Involutions et surfaces continues.

Par B. de KERÉKJÁRTÓ (Szeged).

I. Involutions topologiques.

La notion de l'*involution topologique* a été introduite par M. BROUWER sous la forme suivante[1]:

Une involution topologique d'ordre n d'une surface F orientable et fermée est une distribution des points de F en systèmes de n points au plus de telle façon que ces systèmes soient en une correspondance topologique (c'est-à-dire biunivoque et bicontinue) avec les points d'une surface M orientable et fermée, appelée surface modulaire de l'involution. La continuité de la transformation des points de M en des systèmes de points de F veut dire qu'étant donné un point arbitraire P de M et une suite arbitraire de points $P_1, P_2, \ldots$ tendant vers P, les systèmes de points de M $(Q_1^i, Q_2^i, \ldots, Q_{m_i}^i)$ correspondant à P_i tendent pour $i \to \infty$ vers le système $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_m)$ correspondant à P. A l'aide du théorème de HEINE et BOREL, on conclût de cela la continuité uniforme de la transformation.

M. BROUWER a démontré que *chaque involution topologique d'une surface orientable et fermée F représente F comme une surface superposée de la surface modulaire M, à n feuillets et à un nombre fini de points de ramification.*

Une autre définition de l'involution topologique (que j'ai indiquée dans une conférence au congrès de Bad-Nauheim en 1920) est la suivante:

Soit F une surface orientable et fermée, et soit donné une distribution des points de F en des systèmes de n points au plus satisfaisant aux conditions suivantes:

1) A chaque nombre $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\delta > 0$ tel qu'étant donné deux points arbitraires Q_1 et Q_1' à une distance $< \delta$, dont les homologues sont $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_m)$ respectivement

[1] Proceed. of the Academy of Amsterdam, vol. XXI. (1919) p. 1143—1145.

$(Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_{m'})$, chaque Q_i est à distance $< \varepsilon$ de $(Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_{m'})$ et inversement. Nous disons tout court que la variation continue d'un point involve la *variation uniformément continue* de ses homologues.

2) Soit Q_1 un point qui a n points homologues différents; de la condition 1) il s'ensuit que lorsque Q_1 décrit une courbe simple et fermée suffisamment petite, chaque point homologue décrit une petite courbe simple et fermée qui n'ont l'une et les autres aucun point commun. Nous supposons que lorsque le point Q décrit la courbe dans le sens positif, chacun des points homologues décrit la courbe correspondante dans le sens positif. Nous disons alors que l'involution *conserve le sens d'orientation.*

La différence essentielle entre les deux définitions consiste en ce que la définition donnée par M. Brouwer fait intervenir la surface modulaire tandisque la nôtre ne dépend que de la surface donnée. — Soit par exemple $y = R(x)$ une fonction rationnelle de la variable complexe x (x et y varient sur une sphère); la définition donnée par M. Brouwer présente les relations qui existent entre les valeurs de la fonction y et celles de la variable x; la nôtre montre la liaison des valeurs homologues de la variable x, en appelant deux valeurs x_1 et x_2 homologues si la fonction $R(x)$ prend en x_1 et en x_2 la même valeur.

Pour l'équivalence des deux définitions, il suffit de démontrer qu'une involution topologique dans le sens de la deuxième définition n'a qu'un nombre fini de points *singuliers* (c'est-à-dire de points qui ont moins de n homologues). Considérons l'ensemble des points *réguliers* (c'est-à-dire des points qui ont n points homologues distincts); chaque point de cet ensemble est un point intérieur de l'ensemble, par conséquent l'ensemble des points réguliers consiste en un ou plusieurs domaines.

Soit Q un point singulier sur la frontière d'un domaine g formé de points réguliers. Désignons par $Q = Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_m$ les points homologues à Q et déterminons autour de chaque point Q_i une petite surface circulaire c_i telle que c_i et c_j $(i \neq j)$ n'ont aucun point en commun. D'après la condition 1) de notre définition, il y a un voisinage v de Q tel que chaque point de v a tous ses homologues dans les cercles c_i. Soit $\varkappa$ une circonférence autour de Q contenue dans v, soit P_1 un point de $\varkappa$ contenu dans g et soient $P_1, P_2, \ldots, P_k$ ses homologues situés dans c_1. Supposons que la distance de P_1 et Q soit inférieure à celle de P_i et Q ($i = 2, 3, \ldots, k$), (On peut le supposer sans aucune restriction.)

Désignons par $\{\varkappa\}$ l'ensemble de tous les points homologues aux points de $\varkappa$ qui sont contenus dans c_1. Nous allons montrer que $\{\varkappa\}$ *est d'un seul tenant,* excepté le cas où tous les points de $\{\varkappa\}$ autres que ceux de $\varkappa$ se trouvent à l'extérieur de $\varkappa$. Soit en effet R' un point arbitraire de $\{\varkappa\}$ et R un de ses homologues sur $\varkappa$; lorsqu'un point variable S décrit continuement un arc $R'P_1$ de la circonférence $\varkappa$, il y a pour chaque position du point S un point S' homologue à S qui décrit une courbe continue partant de R' jusqu'à un des points P_i. Si R' est intérieur à $\varkappa$ ou s'il se trouve sur $\varkappa$, cette courbe continue a un point au moins sur $\varkappa$. De là, il résulte que ou bien $\{\varkappa\}$ est d'un seul tenant ou tous les points de $\{\varkappa\}$ autres que les points de $\varkappa$ sont à l'extérieur de $\varkappa$.

