Über eine geometrische Darstellung der Fareyschen Reihe.

Von GEORG PÓLYA in Zürich.

Eine hübsche geometrische Darstellung der wohlbekannten Haupteigenschaft der Fareyschen Reihe rührt von SYLVESTER her.[1]) Da diese Darstellung, wie es scheint, etwas in Vergessenheit geraten ist,[2]) da ferner die Ausführungen von SYLVESTER nicht ganz unanfechtbar sind, ist es vielleicht angezeigt den Gegenstand hier kurz wieder aufzunehmen.

1. Den folgenden Betrachtungen liegt ein festes rechtwinkliges Koordinatensystem in der Ebene zugrunde. Als *Gitterpunkte* werden, wie üblich, die Punkte bezeichnet, deren beide Koordinaten ganze Zahlen sind.[3]) Der Gitterpunkt p, q heisst *sichtbar* (ausführlicher: vom Nullpunkte aus sichtbar), wenn die Verbindungsstrecke der Punkte $0, 0$ und p, q durch keinen Gitterpunkt hindurchgeht, d. h. wenn p und q teilerfremd sind. Man sagt, dass der Gitterpunkt p, q dem Gitterpunkte p', q' *vorangeht* (ausführlicher: bei zyklischer Anordnung um den Nullpunkt herum vorangeht), wenn

$$p q' - p' q > 0$$

ist. Man betrachte einen Bereich B, der beide Gitterpunkte p, q und p', q' enthält; man sagt, dass der Gitterpunkt p, q dem Gitterpunkte p', q' *innerhalb B unmittelbar* vorangeht, wenn p, q dem p', q' vorangeht und kein Gitterpunkt p'', q'' in B liegt, der dem Punkte p, q folgt und dem Punkte p', q' vorangeht.

[1]) J. J. SYLVESTER, The collected Mathematical Papers, Cambridge, 1912, Bd. IV, S. 78—81.

[2]) Z. B. ist in dem wichtigen Werk von L. E. DICKSON, 'History of the Theory of Numbres Bd. I, S. 157 die Abhandlung von Sylvester wohl erwähnt, nicht aber die geometrische Darstellung.

[3]) D. h. rationale ganze Zahlen, $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2. Ich werde den folgenden Satz beweisen:

Es sei B entweder

ein abgeschlossener konvexer Bereich, der den Nullpunkt enthält, oder

B soll diejenigen Punkte x, y enthalten, die den beiden Ungleichungen

$$x \geqq 0, \quad 0 \leqq y \leqq f(x)$$

genügen, wobei f(x) eine für $x \geqq 0$ definierte, nie zunehmende und nie negative Funktion bedeutet.

Sind p, q und p' q' zwei in B liegende sichtbare Gitterpunkte und geht p, q dem p' q' innerhalb B unmittelbar voran, so ist

$$p q' - p' q = 1.$$

Der Satz umfasst zwei wesentlich verschiedene Fälle. Im ersten Fall, wenn B konvex ist, muss B nicht notwendigerweise endlich sein: B kann z B. der durch die Ungleichung

$$|x - y| \leqq 1$$

abgegrenzte Parallelstreifen sein. Der zweite Fall des Satzes ist abgesehen von der geometrischen Einkleidung, schon von HALPHÉN[4]) bewiesen worden. Der geläufige Satz betreffend die FAREYsche Reihe, lässt sich beiden Fällen subsumieren: man nehme B als das durch die Ungleichungen

$$0 \leqq x \leqq n, \quad 0 < y \leqq n$$

abgegrenzte Quadrat, oder was auf dasselbe hinauskommt,

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{für } 0 \leqq x \leqq n, \\ 0 & \text{für } \quad\; x > n \end{cases}$$

an.[5])

3. Der Beweis beruht auf einem bekannten Prinzip, das ich (allgemeiner, als es hier nötig ist) folgendermassen formulieren möchte:

L e m m a. *Es sei P eine endliche, abgeschlossene Fläche, begrenzt durch ein Polygon, dessen sämtliche Eckpunkte Gitterpunkte sind. Der Flächeninhalt von P ist gleich der Anzahl der in P*

[4]) G. H. HALPHÉN, Bull. de la Soc. Math. de France, Bd. 5 (1876—1877) S. 170—173.

