Das vollständige Fokalsystem einer ebenen algebraischen Kurve.

Von Marcel Grossmann in Zürich.

Plücker[1]) nannte *Brennpunkt* einer algebraischen ebenen Kurve einen Punkt, dessen isotrope Geraden Tangenten der Kurve sind. Demnach hat eine algebraische Kurve n^{ter} Klasse n reelle Brennpunkte, auch dann, wenn die Kurve keine reellen Züge aufweist, aber ihre Gleichung reelle Koeffizienten hat. Denn von den beiden absoluten Kreispunkten der Kurvenebene kann man zwei Büschel von je n Tangenten an die Kurve ziehen, sofern die Kurve keine besondere Lage zum Unendlichen hat. Diese $2n$ isotropen Tangenten zerfallen in n Paare konjugiert imaginärer Geraden, deren n reelle Schnittpunkte die n reellen Brennpunkte der Kurve sind.

Man weiss wenig von den Fokaleigenschaften der höheren ebenen algebraischen Kurven. Zum Teil aus dem Grunde, weil die Plückersche Definition der Brennpunkte unvollständig ist. Sie gibt nur für $n = 2$ das volle Fokalsystem der Kurve. Im Folgenden soll diese Definition des Fokalsystems vervollständigt werden.

Es liege also eine Kurve n^{ter} Klasse $C^{(n)}$ vor. Um die allgemeinen Begriffe zu entwickeln, werde vorausgesetzt, dass diese Kurve zum Absoluten der Ebene keine ausgezeichneten Beziehungen habe, wie dies ja auch bei der Plückerschen Theorie getan werden muss.

Von den n Plückerschen Brennpunkten aus kann man an die Kurve noch $n.(n-2)$ weitere, nicht isotrope Tangenten ziehn. Diese umhüllen und bestimmen eine andere Kurve $(n-2)^{\text{ter}}$ Klasse $C^{(n-2)}$, die der gegebenen Kurve $C^{(n)}$ *metrisch-assoziiert* heisse. Denn es gilt der Satz:

---

[1]) J. f. Math. 10 (1832).

Wenn von den n^2 gemeinsamen Tangenten zweier Kurven n^{ter} Klasse $n.p$ $(p<n)$ einer Kurve p^{ter} Klasse angehören, so gehören die übrigen $n.(n-p)$ einer Kurve $(n-p)^{\text{ter}}$ Klasse an.[2])

Wendet man diesen Satz an auf die gegebene Kurve $C^{(n)}$ & die n · Brennpunktsbüschel derselben, so enthalten die n^2 gemeinsamen Tangenten dieser beiden Kurven n^{ter} Klasse $2n$ isotrope Geraden, die, als dem Absoluten angehörend, $p=2$ ergeben.

Die so bestimmte Kurve $C^{(n-2)}$ hat ihrerseits wieder $(n-2)$ Brennpunkte im Sinne Plückers. Diese will ich die $(n-2)$ reellen Brennpunkte *zweiten Ranges* der ursprünglichen Kurve $C^{(n)}$ nennen, in Gegenüberstellung zu den n reellen Brennpunkten ersten Ranges der Kurve $C^{(n)}$, die nichts anderes sind als die Plückerschen Brennpunkte der Kurve.

In diesem Reduktionsprozess kann man weitergehen: von den $(n-2)$ Brennpunkten zweiten Ranges gehen noch $(n-4)$ nicht isotrope Tangenten an die Kurve $C^{(n-2)}$, die wieder eine neue Kurve $C^{(n-4)}$ umhüllen & der gegebenen Kurve $C^{(n)}$ zuordnen. Ist die Klasse der gegebenen Kurve eine gerade Zahl, $n=2k$, so wird man zuletzt zwei Brennpunkte k^{ten} Ranges finden; ist dagegen $n=2k-1$, so endet das Verfahren bei einem einzigen Brennpunkt k^{ten} Ranges.

Hieraus ergibt sich unmittelbar eine einfache kanonische Darstellung der Gleichung der Kurve in Linienkoordinaten:

Es gehören nämlich einer linearen Mannigfaltigkeit von Kurven n^{ter} Klasse an die drei Kurven: die gegebene Kurve $C^{(n)}$, die ihr metrisch-assoziierte Kurve $C^{(n-2)}$, ergänzt durch die beiden isotropen Strahlbüschel & endlich die Kurve n^{ter} Klasse, welche in die n Strahlbüschel zerfällt, deren Scheitel die n Brennpunkte ersten Ranges sind. Denn diese drei Kurven n^{ter} Klasse haben n^2 gemeinsame Tangenten.