Le domaine γ déterminé par $\{\varkappa\}$ et contenant le point Q est par conséquent simplement connexe ayant pour frontière un continu C (qui est un sous-ensemble de $\{\varkappa\}$).

Pour chaque point de γ il est vrai que tous ses homologues qui sont près de Q (c'est-à-dire dans c_1) appartiennent à la fois à γ. Soit en effet R_0 un point arbitraire de γ et soit R_0' un de ses points homologues dans c_1; lorsqu'un point variable S décrit dans γ un arc simple de R_0 jusqu'à Q, un point S' homologue à S décrit une courbe continue partant de R_0' jusqu'à Q; comme l'arc R_0Q ne rencontre aucun point de $\{\varkappa\}$, la courbe continue $R_0'Q$ n'a pas de points sur $\{\varkappa\}$, c'est-à-dire R_0' se trouve dans γ. Nous disons que le domaine γ est invariant pour l'involution, près de Q.

Prenons dans le domaine γ un polygon π et considérons l'ensemble $\{\pi\}$ de tous les homologues des points de π qui sont dans γ. Comme ci-dessus, on voit que le domaine γ' déterminé par C et $\{\pi\}$ a pour frontière deux continus C et C' (C' sous-ensemble de $\{\pi\}$) de telle sorte que γ est homéomorphe avec un domaine annulaire. Le domaine γ' est invariant pour l'involution prés de Q.

Soit donc R_1 un point de g sur C, soient $R_1, R_2, \ldots, R_k$ ses homologues sur C; soient $d_1, d_2, \ldots, d_k$ des cercles sans points communs autour de ces points et soit u un voisinage de R_1 tel que ses homologues près de Q se trouvent à l'intérieur de $d_1, d_2, \ldots, d_k$ — Construisons le polygone π de telle façon qu'il ait un point au moins dans le voisinage u; aussi C' a donc au moins un point dans u de telle sorte qu'on peut joindre un point de C à un point de C' par un segment droit l_1 dans u. Les homologues des points de l_1 près de Q forment par conséquent k arcs simples $l_1, l_2, \ldots, l_k$ dans γ' joignant C et C' et qui n'ont deux à deux aucun point commun. Les arcs l divisent le domaine annulaire γ' en k parties telles qu'aucune d'elles ne contient deux points homologues. De là, il résulte que l'involution de γ' en soi-même est homéomorphe à une rotation du domaine annulaire[2]). Si nous joignons dans γ' un point de l_1 avec son homologue sur l_2 sans rencontrer d'ailleurs $l_1, l_2, \ldots, l_k$, nous obtenons un arc simple qui forme ensemble avec tous ses homologues dans γ' une courbe simple et fermée c invariante pour l'involution près de Q.

De la même façon, on peut construire une suite de courbes simples et fermées $c_1, c_2, \ldots$ chacune invariante pour l'involution près de Q, telles que pour chaque i: c_{i+1} soit intérieur à c_i et que $c_1, c_2, \ldots$ tendent vers le seul point Q. En joignant un point de c_i à un point de c_{i+1} entre ces deux courbes par un arc convenablement choisi, on obtient par cet arc et par tous ses homologues entre c_i et c_{i+1} une division de ce domaine anulaire en k parties qui se correspondent par l'involution près de Q. Le même est donc vrai pour deux courbes c_i et $c_{i+i'}$. Par conséquent, *le point singulier Q est isolé et l'involution près de Q est homéomorphe avec une rotation.*

II. Involutions continues et courbes continues.

Notre définition de l'involution topologique donné au numéro précédent nous amène à quelques généralisations de cette notion. En appelant involutions topologiques à *indicatrice invariable* celles qui satisfont à nos conditions 1) et 2) et involutions topologiques *générales* (d'ordre fini) celles qui satisfont à la condition 1) (sans avoir nécessairement la propriété 2)), on a une notion applicable aux surfaces orientables ou non-oriantables pour laquelle un résultat analogue à celui du numéro précédent, c'est-à-dire au *théorème d'involution* dû à M. Brouwer, peut se déduire par les théorémes de rotation et de réflexion[2]). Ensuite en considérant des surfaces ouvertes, on définit des involutions topologiques d'ordre fini ou

[2]) Mathem. Annalen, Bd. 80. (1919), S. 36—41, ou Kerékjártó, Vorl. ü. Topologie, I. (Berlin, 1923), S. 223—226.

infini; à l'aide de cette notion, on peut caractériser la distribution des valeurs des fonctions automorphes, comme M. BROUWER a montré[3]).

Une autre généralisation de la notion de l'involution topologique nous amène à la notion suivante de *l'involution continue:*

Une involution continue d'une surface F (ou d'une ligne L) est une distribution des points de F (ou de L) en des systèmes de points qui varient continuement avec chacun de leurs points.

La variation continue signifie que pour un point arbitraire P dont les homologues sont $\{P\}$ et pour un nombre $\varepsilon > 0$ arbitraire, il y a un nombre $\delta > 0$ tel qu'étant Q n'importe quel point à distance $< \delta$ de P, chaque point Q' homologue à Q a une distance $< \varepsilon$ de $\{P\}$. Bien entendu, la continuité n'est pas nécessairement uniforme; il y a en général des points P' homologues à P dont le ε-voisinage ne contient aucun point Q' homologue à Q; seulement tous les points Q' homologues à Q sont contenus dans les ε-voisinages des points de $\{P\}$ si la distance PQ est $< \delta$.