[5]) Für eine Anwendung der Konfiguration der sichtbaren Gitterpunkte innerhalb des Kreises $x^2 + y^2 \leqq s^2$ vgl. G. PÓLYA und G. SZEGÖ, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Berlin, 1925, Bd. II, S. 376, Lösung 239.

gelegenen Gitterpunkte, vorausgesetzt, dass diese mit passenden Gewichten gezählt werden, folgendermassen:

Ein Gitterpunkt im Innern wird voll gezählt, nämlich mit dem Gewichte 1.

Ein Gitterpunkt am Rande, aber nicht in einer Ecke (also im Innern einer Seite) wird mit dem Gewichte $\frac{1}{2}$ *gezählt.*

Ein Gitterpunkt in einer Ecke, deren Innenwinkel α *beträgt, wird mit dem Gewichte* $\frac{\alpha}{2\pi}$ *gezählt.*

Man kann die Festlegung betreffs Gewichte auch einheitlicher fassen: Man lege um jeden Gitterpunkt einen infinitesimalen Kreis und ordne dem Gitterpunkt als Gewicht den im Innern von P gelegenen Bruchteil der Kreisfläche zu.

Die Summe der Gewichte sämtlicher in P gelegenen Gitterpunkte ist eine Funktion von P und sei mit $G(P)$ bezeichnet. $G(P)$ ist unverändert bei einer Translation von P, deren den Koordinatenachsen parallele Komponenten ganzzahlig sind, ebenso wie die Fläche von P Wenn P und P' nur Randpunkte gemeinsam haben, und $P+P'$ die kleinste Fläche bezeichnet, die sowohl P wie P' enthält, so ist

$$G(P)+G(P')=G(P+P').$$

D. h. $G(P)$ ist additiv, ebenso wie die Fläche von P. Ist P ein Elementardreieck, d. h. ein Dreieck, dessen drei Ecken Gitterpunkte sind, das aber keine weiteren Gitterpunkte enthält, so ist

$$G(P)=\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2};$$

die Fläche von P ist bekanntlich[6]) auch $\frac{1}{2}$. Aus der Zerschneidung eines beliebigen P in Elementardreiecke folgt nun das Lemma.

4. Um die erste Hälfte der unter 2 ausgesprochenen Behauptung zu beweisen, betrachte man das abgeschlossene Dreieck, dessen drei Ecken

$$0,0;\quad p,q;\quad p',q'$$

im konvexen Bereich B liegen, u. zw. seien die beiden letztge-

[6]) Vgl. z. B. F. Klein. Vorlesungen über Zahlentheorie, 1894, Bd. I, Einleitung.

nannten sichtbare und in B unmittelbar aufeinanderfolgende Gitterpunkte. $\frac{1}{2}(pq' - p'q)$, der Inhalt des Dreieckes, ist nach Voraussetzung positiv, nicht Null. Die beiden von $0, 0$ auslaufenden Seiten des Dreiecks sind, abgesehen von den Endpunkten, von Gitterpunkten frei, da p, q und p', q' sichtbar sein sollen. Das Dreieck ist ganz in B enthalten, da B konvex ist; irgend ein in ihm gelegener Gitterpunkt würde, da er nicht an den von $0, 0$ auslaufenden Seiten liegen kann, p, q folgen und p', q' vorangehen. Es soll aber kein solcher Gitterpunkt in B vorhanden sein, und somit ist das Dreieck, abgesehen von den drei Eckpunkten, von Gitterpunkten frei. Es ist, was wir ein Elementardreieck nannten, und somit ist sein Flächeninhalt

$$= \frac{1}{2}(pq' - p'q) = \frac{1}{2},$$

w. z. b. w.

