Zur Theorie der konformen Abbildung.

Von M. FEKETE in Budapest.

1. In meiner Note „Zum KOEBEschen Verzerrungssatz"[1]) habe ich u. a. die folgenden zwei Sätze aufgestellt und bewiesen:

I. *Es sei die Funktion*

$$w = f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

mit $a_0 = \dots = a_{\nu-1} = 0$, $a_\nu = 1$, $(\nu \geqq 1)$ *im Kreise* $|z| \leqq 1$ *regulär, sonst beliebig. Sei* $r = r_{f,\nu}$ *die grösste unter allen positiven Zahlen* r, *für welche die Gleichungen*

$$f(z) = re^{i\varphi}$$

bei jedem $\varphi \geqq 0, < 2\pi$ *im Kreise* $|z| \leqq 1$ *mindestens* ν *Wurzeln besitzen. Dann ist*

$$r_{f,\nu} \geqq p_\nu > 0,$$

wo p_ν *nur von* ν *abhängt.*[2])

II. *Es sei die Funktion*

$$w = f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

mit $a_0 = \dots = a_{\nu-1} = 0$, $a_\nu = 1$, $(\nu \geqq 1)$ *für* $|z| \leqq 1$ *regulär, für* $0 < |z| \leqq 1$ *von* 0 *verschieden, sonst beliebig. Sei* $\varrho = \varrho_{f,\nu}$ *die grösste unter allen positiven Zahlen* ϱ, *für welche jeder Wert* w *mit* $|w| \leqq \varrho$ *im Kreise* $|z| \leqq 1$ *mindestens* ν*-mal von* $f(z)$ *angenommen wird. Dann ist*

$$\varrho_{f,\nu} \geqq s_\nu > 0,$$

wo s_ν *nur von* ν *abhängt.*[3])

---

[1]) Vorgelegt der Gesellschaft der Wiss. zu GÖTTINGEN in der Sitzung vom 18. Dez. 1925; erscheint in den Nachrichten der math.-phys. Klasse.

[2]) A. a. O [1]) S. 143. Satz IV.

[3]) A. a. O[1]) S. 143. Satz V.

Satz I stimmt im Spezialfalle $\nu=1$ mit einem Satze von Herrn LANDAU[4]) überein, durch welchen er ein wohlbekanntes KOEBE–CARATHÉODORYsches Theorem[5]) von schlichten Abbildungen überraschender Weise auf nichtschlichte übertragen hat. Auch Satz II kann im Falle $\nu=1$ als eine Verallgemeinerung dieses Theorems betrachtet werden u. zw. als eine solche, die im Vergleich mit der LANDAUschen Verallgemeinerung — dank der stärkeren Voraussetzungen — weitere Eigenschaften schlichter Bildpunktmengen bei nichtschlichten nachweist; übrigens wurde dieser Spezialfall durch Verfasser schon früher formuliert, als Nebenresultat seiner Untersuchungen „Über die Wurzelverteilung analytischer Funktionen, deren Wert an zwei Stellen gegeben ist.“[6])

2. Der LANDAUsche Satz fand eine interessante Verallgemeinerung durch Herrn H BOHR,[7]) der d e zweite von den LANDAUschen Bedingungen $f(0)=0$, $f'(0)=1$ durch die Forderung $\underset{|z|=\zeta}{\text{Max.}}\,|f(z)|=1$ (ζ eine beliebige feste Zahl des Intervalls $0<\zeta<1$) ersetzt hat und dabei zum folgenden Resultat gelangte:

Es sei ζ eine gegebene Zahl >0, <1 und $w=f(z)=\sum_{0}^{\infty} a_n z^n$ eine beliebige für $|z|\leqq 1$ reguläre Funktion mit $a_0=0$ und $\underset{|z|=\zeta}{\text{Max.}}\,|f(z)|=1$. Dann ist der Radius r_f des grössten Kreises $|w|=r_f$, dessen Punkte von $f(z)$ (für $|z|\leqq 1$) sämtlich angenommen werden, nicht kleiner als C, wo $C=C(\zeta)$ eine positive Zahl ist, die nur von ζ abhängt

In dieser Note werde ich zeigen, dass die Sätze I und II sich ähnlich, wie der LANDAUsche Satz durch den BOHRschen, erweitern lassen; sogar werden diese verallgemeinerten Sätze viel leichter bewiesen, als die ursprünglichen.

---

4) E. LANDAU, Zum KOEBEschen Verzerrungssatz [Rendic. del Circolo Mat. di Palermo, *46* (1922), 347—348].