Si Q est un point arbitraire qui n'appartient pas à $\{P\}$ et qui n'est pas un point d'accumulation de $\{P\}$, aucun point P de $\{P\}$ ne peut être point d'accumulation de $\{Q\}$. Soit en effet P un point de $\{P\}$ dont nous supposons qu'il soit point d'accumulation de $\{Q\}$; comme Q n'appartient ni à $\{P\}$ ni à son ensemble dérivé, il y a un voisinage de $\{P\}$ qui ne contient pas le point Q; mais chaque voisinage de P contient des points homologues à Q, ce qui est une contradiction à la condition de continuité. De là il s'ensuit qu'ou bien le système $\{Q\}$ est un ensemble fermé de points — cas qui nous intéresse particulièrement — ou bien il y a un autre système $\{P\}$ tel que $\{P\}$ et $\{Q\}$ sont tous les deux partout denses relativement au même ensemble fermé dont ils sont des sous-ensembles. Un exemple pour la deuxième possibilité est fourni par la distribution des points du plan en deux systèmes, l'un contenant tous les points à coordonnées rationnelles, l'autre tous les autres points du plan.

L'intérêt des involutions continues consiste en ce que *chaque transformation univoque et continue d'une surface ou d'une ligne conduit à une involution continue* pour laquelle deux points sont considérés comme homologues s'ils ont la même image et alors

[3]) M. BROUWER avait la bonté de me communiquer ses résultats non publiés sur ce sujet en des lettres en 1919.

seulement. De la continuité de la transformation il s'ensuit que *chaque système de points homologues forme un ensemble fermé de points.*

On appelle *courbe continue* l'image univoque et continue de l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$. On entend par une *surface continue* l'image univoque et continue d'une surface simple; nous considérons seulement le cas ou cette dernière surface est une sphère, ce qui n'est aucune restriction du point de vue des considérations suivantes.

Le premier problème qui se présente est de caractériser les ensembles de points qui peuvent être images univoques et continues d'un segment (ou d'une sphère); sa solution a été donnée par les beaux théorèmes de MM. Hahn et Mazurkiewicz et de M. Sierpiński [4]). Comme on peut transformer la sphère en un segment et le segment en une sphére par des tranformations univoques et continues, il n'y a aucune différence, concernant leur structure comme ensembles de points, entre les courbes et les surfaces continues.

Pour l'identité de deux courbes, il ne suffit pas que les ensembles de points formés par l'une et par l'autre courbe soient identiques. Comme M. Fréchet [5]) a nettement formulé par une notion géométrique, une courbe continue est une „trajectoire" où l'on tient compte de l'ordre dans lequel les points se présentent sur la courbe. Considérons une courbe continue dans l'espace avec les coordonnées $(x, y, \ldots, z)$; les coordonnées d'un point variable de la courbe s'expriment par les fonctions

$$x = f(t),\ y = g(t),\ \ldots,\ z = h(t)$$

qui sont uniformes et continues dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$. Supposons qu'il n'y a aucun intervalle (t_1, t_2) où toutes les fonctions $f(t), g(t), \ldots, h(t)$ sont à la fois constantes. A chaque valeur de t correspond un et un seul point de la courbe; mais des points de la courbe correspondant à des valeurs différents du paramètre t peuvent coincider dans l'espace; nous les considérons comme des points différents de la courbe, et le point dans lequel ils coïncident dans l'espace comme un point multiple de la courbe. Deux courbes continues sont considérées comme identiques si

---

[4]) voir, par exemple, Kerékjártó, Abhandlungen aus dem Mathem. Seminar Hamburg, Bd. IV. (1925) S. 164—167. où aussi la litérature est citée.

[5]) M. Fréchet, Rend. d. Circ. Mat. di Palermo, t. XXII. (1906) p. 51. et suiv.

non seulement les deux ensembles de points fournis par les deux courbes coïncident, mais aussi ces points sont rencontrés dans le même ordre par les deux courbes lorsqu'on fait varier le paramétre de 0 à 1. Une expression analytique pour cette identité est la suivante: soit la deuxième courbe représentée par les fonctions:

$$x = F(u),\ y = G(u),\ \ldots,\ z = H(u)\ ;\ (0 \leqq u \leqq 1)$$

dont nous supposons qu'elles ne sont toutes constantes dans aucun intervalle (u_1, u_2); les deux courbes sont identiques s'il y a une transformation biunivoque et bicontinue de l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$ en l'intervalle $0 \leqq u \leqq 1$ définie par $u = u(t)$ telle qu'on a

$$F(u(t)) = f(t),\ G(u(t)) = g(t), \ldots,\ H(u(t)) = h(t)$$

identiquement pour t.

