestimmter Dichte, sondern auch unter der allgemeineren Annahme, dass die Massenverteilung durch eine negative oder genauer nicht positive, sonst beliebige *additive Mengenfunktion* gegeben ist, die also sowohl den Fall isolierter Massenpunkte, wie auch die Linienpotentiale einschliesst. Das entsprechende Potential wird dann bekanntlich durch das im Stieltjesschen Sinne zu deutende Integral

$$\iint \log \frac{1}{r} \, d m$$

geliefert. Dass die so definierte Funktion subharmonisch ist, ergibt sich einfach daraus, dass das Integral durch Addition und durch Grenzübergang aus mit Ausnahme je einer Senke harmonischen, also aus subharmonischen Elementen aufgebaut wird. Auch die in der Definition geforderte Halbstetigkeit nach oben ergibt sich sofort; man hat dazu nur die Funktion $\log \frac{1}{r}$ zuerst in konstanter Höhe abzuschneiden; das so modifizierte Integral ergibt eine stetige Funktion; dann lässt man jene Höhe ins Unendliche wachsen, wodurch unsere stetige Funktionen abnehmend gegen das Potential $u(x, y)$ gehen, das somit stetig oder nach oben halbstetig sein muss. Wenn ich noch gestehe, dass mir gewissermassen eine Umkehrung der Beziehung zwischen Potential und subharmonischer Funktion vor den Augen schwebt und dass eine solche Umkehrung möglich ist, so ist dadurch auch die anfangs vielleicht etwas gekünstelte Forderung der Halbstetigkeit nach oben gerechtfertigt.

Wie soll man nun ans Werk gehen? Einige Anhaltspunkte liefern uns die bekannten Tatsachen über das logarithmische Potential. Hat man ein solches vor sich und will man es in seine Elemente zerlegen, d. h. will man die ursprüngliche Massenverteilung erforschen, so wird man zuerst die Poissonsche Differentialgleichung heranziehen; wenn dann die Massenverteilung eine sehr anständige war, so kann man die Dichte aus der Gleichung ablesen. Unter allgemeineren Bedingungen verzichtet man auf die Feinstruktur und begnügt sich zunächst damit, die additive Mengenfunktion, also die in den einzelnen Teilgebieten enthaltene Masse zu bestimmen. Das geschieht durch Heranziehung der mit Hilfe der Greenschen Formel integrierten Form der Poissonschen Gleichung:

$$\int_{C_1} \frac{d u}{d n_a}\, d s = -2\pi \iint_{G_1} \varrho \, d \sigma,$$

wo die Integrale über das Teilgebiet G_1 resp. über dessen Rand C_1 erstreckt werden; auch kann man im rechtsstehenden Integral an Stelle von $\varrho \, d \sigma$ allgemeiner ein Massenelement $d m$ einsetzen, wo dann das Integral im Stieltjesschen Sinne zu deuten ist.

Hat man nun eine beliebige, in einem Gebiete G subharmonische Funktion $u(x, y)$ vor sich, von der man sonst noch garnichts weiss und will man entscheiden, ob sich diese Funktion als logarithmisches Potential deuten lässt, so wird man zuerst die entsprechende Massenverteilung zu bestimmen suchen. Das Vorangehende liegt es nahe, diese Massenverteilung durch die Formel

$$\text{Masse in } G_1 = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_1}\frac{du}{dn_a}\,ds$$

zu definieren. Doch da stösst man an die Schwierigkeit, dass wir über die Differenzierbarkeit von $u(x, y)$ nichts vorausgesetzt haben. Also hat das rechtsstehende Integral für uns zunächst keinen Sinn. Man könnte es versuchen, nach Analogie der konvexen Funktionen, aus dem vorausgesetzten subharmonischen Verhalten auf gewisse Differenzierbarkeitseigenschaften zu schliessen. Doch die Sache liegt hier viel tiefer, der gerade Weg erweist sich als schwerfällig und es lohnt sich, einen kleinen Umweg zu machen. Dabei stützen wir uns auf die letzte Verallgemeinerung des Hardyschen Satzes. Wir umgeben C_1 mit einer naheliegenden Kurve C_2, bilden die im Ringe 1 2 harmonische Funktion U_{12} mit denselben Randwerten wie jene von $u(x, y)$ und den entsprechenden Durchfluss D_{12}, d. i. das Integral