5) P. KOEBE, Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven [Nachr. von der königl. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen, math.—phys. Klasse (1907), 191—210; s. insbes. S. 204.]. Weitere Literaturangaben a. a. O[1]), Fussnote [1]).

6) Erscheint demnächst im Jahresber. der Deutschen Math. Verein. (Satz II.)

7) H. BOHR, Über einen Satz von EDMUND LANDAU. [Scripta univ. atque biblioth. Hierosolymitanarum. Math. et Phys. *1* (1923)]. Diese Arbeit wurde mir nach Abfassung meiner Note a. a. O[1]), durch eine freundliche Mitteilung von Herrn LANDAU bekannt.

3. Zunächst formuliere ich die Verallgemeinerung (nach BOHRS Art) des Satzes I:

III. *Es sei ζ eine gegebene Zahl im Intervalle* $0 < \zeta < 1$ *und*

$$w = f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

eine beliebige für $|z| \leq 1$ *reguläre Funktion mit* $a_0 = \ldots = a_{\nu-1} = 0$ $(\nu \geq 1)$, $\underset{|z|=\zeta}{\text{Max.}} |f(z)| = 1$. *Dann ist der Radius* $r_{f,\nu}$ *des grössten Kreises* $|w| = r_{f,\nu}$, *dessen Punkte von (durch* $w = f(z)$ *gelieferten) Bildpunkten des Einheitskreises mindestens ν-fach überdeckt werden, nicht kleiner als* C_ν, *wo* $C_\nu = C_\nu(\zeta)$ *eine positive Zahl ist, die nur von ζ und ν abhängt.*

Beim Beweise von III stütze ich mich auf eine Folgerung eines bekannten BIEBERBACHschen[8]) Satzes aus dem PICARD—LANDAUschen Ideenkreise, die folgendermassen lautet.

Es sei $g(z) = b_0 + b_\nu z^\nu + b_{\nu+1} z^{\nu+1} + \ldots$ *für* $|z| \leqq 1$ *regulär und nehme dort den Wert* 0, *wie den Wert* 1 *höchstens je* $(\nu-1)$*-mal an,* $(\nu \geq 1)$. *Ferner sei* $|g(0)| = |b_0| \leqq 1$. *Dann gibt es zu jedem Werte ζ des Intervalls* $0 < \zeta < 1$ *eine nur von ν und ζ abhängige positive Zahl* $\Omega_\nu(\zeta)$ *derart, dass für* $|z| \leqq \zeta$ $|g(z)| \leqq \Omega_\nu(\zeta)$ *ist.*[9])

Aus diesem Hilfssatze folgt die Existenz einer Zahl $C_\nu = C_\nu(\zeta)$ im Sinne des Satzes III Schritt für Schritt auf dieselbe Weise, wie im Falle $\nu = 1$ bei BOHR aus dem LANDAU-SCHOTTKYschen Satze; z. B. besitzt die Zahl

$$T_\nu = T_\nu(\zeta) = \frac{1}{1 + 3\Omega_\nu(\zeta)}$$

gewiss die gewünschte Eigenschaft.

Sonst gäbe es nämlich eine für $|z| \leqq 1$ reguläre Funktion $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_0 = \ldots = a_{\nu-1} = 0$, $\underset{|z|=\zeta}{\text{Max.}} |f_0(z)| = 1$, für welche der Radius $r_{f_0,\nu} < T_\nu$ wäre und welche also weder sämtliche Werte w mit $|w| = T_\nu$, noch sämtliche Werte w mit $|w| = 2T_\nu$ mindestens ν-mal im Kreise $|z| < 1$ annehmen würde, etwa nicht die Werte $\alpha = T_\nu e^{i\varphi}$ und $\beta = 2T_\nu e^{i\psi}$. (φ, ψ reelle Zahlen.)

Wird

$$g(z) = \frac{f_0(z) - \alpha}{\beta - \alpha}$$

[8]) L. BIEBERBACH, Über die Verteilung der Null- und Einsstellen analytischer Funktionen [Math. Ann., 85 (1922). 141—148].