Jusqu'ici, nous avons supposé qu'il n'y a aucun intervalle de t (ou de u) où toutes les fonctions $f, g, \ldots, h$ (respectivement $F, G, \ldots, H$) sont constantes. S'il y a un tel intervalle (nécessairement fermé), nous devons considérer le point correspondant comme un seul point de la courbe et non comme un point multiple. Si l'on réussit donc de transformer l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$ en l'intervalle $0 \leqq u \leqq 1$ par une transformation univoque et continue, de telle sorte qu'à chaque intervalle de t où $f, g, \ldots, h$ sont constantes, correspond un seul point u mais deux points arbitraires t_1 et t_2 qui n'appartiennent pas à un intervalle de cette sorte, ont pour images deux points différents u_1 et u_2. on peut introduire u comme nouveau paramètre; la courbe sera donc repésentée dans cette représentation paramétrique de telle façon qu'à aucun intervalle du paramètre ne correspond un seul point de la courbe. M. Fréchet a montré que cela est toujours possible[5]); il a démontré qu'étant donné un ensemble arbitraire d'intervalles fermés sans points communs, on peut construire une fonction uniforme et continue jamais décroissante qui n'est constante que dans les intervalles de l'ensemble donné. La raison en est simplement que l'ensemble complémentaire d'un intervalle sur la ligne droite est homéomorphe à l'ensemble complémentaire d'un seul point sur la ligne droite.

La *distance paramétrique de deux courbes continues* a été définie par M. Fréchet comme la borne inférieure des maxima

$$\max_{(0 \leqq t \leqq 1)} \left\{[F(u(t)) - f(t)]^2 + [G(u(t)) - g(t)]^2 + \ldots + [H(u(t)) - h(t)]^2\right\}^{1/2}$$

pour toutes les homéomorphies $u = u(t)$ entre les intervalles $0 \leqq t \leqq 1$ et $0 \leqq u \leqq 1$.

III. Représentations paramétriques des surfaces continues.

Nous entendons par une *surface continue* F l'image univoque et continue d'une sphère S. En appelant deux points de S homologues s'ils ont la même image, nous obtenons une involution continue de S où chaque système de points homologues forme un ensemble fermé de points.

Considérons d'abord le cas où chaque système de points homologues forme un *ensemble discontinu*, en d'autres mots, supposons qu'il n'y a sur S aucun continu (contenant deux points au moins) qui est transformé en un seul point. Soient (u, v) des coordonnées sur la sphère et soient $x, y, \ldots, z$ les coordonnées des points d'un espace à un nombre fini de dimensions. La surface F située dans cet espace s'exprime par les fonctions uniformes et continues:

$$x = f(u, v),\ y = g(u, v),\ \ldots,\ z = h(u, v).$$

Nous avons donc supposé qu'il n'y a aucun vrai continu sur la sphère sur lequel toutes ces fonctions sont constantes. Si l'on désigne par

$$u = u(s, t),\ v = v(s, t)$$

une homéomorphie de la sphère en elle-même, et l'on mette

$$F(s, t) = f(u(s, t), v(s, t)),$$

$$G(s, t) = g(u(s, t), v(s, t)),\ \ldots,\ H(s, t) = h(u(s, t), v(s, t)),$$

nous convenons de dire que les fonctions

$$x = F(s, t),\ y = G(s, t),\ \ldots,\ z = H(s, t)$$

représentent *la même surface continue en une autre représentation paramétrique*. Dans le cas spécial traité pour le moment, nous considérons donc deux surfaces continues comme identiques s'il y a une homéomorphie entre les points des deux sphères représentantes qui fait correspondre à un point quelconque de l'une des sphéres un point de l'autre qui ont tous les deux le même point pour image sur la surface continue.

Soient F et F' deux surfaces continues représentées respectivement par les fonctions

$$x = f(u, v),\ y = g(u, v),\ \ldots,\ z = h(u, v)$$

et

$$x = F(s, t),\ y = G(s, t),\ \ldots,\ z = H(s, t)$$

Soit $s = s(u, v),\ t = t(u, v)$ une homéomorphie entre les sphères S et S' dont F et F' sont des images univoques et continues, et considérons la plus grande distance de deux points de F et F'

qui sont les images de deux points de S et S' correspondants par l'homéomorphie; considérons donc le maximum de

$$\{[F(s(u,v),t(u,v))-f(u,v)]^2+$$
$$[G(s(u,v),t(u,v))-g(u,v)]^2+\ldots+[H(s(u,v),t(u,v))-h(u,v)]^2\}^{1/2}.$$

La borne inférieure de ces maxima pour toutes les homéomorphies entre S et S' est appelée d'aprés M Fréchet la *distance paramétrique des deux surfaces continues*[6]).

La définition de la distance paramétrique est indépendente de la circonstance s'il y a sur S ou S' des continus auxquels correspond sur F ou sur F' un seul point. C'est ainsi que M. Fréchet a défini l'identité de deux surfaces continues par la condition que leur distance paramétrique soit égale à zéro[6]). En d'autres mots, *deux surfaces F et F', images univoques et continues des sphères S et S' sont considérées comme identiques s'il y a des homéomorphies entre S et S' telles que la plus grande distance de deux points de F et F' qui sont les images de deux points de S et S' correspondants par l'homéomorphie, est aussi petite que l'on veut.* Cette définition analytique est élégante mais elle est bien artificielle, et M. Fréchet ne l'a adopté que pour des raisons de brièveté. Mais il ne cachait pas ses préférences pour une définition qui mettrait en évidence la nature géométrique de l'identité de deux surfaces continues générales. — Je donne, dans ce qui suit, une définition géométrique pour l'identité de deux surfaces, laquelle me paraît bien naturelle et qui est bien conforme à son avis même (voir les numéros 2 et 3 de son mémoire cité [6])).