Bezeichnet man also mit $C^{(n)}$ & $C^{(n-2)}$ die linken Seiten der Liniengleichung der ebenso bezeichneten Kurven & ist

$$\psi=\xi^2+\eta^2=0$$

die Liniengleichung des Absoluten, während a_{i1} & b_{i1} die cartesischen Koordinaten des i^{ten} der n Brennpunkte ersten Ranges

[2]) Siehe die Ausführungen über den dualen Schnittpunktsatz bei Berzolari, Theorie der höheren algebraischen Kurven, Art. III. C 4 der Enzyklopädie der math. Wiss, insbesondere Anm. 366.

sind, so muss die lineare Abhängigkeit bestehen

$$C^{(n)} = \prod_{i=1}^{n} (a_{i1}\xi + b_{i1}\eta + 1) + \lambda_1 \psi C^{(n-2)},$$

wo λ_1 ein wohlbestimmter Parameter ist, wenn die Kurve $C^{(n)}$ gegeben ist.

Aus dem nämlichen Grunde schliesst man weiter, dass

$$C^{(n-2)} = \prod_{i=1}^{n-2} (a_{i2}\xi + b_{i2}\eta + 1) + \lambda_2 \psi C^{(n-4)},$$

wobei a_{i2} & b_{i2} die cartesischen Koordinaten des i^{ten} der $(n-2)$ Brennpunkte zweiten Ranges sind. So schliesst man weiter & verwendet dieses System von Rekursionsgleichungen zur sukkzessiven Elimination der Polynome $C^{(n-2)}, C^{(n-4)}, \ldots$ & erhält schliesslich, z. B. im Falle $n = 2k$

$$C^{(n)} = \prod_{i=1}^{n}(a_{i1}\xi + b_{i1}\eta + 1) + \lambda_1 \psi \prod_{i=1}^{n-2}(a_{i2}\xi + b_{i2}\eta + 1) + \ldots + \lambda_k \psi^k = 0.$$

Für den Fall $n = 2k - 1$ lautet die Gleichung analog.

Die k Parameter $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ mögen die *Fokalparameter* der Kurve heissen.

Die geometrische Bedeutung dieser Gleichung ergibt sich, wenn man sie durch $(-1)^n \psi^k$ dividiert. Dann lautet sie

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{a_{i1}\xi + b_{i1}\eta + 1}{-\psi^{1/2}} + \lambda_1 \prod_{i=1}^{n-2} \frac{a_{i2}\beta + b_{i2}\eta + 1}{-\psi^{1/2}} + \ldots + \lambda_k = 0.$$

Nun ist

$$\frac{a_{ir}\xi + b_{ir}\eta + 1}{-\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

die Entfernung des i^{ten} Brennpunkts r^{ten} Ranges von der Kurventangente, deren Plückersche Linienkoordinaten ξ, η sind. Diese Entfernung möge mit d_{ir} bezeichnet werden. Somit lässt sich die obige Kurvengleichung in der Form schreiben

$$\prod_{i=1}^{n} d_{i1} + \lambda_1 \prod_{i=1}^{n-2} d_{i2} + \ldots + \lambda_k = 0.$$

Diese Eigenschaft der Tangenten einer Kurve findet sich schon bei Salmon-Fiedler,[3]) ohne dass die Bedeutung der Abstände der Kurventangente dort erkannt worden wäre.

Eine algebraische Kurve n^{ter} Klasse ist durch ihr vollständiges Fokalsystem, d. h. durch die Angabe aller ihrer Brennpunkte &

[3]) Siehe Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, 2. A., S. 157.

die Angabe ihrer Fokalparameter eindeutig bestimmt. Die Fokalparameter individualisieren die Kurve im System der konfokalen. Denn die Abzählung der Bedingungen, die diesen Daten gleichwertig sind, ergibt z. B. für den Fall $n=2k$:

n	Brennpunkte	1. Ranges	erfordern	$2.n$ Konstante,
$n-2$	„	2. „	„	$2.(n-2)$ „
$n-4$	„	3. „	„	$2.(n-4)$ „
...	...	...	...	...
2	„	k. „	„	2.2 „

Die Zahl dieser Bedingungen ist also

$$2.(2+4+6+\ldots+(n-2)+n)=2k.(k+1).$$

Dazu kommen noch die k Fokalparameter, so dass die Gesammtzahl der Bedingungen ist

$$2k.(k+1)+k=n.(n/2+1)+n/2=1/2.n.(n+3),$$

d. h. gerade so viel, als zur Bestimmung einer Kurve n^{ter} Klasse nötig sind.

Es ist zu erwarten, dass die höheren algebraischen Kurven auch kanonischen Relationen der Brennpunktsentfernungen ihrer *Punkte* genügen. Frei von Willkür wird eine solche Relation sein, wenn in ihr das *vollständige* Fokalsystem der Kurve auftritt & wenn die Brennpunkte des nämlichen Ranges gleichwertig in sie eintreten.

Zürich, im November 1925.