[9]) A. a. O [1]). S. 147. Satz X.

gesetzt, so genügt die Funktion

$$g(z) = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} + \frac{a_\nu}{\beta - \alpha} z^\nu + \ldots$$

offenbar sämtlichen Voraussetzungen des vorangehenden Hilfssatzes, da sie ja für $|z| \leqq 1$ regulär und höchstens je $(\nu - 1)$-mal gleich 0 oder 1 ist, ferner die Ungleichung

$$|g(0)| = \left|\frac{\alpha}{\alpha - \beta}\right| \leqq \frac{\Gamma_\nu}{2\Gamma_\nu - \Gamma_\nu} = 1$$

befriedigt; folglich besteht für $|z| \leqq \zeta$

$$|g(z)| < \Omega_\nu(\zeta),$$

und daher ist für $|z| \leqq \zeta$

$$|f_0(z)| = |\alpha + (\beta - \alpha) g(z)| < \Gamma_\nu + 3\Gamma_\nu \Omega_\nu(\zeta) = 1,$$

gegen die Voraussetzung $\underset{|z|=\zeta}{\text{Max.}} |f_0(z)| = 1$.

Mit Hilfe der eben bewiesenen Existenz der Zahl $C_\nu(\zeta)$ kann man sehr leicht auf die Existenz der Zahl p_ν des Satzes I (also aus der Richtigkeit von III auf das Bestehen von I) schliessen. Ist nämlich der ν-te Koeffizient in der Potenzreihe von $f(z)$, d. h. $a_\nu = 1$, so folgt aus der Formel

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{f(z)}{z^{\nu+1}} dz$$

die Ungleichung

$$\underset{|z|=\frac{1}{2}}{\text{Max.}} |f(z)| \geqq \frac{1}{2^\nu};$$

daher genügt z. B. die Zahl

$$p_\nu = \frac{1}{2^\nu} \cdot C_\nu\left(\frac{1}{2}\right)$$

den Forderungen des Satzes I.

4. Nun werde ich die folgende Verallgemeinerung (in Bohrschem Sinne) des Satzes II beweisen:

IV. *Es sei ζ eine gegebene Zahl im Intervalle $0 < \zeta < 1$ und*

$$w = f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

eine beliebige für $|z| \leqq 1$ reguläre und für $0 < |z| \leqq 1$ von der Null verschiedene Funktion mit $a_0 = \ldots = a_{\nu-1} = 0$, $a_\nu \neq 0$, $(\nu \geqq 1)$,

$\underset{|z|=\zeta}{\mathrm{Max.}} |f(z)| = 1$. *Dann ist der Radius* $\varrho_{f,\nu}$ *der grössten Kreisscheibe* $|w| \leqq \varrho_{f,\nu}$, *deren Punkte von den durch* $w = f(z)$ *gelieferten Bildpunkten des Einheitskreises mindestens* ν*-fach überdeckt sind, nicht kleiner als* D_ν, *wo* $D_\nu = D_\nu(\zeta)$ *eine positive Zahl ist, die nur von* ν *und* ζ *abhängt.*

Beim Beweise dieses Satzes benutze ich einen Hilfssatz, der wiederum aus dem BIEBERBACHschen Satze folgt und so lautet:

Ist

$$g(z) = c_\nu z^\nu + c_{\nu+1} z^{\nu+1} + \ldots \qquad (\nu \geqq 1)$$

für $|z| \leqq 1$ *regulär und besitzt ebenda höchstens* $\nu - 1$ *Eins- und genau* ν *Nullstellen, so besteht für* $|z| \leqq \zeta < 1$ *die Ungleichung*

$$|g(z)| < A,$$

wo die positive Zahl $A = A(\nu, \zeta)$ *nur von* ν *und* ζ *abhängt.*[10])

Ich behaupte: die Zahl

$$\varDelta_\nu = \varDelta_\nu(\zeta) = \frac{1}{A(\nu, \zeta)}$$

genügt den Forderungen betreffend die Grösse $D_\nu(\zeta)$ des Satzes IV. Sonst gäbe es nämlich eine für $|z| \leqq 1$ reguläre, für $0 < |z| \leqq 1$ nicht verschwindende Funktion $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_0 = \ldots = a_{\nu-1} = 0$, $a_\nu \neq 0$, $\underset{|z|=\zeta}{\mathrm{Max.}} |f_0(z)| = 1$, für welche der Radius $\varrho_{f_0,\nu} < \varDelta_\nu$ wäre und welche also nicht sämtliche Werte w mit $|w| \leqq \varDelta_\nu$ im Einheitskreise mindestens ν-mal annähme, etwa nicht den Wert α, wo $0 < |\alpha| \leqq \varDelta_\nu$ ist. Setzt man nun

$$g(z) = \frac{f_0(z)}{\alpha} = \frac{a_\nu}{\alpha} z^\nu + \ldots,$$

so genügt $g(z)$ offenbar sämtlichen Voraussetzungen des vorangeschickten Hilfssatzes, folglich ist für $|z| \leqq \zeta$

$$|g(z)| < A(\nu, \zeta)$$

und daher ebenda

$$|f_0(z)| = |\alpha g(z)| < \alpha A(\nu, \zeta) \leqq \varDelta_\nu A(\nu, \zeta) = 1,$$

gegen die Voraussetzung $\underset{|z|=\zeta}{\mathrm{Max}} |f_0(\zeta)| = 1$.