Soit F une surface continue générale donnée par une transformation univoque et continue t d'une sphére S. La surface continue F est déterminé d'une part par l'ensemble E des points de l'espace qui correspondent aux points de S par la transformation t, d'autre part par *les voisinages des points de F sur F.* — Les images de deux points différents P_1 et P_2 de la sphère S sont considérées comme *identiques* sur F s'il y a sur la sphère S un *ensemble d'un seul tenant*[7]) qui contient P_1 et P_2 et dont l'image par t est un seul

---

[6]) M. Fréchet, Sur la distance de deux surfaces, Annales de la Soc. Polonaise de Mathém. (1924).

[7]) On entend par un ensemble *d'un seul tenant* un ensemble qui n'est pas la somme de deux vrais sous-ensembles sans points communs et tels qu'aucun point d'un de ces sous-ensembles ne soit point d'accumulation de l'autre.

point; autrement elles représentent deux points *différents* de F. Deux points différents de F sont des points *distincts* de F lorsqu'ils sont situés en deux points différents de l'ensemble E; autrement ils sont différents sur F mais *coïncidants* sur E, c'est-à-dire ils donnent des points multiples de F. — Une suite de points différents $P_1, P_2, \ldots$ de F tend vers le point P de F si chaque suite de points $P_1', P_2', \ldots$, où P_i' a par t une image identique à P_i, a pour points d'accumulation seulement tels points de S dont les images sont identiques à P. Par cette définition de limite, les voisinages des points de F sur F sont déterminés.

Pour éclairer mieux cette relation de limite ou de voisinage, nous reprenons la sphère S, dont F est l'image par la transformation t, et distribuons les points de S en des „*éléments* $\mathfrak{P}$" de la façon suivante: deux points de S appartiennent au même élément $\mathfrak{P}$ s'il y a un ensemble d'un seul tenant qui les contient et dont l'image par t est un seul point; autrement ils appartiennent à deux éléments différents. De cette façon, la sphère est divisée en un ensemble d'éléments $\mathfrak{P}$; chaque élément est un ensemble fermé d'un seul tenant, c'est-à-dire un continu (qui peut consister aussi d'un seul point)[8]. A chaque élément $\mathfrak{P}$ correspond un point de F et un seul; deux points de F sont considérés comme des points différents de F s'ils correspondent à deux éléments différents. — Nous disons que les éléments $\mathfrak{P}_1$ $\mathfrak{P}_2$ ... tendent vers l'élément $\mathfrak{P}$ si la distance (ordinaire) des ensembles $\mathfrak{P}_n$ et $\mathfrak{P}$ tend vers 0 pour $n \to \infty$[9]). Ainsi, il y a une homéomorphie entre les points de F et les éléments de S.

---

[8]) La distribution des points de S en des éléments $\mathfrak{P}$ de la façon décrite dans le texte est une involution continue; cette proposition s'obtient immédiatement à l'aide du théorème de SCHOENFLIES-ZORETTI (voir par exemple KERÉKJÁRTÓ, Vorl. ü. Topologie, I, 1923, S. 38).

[9]) D'après cette définition, l'ensemble des éléments $\mathfrak{P}$ forme un espace (L); on peut y définir la limite par l'intermédiaire d'un écart non régulier si on entend par l'écart $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2)$ de deux éléments $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ la distance ordinaire des ensembles de points $\mathfrak{P}_1$. $\mathfrak{P}_2$. Dans cet espace, *chaque ensemble dérivé est fermé.* Soit, en effet, $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \ldots$ une suite d'éléments ayant un élément $\mathfrak{P}_\omega$ pour limite et soit pour chaque ν: $\mathfrak{P}_1^{(\nu)}, \mathfrak{P}_2^{(\nu)} \ldots$ une suite ayant $\mathfrak{P}_\nu$ pour limite; il faut montrer l'existence d'une suite „diagonale" $\mathfrak{P}_{n_1}^{(1)}, \mathfrak{P}_{n_2}^{(2)}, \ldots$ tendant vers $\mathfrak{P}_\omega$. Désignons par $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_\omega]$ la distance maximum d'un point variable de $\mathfrak{P}$ de l'ensemble $\mathfrak{P}_\omega$; il est facile à montrer que pour chaque $\epsilon > 0$ il y a un $\delta > 0$ tel que pour un élément $\mathfrak{P}$ quelconque pour lequel

Nous disons que deux surfaces continues F et F', images univoques et continues des sphères S et S', appartiennent au *même type* ou qu'elles sont *homéomorphes* s'il est possible d'établir une correspondance biunivoque et bicontinue entre les ensembles d'éléments $(\mathfrak{P})$ et $(\mathfrak{P}')$ de S et de S' qui leur correspondent. Dans ce cas il y a une homéomorphie entre les points de F et F' par laquelle deux points différents de F correspondent toujours à deux points différents (non nécessairement distincts) de F' et inversement. — Par exemple, toutes les surfaces continues représentées par des fonc ions qui ne sont toutes constantes sur aucun vrai continu de la sphère, appartiennent, d'après cette définition, au même type[10]).