5. Nun betrachten wir die zweite Annahme betreffend die Gestalt von B. Ist p, q ein zu B gehöriger Gitterpunkt, so gehört das abgeschlossene Rechteck mit den vier Ecken

$$0, 0; \quad p, 0; \quad p, q; \quad 0, q$$

ganz dem Bereiche B an. Die kleinste Fläche, die alle solchen Rechtecke enthält, sei B^* genannt. B^* ist ein Teil von B, und zwar im allgemeinen ein eigentlicher Teil, aber enthält alle Gitterpunkte, die B enthält. B^* genügt übrigens derselben Voraussetzung, als B (die zugehörige monotone Funktion $f^*(x)$ ist streckenweise konstant). Es genügt den Satz für B^* zu bewiesen. Man bemerke, dass B^* ein abgeschlossener Bereich ist.

Man betrachte das abgeschlossene Dreieck, dessen drei Ecken

$$0, 0; \quad p, q; \quad p', q'$$

in B^* liegen, u. zw. seien die beiden letztgenannten sichtbare und in B^* unmittelbar aufeinanderfolgende Gitterpunkte. Der Punkt p, q (wie auch p', q') kann eventuell Randpunkt von B^* sein; jedoch kann die Verbindungsstrecke dieses Punktes mit $0, 0$, als Diagonale eines bei der Konstruktion verwendeten Rechtecks, abgesehen eventuell von den Endpunkten, keine Randpunkte von B^* enthalten. Würde das betrachtete Dreieck überhaupt Randpunkte von B^* enthalten, so müsste die treppenförmige Randlinie durch die Verbindungslinie von p, q und p', q' eintreten und wieder hinaustreten (Eintritt- und Austrittpunkt könnten auch zusammenfallen) und so eine (einspringende) Ecke im Dreieck besitzen. Diese wäre jedoch ein Gitterpunkt in B^*, der p, q folgt und p', q' vorangeht, was ausgeschlossen ist. Somit liegt das Dreieck ganz in B^* und der Beweis wird wie unter 4 zu Ende geführt.

6. *Falsch* ist jedoch der folgende Satz[7]: Das Gebiet B_0 sei sternförmig vom Punkt 0, 0 aus gesehen, d. h. jeder von 0, 0 auslaufende Halbstrahl hat mit B_0 eine in 0, 0 anfangende volle Strecke gemeinsam. Ferner sei B_0 so beschaffen, dass für irgend zwei in B_0 liegende sichtbare, darin unmittelbar aufeinanderfolgende Gitterpunkte p, q und p', q' die Relation

$$pq' - p'.q = 1$$

besteht. Dann besteht dieselbe Relation für irgend zwei in B liegende sichtbare, darin unmittelbar aufeinanderfolgende Gitterpunkte p, q und p', q', falls B zu B_0 ähnlich und ähnlich gelegen ist, mit dem Punkt 0, 0 als Ähnlichkeitszentrum.

Gegenbeispiel: Man verbinde geradlinig den Punkt 1, 0 mit 1, $\frac{1}{2}$ und den letzteren mit $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$. Durch achtmalige Spiegelung dieses Streckenzuges an den beiden Koordinatenachsen und deren Halbierungslinien erhält man ein geschlossenes Polygon; der umschlossene „ordenskreuzförmige" Bereich B_0 erfüllt die Voraussetzung. Dehnt man die Linearabmessungen von B_0 bei Festhaltung des Nullpunktes und der Richtungen im Verhältnis 1 : 2, so erhält man einen Bereich B, der die Behauptung nicht erfüllt.

---

[7]) Sylvester scheint ähnliches a. a. O. zu behaupten und sogar beweisen zu wollen.