Remarques sur des propriétés topologiques.

Par M. B. de Kerékjártó (Princeton University).

1° La définition la plus générale pour la notion d'élément d'accumulation a été donnée par M. Fréchet dans la forme suivante[1]):

Soit C un ensemble abstrait; à chaque sousensemble M de C, nous ordonnons certains éléments de C appelés éléments d'accumulation de M sur C de telle façon que les conditions suivantes soient satisfaites: 1. Tout élément d'accumulation d'un ensemble M est élément d'accumulation de chaque ensemble comprenant M. 2. Le fait pour un élément P d'être ou non élément d'accumulation d'un ensemble M ne dépend que des éléments de M autres que P.

Or, on voit qu'une telle définition rend déjà possible la discussion des questions concernant la notion de la continuité, c'est-à-dire l'étude de la topologie d'ensembles abstraits tels que C qui ont le nom *classe (V)* dans la (nouvelle) terminologie de M. Fréchet.

Soient M et M' deux ensembles dans des classes *(V)*; nous disons que M et M' sont des *images topologiques* l'un de l'autre ou que M est transformé en M' par une transformation topologique si à chaque élément de M correspond un élément de M' et un seul et inversement et si ensuite la condition suivante est satisfaite:

Étant M_1 un sousensemble arbitraire de M et P un point de M qui est élément d'accumulation de M_1, alors l'ensemble M_1' correspondant à M_1 a le point P' qui correspond à P pour élément d'accumulation (et inversement).

On entend par une *propriété topologique* d'un ensemble M une propriété qui s'exprime en termes d'éléments de la classe *(V)*

[1]) Bulletin des Sciences Math. (2) 42. (1918), p. 140.

laquelle contient l'ensemble M et de la définition d'éléments d'accumulation. (Cette explication comprend aussi des propriétés qui ne se rapportent pas à M.)

Par définition, chaque propriété topologique peut s'exprimer en termes de la notion d'élément d'accumulation. Si l'on pense à la propriété surement „topologique" de la surface de Möbius qu'elle est une surface non-orientable, la dernière proposition semble être un paradoxe. Néanmoins on pourrait formuler la dite propriété par la notion d'élément d'accumulation. D'abord, on considère les conditions auxquelles la définition d'élément d'accumulation ou ce qui revient au même celle de voisinage doit satisfaire pour obtenir une classe (D) (ou espace métrique). On appelle ainsi une classe pour laquelle une définition de distance a été donnée dans le sens qu'à deux éléments quelconques P et Q un nombre non négatif $(P, Q) = (Q, P)$ est ordonné comme leur distance; cette définition doit satisfaire aux conditions suivantes: 1. $(P, Q) = 0$ si $P = Q$ et seulement dans ce cas-ci; 2. poir trois éléments arbitraires P, Q et R on a $(P, Q) + (Q, R) \geq (P, R)$. On doit le résultat de caractériser les classes (D) parmi les classes (V) à des recherches importantes de MM. Fréchet, Alexandroff et Urysohn. Or dans les classes (D), on peut déterminer les courbes continues grace aux théorèmes de MM. Hahn, Mazurkiewicz et Sierpinsky. Parmi celles-ci les courbes simples peuvent être caracterisées d'une façon simple due à M. Tietze. À l'aide de la notion de courbe simple et continue on est ramené à considérer les espaces euclidiens à un nombre fini de dimensions comme des puissances d'une ligne simple continue et ouverte (Tietze). On a alors le moyens pour la topologie combinatoire.

Une propriété topologique de M est appelée *propriété absolue* si dans sa définition n'entrent aucuns autres termes que la définition des éléments de M et celle des éléments d'accumulation de M appartenant à M. Autrement elle est appelée une *propriété relative* de M; celle-ci n'exprime qu'une propriété de M relative à sa situation dans la classe.

Or, on a la proposition suivante:

Chaque propriété absolue d'un ensemble M reste invariable pour toutes les transformations topologiques de M. Inversement, chaque propriété qui reste invariable pour toutes les transformations topologiques de M est une propriété absolue de M.

La première partie de la proposition est évidente. Pour vérifier la seconde, on considère une nouvelle classe C' contenant tous les éléments de M et seulement ceux-ci, en gardant les définitions d'éléments d'accumulation comme donné pour la classe primitive C. Par la transformation identique qui fait correspondre chaque élément de M à soi-même, on obtient une transformation topologique de l'ensemble M situé en C en la classe C'. La propriéte en question étant invariable, elle peut s'exprimer pour cette nouvelle classe C, c'est-à-dire en termes d'éléments de M.

2⁰ Pour une application de la proposition ci-dessus, considérons la propriété d'un ensemble d'être fermé, compact, extrémal.

On entend par un ensemble *fermé* un ensemble qui contient tous ses éléments d'accumulation. Un ensemble est appelé *compact* si chaque sousensemble infini de l'ensemble a au moins un élément d'accumulation (qui peut appartenir à l'ensemble ou non). Un ensemble fermé et compact est appelé *extrémal*.

La notion d'ensemble compact et surtout celle d'ensemble extrémal (introduites toutes les deux par M. Fréchet) jouent un rôle important dans les classes *(L)* (voir 4⁰) en rapport avec le théorème de Heine—Borel et des problèmes analogues.

