Bibliographie.

E. Czuber, Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Wissenschaft und Hypothese XXIV), VIII + 343 S., Berlin, B. G. Teubner, 1923.

Der hauptsächliche Zweck dieses schönen Buches besteht darin, die Mathematiker mit den Spekulationen bekannt zu machen, die in neuerer Zeit von philosophischer Seite über die Grundlagen und die Anwendungsmöglichkeiten der Wahrscheinlichkeitsrechnung angestellt worden sind. In Kapitel I lernt der Leser die feine Begriffsanalyse MEINONG's kennen; auch weiter im Buche hat man oft Gelegenheit, die tiefdurchdachten Gadankengänge dieses Philosophen in der lichtvollen Darstellung des Herrn Verfassers zu bewundern, Die Kapitel II, III, IV und VI behandeln die fundamentalen Sätze der mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie, wobei auch die ursprünglichen Ansichten der grossen Mathematiker, welche diese Disziplin erschaffen haben, zur Sprache kommen. Diese Kapitel dürften für einige Philosophen, deren manchmal recht sonderbare Auffassungen im Buche gelegentlich geschildert werden, gerade unentbehrlich sein. Mit grossem Interesse wird man Kapitel VII lesen über den Versuch, die sogenannte unvollständige Induktion auf Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen zurückzuführen, und Kapitel VIII über Wahrscheinlichkeitstheorie und Naturphilosophie. Von dem reichen Inhalt dieses Schlusskapitels sei hier nur auf die Darstellung und Kritik der ausgedehnten MARBE'schen Untersuchungen hingewiesen, welche die bedeutungsvolle Frage aufklären sollten, ob das wirkliche zufällige Geschehen den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitstheorie entsprechend vor sich geht.

Referent, der das Buch ursprünglich zum Vergnügen gelesen hatte, nimmt mit Bestimmtheit an, dass es recht vielen Lesern freudige Stunden bereiten wird.

Tibor Radó.

W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, Band II, erste Lieferung (Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen XX, 2), VI + 242 S., B. G. Teubner, Berlin, 1924.

Diese erste Lieferung des zweiten Bandes des bekannten OSGOODschen Lehrbuches enthält in drei Kapiteln (I. Integraldarstellungen und mehrfache Reihen. Die erweiterten Räume. — II. Implizite Funktionen. Teilbarkeit. —

III. Singuläre Stellen und analytische Fortsetzung. Rationale Funktionen.) die Grundlagen der allgemeinen Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Grössen. Eine meritorische Besprechung behalten wir uns vor, bis dieser zweite Band vollendet vorliegt

J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül (Grundlehren der math. Wissenschaften X), X + 311 S., Berlin, J. Springer, 1924.

Die mathematische Methode der allgemeinen Relativitätstheorie ist die von RICCI begründete, von ihm als absoluter Differentialkalkül bezeichnete Methode. Diese Methode heisst jetzt allgemein, nach einem Vorschlage von SCHOUTEN, der RICCI-Kalkül.

RICCI selbst verwendet den absoluten Differentialkalkül nur zum Aufbau der Theorie der n-dimensionalen RIEMANNschen Räume, indem er den Begriff des covarianten Differentialquotienten von CHRISTOFFEL fertig übernimmt. Sobald aber der Vektorbegriff differentialgeometrisch verallgemeinert wurde, tauchte die Frage nach der geometrischen Bedeutung des covarianten Differentialquotienten auf. Diese Bedeutung wurde von LEVI-CIVITA und von WEYL klargestellt. Sie führen den Begriff der Parallelverschiebung ein und daraus erhalten sie den Begriff des Differentialquotienten. SCHOUTEN hingegen geht vom Differentialquotienten aus, dessen Eigenschaften er durch fünf Postulate festlegt, und ermittelt die verschiedenen Verschiebungsmöglichkeiten; diese sind seine linearen Übertragungen. In Kapitel II, in welchem wohl der Schwerpunkt des Buches liegen dürfte, bestimmt er die 27 möglichen Übertragungsarten. Kapitel III bringt die Theorie der homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen, und der Systeme von solchen, und die Integrabilitätsbedingungen der in der Differentialgeometrie vorkommenden Systeme Dann folgt das PFAFF'sche Problem, welches übrigens bereits eine Frage der Tensoranalysis wurde, durch die Theorie der CARTAN'schen symbolischen Formen, der „formes à multiplication extérieure".