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{dU_{12}}{dn_a}\,ds$$

längs einer beliebigen, den Ring in zwei weitere Ringe zerschneidenden Kurve Γ. Zieht man nun C_2 auf C_1 zusammen, so folgt aus jener Verallgemeinerung des Hardyschen Satzes, dass D_{12} *monoton abnehmend gegen einen bestimmten endlichen Grenzwert geht.* Ähnliches gilt für Ringe, die sich von Innen an C_1 anschliessen; hier geht der entsprechende Durchfluss wachsend gegen einen Grenzwert und man sieht auch sofort, dass dieser zweite Grenzwert $\leq$ sein muss als der erste (die eventuelle Verschiedenkeit der beiden Grenzwerte darf uns nicht überraschen; man braucht ja nur auf das Potential einer auf C_1 verteilten einfachen Schicht zu denken). Man hat dann nur noch diesen Grenzwerten, die man vielleicht als *Fluss aus* C_1 *und Fluss nach* C_1 bezeichnen dürfte, jene Rolle spielen zu lassen, welche den Integralen

$$\int\limits_{C_1}\frac{du}{dn_a}\,ds, \quad -\int\limits_{C_1}\frac{du}{dn_i}\,ds$$

bei genügenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen nach der klassischen Theorie zukäme. Man erhält so eine Massenverteilung, aus der dann die ursprüngliche Funktion $u(x, y)$, abgesehen immer von einer additiven harmonischen Funktion, als logarithmisches

Potential oder durch Heranziehung der GREENschen Funktion aufgebaut werden kann. Genauer gesagt: Jedes innere Teilgebiet G von G enthält eine endliche Masse und *das entsprechende logarithmische Potential ist daselbst* $= u(x, y) +$ *eine harmonische Funktion.* Dasselbe gilt natürlich auch für G selbst, wenn die entsprechende Masse endlich ist. Verwendet man an Stelle von $\log \frac{1}{r}$ die entsprechende klassische GREEN*sche Funktion des Gebietes G,* und ist $u(x,y) \leqq 0$ im Gebiete G, *so existiert das entsprechende Integral und ergibt wieder* $u(x,y) +$ *eine harmonische Funktion,* u. zw. unabhängig davon, ob die entsprechende Masse endlich oder unendlich ist.[18]) Die Voraussetzung $u(x,y) \leqq 0$ kann man evidentermassen durch jene ersetzen, dass es zu $u(x, y)$ eine harmonische Majorante $U(x,y)$ für das ganze Gebiet gebe; in dieser Form ist die Bedingung *nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig.*

Hiemit hat man eine gewissermassen abschliessende Lösung des aufgeworfenen Umkehrproblems erhalten; man könnte noch höchstens den Schönheitsfehler der additiven harmonischen Funktion zu beseitigen suchen, indem man diese als Potential von Massen auf dem Rande oder ausserhalb G deutet.

Die Einzelheiten des Beweises, der übrigens nach dem Gesagten nur noch sehr wenig Mühe kostet, kann ich hier heute nicht mehr ausführen. Ich möchte noch sagen, dass man die letzten Resultate entsprechend auch auf den Raum resp. auf subharmonische Funktionen von mehreren Veränderlichen übertragen kann, obzwar hier das sehr brauchbare Werkzeug der konformen Abbildung versagt.

Schliesslich folgt aus diesen Resultaten durch Heranziehung der LEBESGUEschen Theorie sofort die Existenz der ersten Differentialquotienten einer beliebigen subharmonischen Funktion „fast überall", also mit eventueller Ausnahme einer Nullmenge. und dasselbe gilt auch für den Differentialoperator Δu, wenn man diesen entsprechend verallgemeinert deutet, wodurch man auch an die bekannten Untersuchungen von Herrn PETRINI Anschluss gewinnt.

---

18) Die hier ausschlaggebende Bemerkung, dass es bei Verwendung der GREENschen Funktion an Stelle des Logarithmus auf die Endlichkeit der Gesammtmasse nicht mehr ankommt, verdanke ich Herrn M. RIESZ.