En ce qui concerne leur signification pour les classes *(V)*, on sait qu'aucune des notions: ensemble fermé et ensemble compact ne représent une propriété absolue des ensembles.

De plus, la prcpriété d'un ensemble d'ètre extrémal n'est pas une propriété absolue. Soit par exemple C une classe dont les éléments sont les segments: $(x, y$ coordonnées dans le plan)

$$K_0 : x = 0, \ 0 \leq y \leq \frac{1}{4}$$

$$K_0' : x = 0, \ \frac{3}{4} \leq y \leq 1$$

$$K_n : x = \frac{1}{n}, \ 0 \leq y \leq 1 \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

disons qu'un ensemble (K_i) a l'élément K_n pour élément d'accumulation s'il y a une suite de points appartenant à des segments K_i différents et qui tendent vers un point de K_n. Alors on voit que chaque ensemble infini extrait de l'ensemble $(K', K_0, K_1, \ldots)$ a K_0 et K_0 pour élément d'accumulation. Désignons par M l'ensemble $(K_0, K_1, K_2, \ldots)$; M n'est pas extrémal en C. Néanmoins

M est l'image topologique de l'ensemble $(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ lequel est extrémal dans l'ensemble des nombres réels.

3° Considérons la condition qu'il faut imposer à une classe (V) pour que la notion d'extrémalité y soit invariable c'est-à-dire pour qu'une image topologique d'un ensemble extrémal y soit toujours extrémal. La condition suivante est évidemment nécéssaire:

Étant M un ensemble extrémal dans la classe considerée et P n'importe quel élément d'accumulation de M, il y a un sous-ensemble infini de M qui a P pour seul élément d'accumulation.

Autrement il y aurait un ensemble M et un élément d'accumulation P de M tel que chaque sousensemble de M qui a P pour élément d'accumulation a aussi un autre élément d'accumulation (lequel appartient à M puisque M est fermé). Considérons alors la classe C' formée de tous les éléments de M autres que P en gardant les mêmes définitions d'élément d'accumulation que pour la classe C. L'ensemble M' consistant en tous les éléments de C' est fermé est compact d'après nos suppositions. L'ensemble M' dans la classe C consistant en tous les éléments de M autres que P n'est pas fermé. L'identité fournit une transformation topologique entre les ensembles M' de la classe C' et celui de la classe C.

Pour voir que la condition est nécéssaire, il ne faut que montrer que l'image d'un ensemble extrémal est toujours *fermé*, pourvu que l'ensemble et l'image soient situés dans des classes (V) satisfaisantes à notre condition. Supposons donc que l'image M' d'un ensemble extrémal M ne soit pas fermé et soit P' un élément d'accumulation de M' qui ne lui appartient pas. Soit M'_1 un sousensemble infini de M' qui a P' pour seul élément d'accumulation et soi M_1 le sousensemble correspondant de M. M_1 étant infini, il a au moins un élément d'accumulation. L'image d'un élément d'accumulation P de M_1 est premièrement un élément de M' (puisque P est nécéssairement un point de M) ensuite elle est un élément d'accumulation de l'image M'_1 de M_1 d'après la définition des transformations topologiques. Par conséquent, le seul élément d'accumulation P' de M'_1 appartient à l'ensemble M'.

On voit que la condition peut se mettre aussi sous la forme suivante:

Étant M un ensemble extrémal dans la classe considérée et

P n'importe quel élément d'accumulation de M, il y a un sous-ensemble dénombrable de M qui a l'élément P et aucun autre pour élément d'accumulation.

4⁰ On apelle classe *(L)*, d'après M. Frechet, un ensemble pour lequel une définition de la *limite* a été donnée de sorte que pour chaque suite d'éléments $P_1, P_2, \ldots$ ou bien cette suite est divergente, ou bien elle est convergente et tend vers un élément déterminé. La définition de la limite n'est d'ailleurs assujettie qu'aux deux conditions suivantes: 1 Si les éléments de la suite sont identiques à un certain elément P, la suite est convergente et tend vers P. 2. Si une suite $P_1, P_2, \ldots$ tend vers P, chaque suite infinie extraite de celle-ci tend aussi vers P. Étant M un ensemble dans une classe *(L)*, on dit qu'un élément P de la classe est élément d'accumulation de M s'il y a une suite d'élément distincts de M qui converge vers P.

La condition nécéssaire et suffisante pour qu'une classe *(V)* puisse être considérée comme classe *(L)* est la suivante:[2])

Étant P un élément d'accumulation d'un ensemble M, il y a un sousensemble dénombrable M_1 de M tel que chaque suite infinie extraite de M_1 a l'élément P et aucun autre pour élément d'accumulation.

On voit que cette condition est plus restrictive que celle donnée à la fin du paragraphe précédent; de la on conclût en particulier (ce qui est d'ailleur facile à vérifier directement) que pour les classes *(L)* la propriété de l'extrémalité a un caractère invariable.

D'autre part, on voit qu'étant M un ensemble extrémal dans une classe pour laquelle cette propriété est invariable, on peut considérer l'ensemble M comme une classe *(L)*. En particulier, si C est une classe compacte pour laquelle l'extrémalité est une propriété invariable, alors C est une classe *(L)*.

---

[2]) Frechèt, Bull. des Sciences Math. (2), *42* (1918) p. 146—147.