Der affinen, der RIEMANN'schen, der WEYL'schen Geometrie ist je ein Kapitel gewidmet. Jedes dieser Kapitel besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil beschäftigt sich mit den Transformationsfragen und mit den speziellen Fällen der betreffenden Geometrie; im zweiten Teile werden die eingebetteten Mannigfaltigkeiten untersucht.

Es würde zu weit führen, die Ergebnisse auch nur in grossen Zügen zu schildern. Viele Resultate rühren vom Verfasser selbst her; es werde hier nur auf seine Methode hingewiesen, welche eine einheitliche Untersuchung der affinen Räume ermöglicht und welche im speziellen Falle des euklidischen Raumes zur affinen Geometrie im engeren Sinne führt, deren Aufbau durch PICK, BLASCHKE und Andere erfolgte. Dieselbe allgemeine Methode ermöglicht auch, sinngemäss spezialisiert, den Aufbau der RIEMANNschen und WEYLschen Geometrien. Wie man sieht, ist der karakteristische Zug des ganzen Buches das Streben nach methodischer Einheitlichkeit.

Das Schlusskapitel behandelt die invarianten Zerlegungen der Grössen höheren Grades.

Stephan Grynaeus.

C. Runge und H. König, Vorlesungen über numerisches Rechnen (Die Grundlehren der math. Wissenschaften XI), VIII + 372 S., Berlin, J. Springer, 1924.

Die praktische Auffassung, dass ein mathematisches Problem erst dann als erledigt betrachtet werden kann, wenn man imstande ist, die Lösung mit vorgeschriebener Genauigkeit tatsächlich zu ermitteln, ist auf die Entwicklung der reinen Mathematik vom grössten Einflusse gewesen. Die wichtigsten besonderen Funktionen, die brauchbarsten Reihenentwicklungen, sie wurden gleichsam auf Bestellung des Praktikers eingeführt; das Problem der analytischen Darstellung willkürlicher Funktionen, die Methode der successiven Approximationen, sind, um Beispiele zu nennen, praktischen Ursprungs. Die Auswahl des Stoffes im vorliegenden Buche ist so getroffen, dass fast jedes Kapitel die Keime ganzer Theorien enthält. Das Buch wird darum für die Studierenden der reinen Mathematik von grossem Bildungswerte sein. Der Umstand, dass es aus zwanzigjähriger Praxis hervorgegangen ist, sowie die Namen der Verfasser bürgen dafür, dass auch der Lehrer der Mathematik aus demselben Belehrung und Nutzen ziehen wird. Beim Abhalten von Übungen werden die vielen sorgfältig durchgerechneten Aufgaben ausgezeichnete Dienste leisten.

Tibor Radó.

R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I (Grundlehren der math. Wissenschaften XII), XIII + 450 S., Berlin, J. Springer, 1924.

Vor ungefähr einem Vierteljahrhundert wurde die von manchem Mathematiker verhöhnte geometrisch-physikalische Anschauung durch die Arbeiten von Hilbert über das Dirichletsche Prinzip als Wegweiser zur Ausbildung strenger mathematischer Methoden wiederbelebt. Seitdem hat sich die physikalische Denkweise, vereint mit mathematischer Strenge, in allen Problemkreisen bewährt, die entweder der Physik entsprungen sind oder eine physikalische Deutung zulassen. Es ist mit grösster Freude zu begrüssen, dass R. Courant es unternommen hat, über die Ergebnisse dieser mathematischen Geistesrichtung, zu denen auch er selbst sehr viel Wertvolles beigesteuert hat, unter Benützung Hilbertscher Abhandlungen und Vorlesungen in einem zweibändigen Lehrbuche zu berichten.

Der vorliegende erste Band beginnt mit den linearen Transformationen und quadratischen Formen und kommt dann über orthogonale Funktionensysteme, Fouriersche Reihen und Integrale, lineare Integralgleichungen und die Grundtatsachen der Variationsrechnung hindurch zu seinem wichtigsten Material, zu den Schwingungs- und Eigenwertproblemen der mathematischen Physik. Bei der Behandlung dieser Probleme, wie auch schon in den vorbereitenden Kapiteln, „spielen die Gesichtspunkte der Variationsrechnung die beherrschende Rolle, d. h. das Bestreben, mathematische Grössen und Funktionen durch Extremumseigenschaften zu charakterisieren". In lebhafter und verblüffend einfacher Weise wird hier dargelegt, wie man aus den Variationsansätzen sozusagen alles über die Eigenschaften der Eigenfunktionen, über ihr gegenseitiges Verhalten und über die Asymptotik der Eigenwerte und der Eigenfunktionen herauslesen kann. Im letzten Kapitel werden spezielle Funktionen (BESSEL, LEGENDRE, LAPLACE) hauptsächlich mit Hilfe funktionentheoretischer Methoden untersucht.