---

10) A. a. O [1]) S. 148. §. 6.

Damit ist obige Behauptung bewiesen.[11])

Da, wie oben gesagt, aus $a_\nu = 1$ für die Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die Ungleichung $\underset{|z|=\frac{1}{2}}{\mathrm{Max.}} |f(z)| \geqq \frac{1}{2^\nu}$ folgt, so genügt offenbar die Zahl

$$s_\nu = \frac{1}{2^\nu} D_\nu\left(\frac{1}{2}\right)$$

den Forderungen des Satzes II. Das zeigt aber, dass der letztgenannte Satz im Satze IV. wirklich enthalten ist.

5. Schliesslich sei zur Orientierung bemerkt, dass der Satz IV. nicht aus dem Satze III gefolgert werden kann, wie man es etwa meinen könnte. Es gibt nämlich Funktionen $f(z)$, die den Voraussetzungen des Satzes III genügen und für welche $\varrho_{f,\nu}$ kleiner ausfällt als eine beliebig vorgegebene positive Zahl ε_0. Sei z. B. $f(z)$ definiert durch die Gleichung

$$f(z) = \frac{e^{\frac{z^\nu}{\delta}} - 1}{\underset{|z|=\zeta}{\mathrm{Max}} \left| e^{\frac{z^\nu}{\delta}} - 1 \right|} = \frac{e^{\frac{z^\nu}{\delta}} - 1}{M} = \frac{z^\nu}{\delta M} + \ldots$$

wo $\delta > 0$ und $0 < \zeta < 1$ ist. Dann ist $f(z)$ für $|z| \leqq 1$ offenbar regulär und es besteht die Relation

$$\underset{|z|=\zeta}{\mathrm{Max.}} |f(z)| = 1,$$

während die Gleichung

$$f(z) = -\frac{1}{M}$$

---

[11]) Aus dem Bestehen des Satzes IV. im Falle $\nu = 1$ folgt leichtersichtlich die Richtigkeit dasselben bei beliebigem $\nu > 1$, mit Hilfe eines einfachen Kunstgriffes, auf dessen Anwendbarkeit in diesem Forschungsgebiete ich durch eine Bemerkung des Hern Bieberbach freundlichst aufmerksam gemacht wurde: Genügt $f(z) = a_\nu z^\nu + \ldots$ den Voraussetzungen des Satzes IV, so genügt denselben auch $\varphi(z) = \sqrt[\nu]{a_\nu z^\nu + \ldots} = \alpha_1 z + \ldots$ Nun ist offenbar $\rho_{f,\nu} = \rho_{\varphi,1}^\nu$; besteht also $\rho_{\varphi,1} \geqq D_1(\zeta)$, so ist $\rho_{f,\nu} \geqq D_1(\zeta)^\nu$. Folglich besitzt die Zahl $D_1(\zeta)^\nu$ die gewünschten Eigenschaften der Grösse $D_\nu(\zeta)$ bei jedem ν. (Zum Beweise der Existenz von $D_1(\zeta)$ genügt die Anwendung des Landau Schottkyschen Satzes statt der des Satzes von Bieberbach.)

keine Wurzel besitzt. Bei genügend kleinem δ ist aber

$$\frac{1}{M} \leqq \frac{1}{-1+e^{\frac{z^{\nu}}{\delta}}} < \varepsilon_0,$$

also $\varrho_{f,\nu} < \varepsilon_0$, wie behauptet wurde.[12])

Budapest, 31. I. 1926.

(*Eingegangen am 5. Februar 1926.*)

[12]) Ebensowenig ist Satz II im Satze I enthalten. Das folgt im Falle $\nu = 1$ aus einer Bemerkung des Herrn Bohr (vgl. Fussnote [1]) a. a. O [7])) und für beliebiges $\nu > 1$ aus der Betrachtung von solchen Funktionen, welche nach Analogie des Bohrschen Beispiels gebildet sind.