Nous disons que deux éléments $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ de S sont *homologues* si les points de F qui leur correspondent, sont coïncidents. En formant les systèmes d'éléments homologues, on obtient une *involution pour les éléments* $\mathfrak{P}$ de S qui est une involution continue dans le sens qu'à chaque élément $\mathfrak{P}$ dont les homologues sont $\{\mathfrak{P}\}$, et à chaque nombre $\varepsilon > 0$ correspond un $\delta > 0$ tel qu'étant $\mathfrak{R}$ un élément à distance $< \delta$ de $\mathfrak{P}$, chaque élément homologue à $\mathfrak{R}$ a une distance $< \varepsilon$ de $\{\mathfrak{P}\}$. Chaque système d'éléments homologues forme un ensemble fermé d'éléments qui est à la fois un ensemble fermé de points.

Soient S et S' deux sphères; sur chacune d'elles soit donné une décomposition en un ensemble d'éléments fermés et pour chacun de ces ensembles d'éléments soit donné une involution continue; nous appelons les deux *involutions homéomorphes* s'il y a une homéomorphie entre les ensembles d'éléments qui fait correspondre à deux éléments homologues quelconques deux éléments homologues de l'autre ensemble.

$(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_\omega) < \delta$, on a $[\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_\omega] < \epsilon$; en désignant $[\mathfrak{P}_\nu, \mathfrak{P}_\omega]$ par ϵ_ν, on voit donc que $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots \to 0$, Prenons pour chaque ν un élément $\mathfrak{P}^{(\nu)}_{n_\nu}$ pour lequel $(\mathfrak{P}^{(\nu)}_{n_\nu}, \mathfrak{P}_\nu) < \epsilon_\nu$; il s'ensuit que $(\mathfrak{P}^{(\nu)}_{n_\nu}, \mathfrak{P}_\omega) \leqq (\mathfrak{P}^{(\nu)}_{n_\nu}, \mathfrak{P}_\nu) + [\mathfrak{P}_\nu, \mathfrak{P}_\omega] < 2\,\epsilon_\nu$; c'est-à-dire la suite $\mathfrak{P}^{(1)}_{n_1}, \mathfrak{P}^{(2)}_{n_2}, \ldots$ tend vers $\mathfrak{P}_\omega$.

[10]) C'est dans ce sens que les deux surfaces continues mentionnées à la fin de ma note „On parametric representations of continuous surfaces", (Proc. Nat. Acad. Sc., Washington, v. 10 (1924) p. 267—271) appartiennent au même type.

Si les surfaces continues F et F' engendrent des involutions homéomorphes sur les sphères S et S', nous disons que *les surfaces continues F et F' sont topiquement homéomorphes.* On voit que dans le cas d'une homéomorphie topique entre F et F', il y a une transformation biunivoque et bicontinue entre F et F' qui fait correspondre à deux points distincts de F toujours deux points distincts de F' et inversement; l'homéomorphie topique fournit donc une homéomorphie entre les ensembles de points E et E' (définis à la page 57).

Deux surfaces continues F et F' sont identiques s'il y a une homéomorphie topique entre F et F' qui fournit la transformation identique de E en E'. Cela veut dire en tout au longue que les ensembles d'éléments correspondant sur S et sur S' à F respectivement à F', peuvent être mis en une correspondance biunivoque et bicontinue de telle façon qu'un élément quelconque de S et l'élément lui correspondant sur S' ont le même point de l'espace pour image. Les transformations de S et de S' en $F \equiv F'$ donnent *la même surface continue en deux différentes représentations paramétriques.*

Notre prochain but est de démontrer *l'équivalence de notre définition géométrique* pour l'identité de deux surfaces continues *avec la définition analytique due à* M. Fréchet, donnée au début de ce numéro.

Soient S et S' deux sphères, F et F' deux surfaces continues, images de S respectivement de S' par les transformations t respectivement t'; supposons qu'il y a une suite d'homéomorphies $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ entre S et S' telles que deux points de S et de S' correspondants par σ_n ont pour images par t respectivement par t' des points dont la distance est inférieure à ε_n ($\varepsilon_n \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$). — Soit $M = (P_1, P_2, \ldots)$ un ensemble dénombrable de points de S partout dense sur S. On peut extraire de $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ une suite $\sigma_{n^{(1)}}, \sigma_{n_2^{(1)}}, \ldots$ $(1 < n^{(1)} < n_2^{(1)} < \ldots)$ qui est convergente dans le point P_1 (cela veut dire que les images de P_1 par ces homéomorphies ont un seul point limite sur S'). De la dernière suite, on peut extraire une suite $\sigma_{n^{(2)}}, \sigma_{n_2^{(2)}}, \ldots$ $(n^{(1)} < n^{(2)} < n_2^{(2)} < \ldots)$ qui est convergente dans le point P_2; et ainsi de suite. On obtient une suite $\sigma_{n^{(1)}}, \sigma_{n^{(2)}}, \sigma_{n^{(3)}}, \ldots$, que nous désignons simplement par $\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \sigma_{(3)}, \ldots$, qui est convergente dans tous les points de l'ensemble M. — Soit $P^{(\omega)}$ un point arbitraire de S et soit $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots$