Mit Hinsicht auf die voraussichtliche grosse Verbreitung und eine baldige Neuausgabe des inhaltsreichen und ausgezeichnet geschriebenen Werkes fühlt sich Referent verpflichtet, auch auf eine schwache Stelle desselben hinzuweisen. Es handelt sich um das LEBESGUEsche Integral, das Stiefkind der meisten Lehr- und Handbücher über Analysis. Es weiss ja heute jeder Mathematiker, dass in den neueren Problemkreisen der Analysis, wie z. B. Integralgleichungen, Entwicklung nach Orthogonalfunktionen, DIRICHLETsches Prinzip und verwandte Variationsansätze u. s. f., der LEBESGUEschen Theorie eine wichtige Rolle zukommt und wenn auch die Verwendung des LEBESGUEschen Integrals in vielen Fällen durch Kunstgriffe umgangen werden kann, der forschende Mathematiker auch schon deshalb eine tiefere Einsicht in diese Theorie gewinnen muss, weil er aus derselben den Mut schöpft, um bei seinen Ansätzen vor scheinbar grossen Stetigkeits- und Konvergenz-Schwierigkeiten nicht zurückzuschrecken. Die meisten Lehrbücher schweigen noch über das LEBESGUEsche Integral. Das vorliegende Buch ist schon freigiebiger; es widmet ihm und seinen Anwendungen fast volle drei Seiten (p. 95—98). Dabei wird aber die Definition zwar nicht unrichtig, doch derart formuliert, dass sie von der Tragweite des LEBESGUEschen Integrals eine falsche Vorstellung gibt. Verfasser scheint es übersehen zu haben, dass der springende Punkt der LEBESGUEschen Ideenbildung, nämlich die Benutzung einer Intervalleinteilung nach Ordinaten statt Abscissen, eben dazu dient, eine Fehlerabschätzung a priori zu sichern, wodurch dann die Konvergenzfrage der Produktsummen bei unendlicher Verdichtung der Einteilung im vorhinein im positiven Sinne entschieden ist.

Auf S. 96 unten steht noch der folgende Satz: „Sind $f_1(x), f_2(x), \ldots$ summable Funktionen, für welche $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n(x)^2\,dx = 0$ ist, so gilt bis auf eine Nullmenge auch $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = 0$." Auf einen ähnlich lautenden, ebenfalls falschen Satz hat schon vor 45 Jahren A. HARNACK (Math. Ann. Bd. 17 u. 19) den Beweis der noch heute unentschiedenen Konvergenz — beinahe überall — der FOURIERschen Reihe einer jeden quadratisch integrierbaren Funktion begründet. Es war ganz überflüssig, den obigen, durch ganz elementare Beispiele widerlegbaren Satz aus der Vergessenheit hervorzuholen und nicht lieber den entsprechenden, richtigen Auswahlsatz anzuführen, aus welchem dann auch die weiter ohne Beweis und auch ohne Angabe ihres Zusammenhanges angeführten, nach E. FISCHER und dem Referenten benannten Sätze sich fast ohne Mühe ergeben.

Wir hoffen, dass die zweite Auflage dieses trefflichen Werkes der LEBESGUEschen Entdeckung mehr gerecht wird.

F. R.

N. E. Nörlund, Differenzenrechnung (Grundlehren der math. Wissenschaften XIII), IX + 532 S., Berlin, J. Springer, 1924.

Von der berufensten Feder geschrieben, erscheint ein Lehrbuch der Differenzenrechnung, dieser vielumfassenden Disziplin der Analysis, die in den letzten Jahren durch eine Reihe von Arbeiten des Verfassers neu aufblühte. Das vorliegende Werk, das neben den klassischen Resultaten diesen tiefen Untersuchungen gewidmet ist, und auch die schönen einschlägigen Ergebnisse BIRKHOFF's und HILB's enthält, ist im vollen Masse geeignet, das Eindringen in die neuere Literatur zu erleichtern. Überall ist der Verfasser bestrebt durch die klassischen Beispiele die behandelten Theorien lebendig zu machen; auf diese Weise gelangen die BERNOULLIschen und EULERschen Polynome (sowohl die gewöhnlichen, wie auch diejenigen höherer Ordnung, die der Verfasser eingeführt hat), die Gammafunktion (deren Eigenschaften als Sonderfälle aus der allgemeinen Theorie der Differenzengleichungen gewonnen werden), die Interpolations- und die Fakultätsreihen (von denen eine mannigfaltige Anwendung gemacht wird) zur Sprache.

Der Begriff der Hauptlösungen ist der springende Punkt der NÖRLUNDschen Theorie. Da nämlich jede Lösung der Differenzengleichung $F(x+\omega) - F(x) = \varphi(x)$, ($\varphi(x)$ gegeben, $F(x)$ gesucht) durch Hinzufügung einer periodischen Funktion von der Periode ω wieder in eine Lösung übergeht, so handelt es sich darum, eine ausgezeichnete Lösung von interessanten funktionentheoretischen Eigenschaften herauszugreifen. Dieses Problem — das früher von APPEL und HURWITZ angegriffen wurde — führt zu dem Begriff der Hauptlösung, deren Eigenschaften im 3., 4. und 7. Kapitel dargelegt werden. Für $\varphi(x) = \nu x^{\nu-1}$ ergeben sich die BERNOULLIschen Polynome, für $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ die Ableitung der Gammafunktion.

Der zweite Teil des Buches (Kapitel 10 bis 15) ist den linearen Differenzengleichungen gewidmet, d. h. Gleichungen von der Form

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(x)\, u(x+i) = \varphi(x).$$

Nach den bekannten Sätzen von HÖLDER und POINCARÉ (über das asymptotische Verhalten der Lösungen) wird die Gleichung mit rationalen Koeffizienten behandelt, durch Zuhülfenahme der sog. LAPLACE'schen Transformation und der Fakultätsreihen, wobei eine Klasse von Gleichungen, die der FUCHS'schen Klasse von Differenzialgleichungen analog ist, besonders hervorgehoben wird. Es werden sodann die BIRKHOFF'schen Untersuchungen über ein System von Differenzengleichungen erster Ordnung und die von diesem Autor eingeführte Matrixlösung in knapper Form dargelegt. Den Schluss des Werkes bilden die, an die THIELEsche Interpolationsformel anknüpfenden Untersuchungen—und der Zusammenhang mit der Theorie der Kettenbrüche.

Ein ausführliches Literaturverzeichnis findet am Ende des Buches Platz.

A. H.

F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Dritte Auflage, erster Band, *Arithmetik—Algebra—Analysis.* Ausgearbeitet von E. Hellinger (Grundlehren der math. Wissenschaften XIV), XII + 321 S., Berlin, J. Springer, 1924.

Von den meisterhaften Vorlesungen, die Felix Klein ein Menschenalter entlang an der Universität Göttingen hielt, ist nun die erste in Druck erschienen. Allbekannt ist die gewaltige Wirkung, die diese Vorlesungen, die bisher nur als Autographien erhältlich waren, durch Form und Inhalt auf ihre Hörer und Leser ausübten. Jeder, dem es vergönnt war dem Hörerkreise Klein's anzugehören, stand unter dem Eindrucke seiner Vorlesungen, die gar Vielen als Ideal mathematischen Universitätsunterrichts galt. Mit Freude begrüsst wird nun von allen Fachgenossen das Unternehmen, dass diese Vorlesungen nun in Druck erscheinen sollen.

Die vorliegende — von E. Hellinger ausgezeichnet ausgearbeitete — Vorlesung ist der erste Teil der Elementarmathematik, der Arithmetik, Algebra und Analysis gewidmet, mit einem Anhang über Mengenlehre. Zwei Gesichtspunkte durchdringen das ganze Werk. Erstens: die vielen historischen Daten, die an jeder Stelle hervorgehoben werden und die einen schönen Einblick in die allgemeine Entwicklung der modernen Mathematik gestatten. Zweitens: die vielfach hervortretenden pädagogischen Exkurse, da ja die Vorlesung in erster Reihe für die Lehrer der Mathematik bestimmt ist. Durch die grosse Fülle der behandelten Fragen ist das Werk eine äusserst anregende Lektüre für alle Mathematiker. An vielen Stellen ist der Beweis nicht in extenso geführt, nur angedeutet; auf diese Weise gelingt es den mannigfachen Stoff in gedrängter Kürze darzulegen. Es gelingt, ausgehend von den Elementen, zu den schwierigsten Problemen emporzusteigen, wie es z. B. im Abschnitt über algebraische Gleichungen (p 109—153) der Fall ist, wo schliesslich der Leser einen schönen Überblick über die schwierige Theorie der Gleichungen 5-ten Grades gewinnt.