une suite de points de M tendant vers $P^{(\omega)}$; soit $l^{(1)}$ un arc simple avec les extrémités $P^{(1)}$ et $P^{(\omega)}$, passant par les points $P^{(2)}, P^{(3)}, P^{(4)}, \ldots$ dans cet ordre; désignons par $l^{(k)}$ l'arc $P^{(k)}P^{(\omega)}$ de $l^{(1)}$. L'image de $l^{(k)}$ par l'homéomorphie $\sigma_{(n)}$ est un arc simple $l_n^{(k)}$; l'ensemble limite de $l_1^{(k)}, l_2^{(k)}, \ldots$ est un continu $l_\omega^{(k)}$, d'après le théorème de Schoenflies-Zoretti. Le continu $l_\omega^{(k+1)}$ est un sous-ensemble du continu $l_\omega^{(k)}$; soit $l_\omega^{(\omega)}$ l'ensemble de tous les points appartenants à chaque $l_\omega^{(k)}$ $(k=1, 2, \ldots)$; $l_\omega^{(\omega)}$ est évidemment un continu. L'image de $l^{(k)}$ par t et l'image de $l_n^{(k)}$ par t' ont une distance paramétrique $< \varepsilon_n$, et comme $\varepsilon_n \to 0$ pour $n \to \infty$, il résulte que $l^{(k)}$ et $l_\omega^{(k)}$ ont la même image. Par conséquent, l'ensemble $l_\omega^{(\omega)}$ a la même image que $P^{(\omega)}$, en d'autres mots, $l_\omega^{(\omega)}$ appartient à un élément de S'. En désignant par $P_n^{(\omega)}$ l'image de $P^{(\omega)}$ par $\sigma_{(n)}$, on voit que tous les points d'accumulation de l'ensemble $(P_1^{(\omega)}, P_2^{(\omega)}, \ldots)$ appartiennent á $l_\omega^{(\omega)}$. — Le résultat que nous venons d'obtenir, est que la limite $\sigma_{(\omega)}$ de la suite $\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \ldots$ fait correspondre à chaque point $P^{(\omega)}$ de S tels points de S' qui appartiennent à un élément $\mathfrak{P}'$ de S'. En faisant varier la suite des points de M dont $P^{(\omega)}$ est la limite, on voit l'indépendence de $\mathfrak{P}'$ du choix spécial de la suite des points de M tendants vers $P^{(\omega)}$. Ainsi à chaque point de S, la limite $\sigma_{(\omega)}$ fait correspondre un élément de S'. A deux points appartenants au même élément de S correspond le même élément de S'; on conclut cette proposition immédiatement du théorème de Schoenflies-Zoretti. Ensuite, il est évident (en considérant les inverses de $\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \ldots$) que deux éléments différents de S ont pour images deux éléments différents de S' et que la correspondance biunivoque entre les éléments de S et de S' ainsi obtenue, est bicontinue. Nous avons donc *une homéomorphie entre les éléments de S et ceux de S' telle que des éléments correspondants de S et de S' ont par t respectivement par t' la même image.*

Nous allons démontrer que la distance paramétrique de deux surfaces qui sont identiques d'après la définition géométrique, est zéro. Soit H une homéomorphie entre les éléments de S et de S' telle que deux éléments correspondants quelconques ont par t respectivement par t' la même image sur $F \equiv F'$; le probléme est de déterminer une homéomorphie h entre les points de S et de S' telle que les images par t respectivement par t' de deux points correspondants quelconques ont une distance $< \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est un nombre positif arbitraire, donné d'avance.

Nous entendons par un $\mathfrak{P}$-*domaine* un ensemble d'éléments qui est d'un seul tenant et dont chaque élément est un élément intérieur; chaque $\mathfrak{P}$-domaine est à la fois un domaine de points. La $\mathfrak{P}$-*frontière* d'un $\mathfrak{P}$-domaine est l'ensemble de tous les éléments d'accumulation du $\mathfrak{P}$-domaine qui ne lui appartiennent pas; la $\mathfrak{P}$-frontière d'un $\mathfrak{P}$-domaine est un ensemble *fermé* d'éléments[11]). Un $\mathfrak{P}$-*continu* est, par définition, un ensemble d'éléments fermé et d'un seul tenant. — On voit immédiatement que par l'homéomorphie H, chaque $\mathfrak{P}$-continu sur S est transformé en un $\mathfrak{P}$-continu sur S'; chaque $\mathfrak{P}$-domaine sur S est transformé en un $\mathfrak{P}$-domaine sur S', la $\mathfrak{P}$-frontière du $\mathfrak{P}$-domaine a pour image la $\mathfrak{P}$-frontière du $\mathfrak{P}$-domaine correspondant.

Déterminons autour de chaque élément de S un $\mathfrak{P}$-*voisinage* dont l'image par la transformation t soit de diamètre $<\varepsilon/8$; d'aprés le théorème de Heine-Borel, il y a un nombre fini parmi ces voisinages, que nous désignons par $U_1, U_2, \ldots, U_j$, couvrant toute la sphère S. Soit V_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, j$) l'ensemble de tous les éléments de U_ν qui ne sont pas éléments d'accumulation de $U_1, U_2, \ldots, U_{\nu-1}$; soient $V_1, V_2, \ldots V_k$ ceux parmi ces ensembles qui ne sont pas vides. Pour simplifier le raisonnement, nous ne considérons que le cas où chaque V_ν est d'un seul tenant.[12]) Les $\mathfrak{P}$-domaines $V_1, V_2, \ldots, V_k$ n'ont deux à deux aucun élément commun; chaque élément de S appartient à un de ces domaines ou à la frontière d'un tel domaine. Nous considérons maintenant les V_ν comme domaines de points et nous les désignons par $D_1, D_2, \ldots, D_k$. Dans chaque domaine D_ν, nous construisons une approximation polygonale de D_ν en distance $<\delta$, où $\delta > 0$ désigne un nombre tel que deux points quelconques de S en distance $<\delta$ ont des images par t en distance $<\varepsilon/8$; nous

[11]) voir la note[9]).