Jeder Mathematiker wird mit Freude das Erscheinen der übrigen Vorlesungen F. Klein's erwarten, und es ist zu hoffen, dass es zur Verbreitung seiner Ideen in einem weiten Kreise von Lesern erfolgreich beitragen wird.

A. H.

E. T. Whittaker, Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper. Nach der zweiten Auflage übersetzt von Dr. F. und K. Mittelsten Scheid (Grundlehren der math. Wissenschaften XVII), XII + 462 S., Berlin, J. Springer, 1924.

Willkommen für alle Mathematiker, die sich mit Mechanik oder mit der Theorie der Differentialgleichungen im reellen Gebiet beschäftigen, ist die deutsche Übersetzung des trefflichen Werkes Whittaker's. Der musterhaften Darstellung, die im englischen Original vor zwei Jahrzehnten zuerst erschien, verdankt dieses Werk, dass es bald das meistgebrauchte Lehrbuch dieses Gebietes wurde zum Studium der Probleme der höheren Mechanik und zur

Einführung in das Dreikörperproblem. Es war die Absicht des Verfassers die allgemeinen Theoreme der einschlägigen Literatur darzulegen, die durch eine reiche Fülle von Beispielen und Aufgaben ergänzt werden. Auf diese Weise ist das Werk auch die beste Einführung zu den POINCARÉschen Untersuchungen über Himmelsmechanik; es finden ausser den Prinzipien der Störungstheorie, die Integralinvarianten, die allgemeine Theorie der Bahnkurven, die berühmten Sätze von BRUNS und POINCARÉ über die Nichtexistenz gewisser Integrale der mechanischen Probleme, eine mehr oder weniger ausführliche Besprechung.

Übergangen — oder auf Aufgaben verwiesen — werden Fragestellungen von spezíellerem Charakter. Vielleicht ist in dieser Hinsicht bedauernswert, dass die Theorie der bedingt periodischen Lösungen, die in neuerer Zeit in der Physik eine wichtige Rolle spielen, nicht in das Werk eingearbeitet wurde.

Man findet im vorliegenden Buch eine vorzügliche Bearbeitung der einschlägigen Literatur, so dass das Werk sowohl zum Studium, wie auch als Nachschlagewerk in hervorragender Weise geeignet ist.

A. H

G. Pólya und G. Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I. *Reihen - Integralrechnung—Funktionentheorie.* (Grundlehren der math. Wissenschaften XIX), XIV + 338 S., Berlin, J. Springer, 1925.

Als wir auf die Hochschule gingen, da war für die meisten von uns die Mathematik eine reiche Sammlung von mehr oder weniger anregenden Sätzen und Aufgaben, an denen wir mitarbeiten und unsere intuitive Kraft erproben konnten. So blieb es auch während der ersten Semester. Dann kam Systematik, es kamen mit grosser Präzision aufgebaute Theorien, die wir bewundern und uns aneignen durften, wo wir aber nicht mehr an den einzelnen Bausteinen zu rütteln wagten und das brachte Enttäuschung. Das vorliegende Buch ist berufen, der neuen Generation diese Enttäuschung zu ersparen. Für mittlere und höhere Semester bestimmt, aber auch dem Kenner manches Neue bietend, will er den Studierenden durch systematisch angeordneten Aufgaben an eigenes Denken und selbständiges Forschen in einigen wichtigen Gebieten der Analysis gewöhnen.

Auswahl und Anordnung des Stoffes sind meisterhaft. Der Leser wird fast spielend in Problemkreise eingeführt, die heute im Mittelpunkte der Interesse stehen, so z. B. additive Zahlentheorie, Probleme der Gleichverteilung, asymptotische Auswertung von Integralen, Folgen analytischer Funktionen, schlichte Abbildungen, die Verwertung des Maximumsprinzips durch PHRAGMÉN und LINDELÖF, die Dreikreisesätze von HADAMARD und HARDY u. s. f.

Wir sehen mit grösster Erwartung dem zweiten Bande entgegen.

F. R.