[12]) En général, l'ensemble $V_1 + V_2 + \ldots + V_k$ considéré comme ensemble de points, consiste en un nombre fini ou en une infinité dénombrable de domaines; si $\delta > 0$ est un nombre arbitraire, il n'y a qu'un nombre *fini* parmi ces domaines contenant des points en distance $> \delta$ de la frontière. Nous considérons ces domaines $W_1, W_2, \ldots, W_l$ au lieu de $V_1, V_2, \ldots, V_k$, tandisque les autres seront ajoutés aux frontières de $W_1, W_2, \ldots, W_l$.

pouvons supposer que les domaines polygonaux Δ_1 $\Delta_2, \ldots, \Delta_k$ ainsi obtenu ont pour frontières des polygones simples n'ayant deux à deux aucun point commun. L'ensemble des points de S n'appartenant à aucun des domaines Δ_ν forme un nombre fini de domaines polygonaux que nous appelons „*canaux*". Nous divisons chaque canal en un nombre fini de domaines polygonaux Γ_μ tels qu'aucun Γ_μ ne soit voisin de deux domaines Δ_ν et $\Delta_{\nu'}$ non adjacents (nous appelons Δ_ν et $\Delta_{\nu'}$ adjacents si les $\mathfrak{P}$-frontières de V_ν et $V_{\nu'}$ ont un élément commun). Cette division sera construite de la façon suivante: soit $\mathfrak{P}_0$ un élément qui appartient à la $\mathfrak{P}$-frontière de $V_1, V_2, \ldots, V_s$ $(s \geqq 3)$; dans chacun des domaines D_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$, nous prenons une ligne continue λ_ν qui a un point de $\mathfrak{P}_0$ pour point d'accumulation; les éléments de V_ν et da sa $\mathfrak{P}$-frontière qui contiennent les points et les points d'accumulation de λ_ν forment un $\mathfrak{P}$-continu $\mathfrak{K}_\nu$; soit K_ν le domaine formé de tous les points de S dont la distance de $\mathfrak{K}_\nu$ est inférieure à δ. Nous joignons un point P_0 de $\mathfrak{P}_0$ dans K_ν avec un point de la frontière de Δ_ν par une ligne polygonale l_ν; nous construisons ces lignes $l_1, l_2, \ldots, l_s$ de telle façon qu'elles n'ont pas des points communs sauf leur extrémité commune P_0 et qu'elles soient contenues dans le canal à part leurs autres extrémités. — En appliquant la même opération par rapport à un autre élément $\mathfrak{P}_1$, et ainsi de suite, en faisant attention que les lignes obtenues $l_1, l_2, \ldots, l_n$ n'aient pas des points communs, on obtient une division du canal de la sorte anoncée. (Si q est le nombre de connexion du canal, on obtient la division cherchée en appliquant $2q-4$ fois au plus, l'opération ci-dessus, comme il résulte du théorème d'EULER). Il est évident de notre construction que chaque domaine Δ_ν et Γ_μ a pour image par t des ensembles de diamètre $< \varepsilon/2$.

Les images de $V_1, V_2, \ldots, V_k$ par l'homémorphie H sont les $\mathfrak{P}$-domaines $V'_1, V'_2, \ldots, V'_k$ sur S' qui n'ont deux à deux aucun point commun; chaque élément de S' appartient à un de ces $\mathfrak{P}$-domaines ou à sa frontière. Soit D'_ν le domaine des points appartenants aux éléments de V'_ν; D_ν et D'_ν ont le meme nombre de connexion. Soit $\delta' > 0$ un nombre tel que deux points quelconques de S' en distance $< \delta'$ ont des images en distance $< \varepsilon/8$. Nous construisons une approximation de D'_ν par un domaine polygonale Δ'_ν homéomorphe à Δ_ν, de telle façon qu'à chaque polygone π de Δ_ν correspond un polygone π' de Δ'_ν et à la partie de la $\mathfrak{P}$-frontière de V_ν extérieure à π' correspond par l'homéomorphie H la partie de la $\mathfrak{P}$-frontière de V'_ν extérieure à π'. A chaque canal sur S correspond un canal sur S' ayant le même nombre de connexion. — La division des canaux sur S' se définit au moyen des images de $\mathfrak{P}_0$ et $\mathfrak{K}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, s$), etc., par l'homéomorphie H. Par une δ'-approximation de $\mathfrak{K}'_1, \mathfrak{K}'_2, \ldots, \mathfrak{K}'_s$ etc., on obtient les lignes $l'_1, l'_2, \ldots, l'_s$ etc. qui donnent une division des canaux de S' en des domaines de la même nature que ci-dessus par rapport à S. Le réseau ζ sur S formé par les frontières de $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ et par les lignes $l_1, l_2, \ldots, l_n$ est *isotope*[13]) au réseau ζ' sur S' formé par les frontières des domaines $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_k$ et par les lignes $l'_1, l'_2, \ldots, l'_n$. A chaque domaine d sur S déterminé par ζ correspond un domaine d' sur S' déterminé par ζ'; l'image de d par t et l'image de d' par t' ont des diamètres $< \varepsilon/2$; ces deux images ont au moins on point commun, d'aprés la construction correspondante des domaines. Si on étend l'isotopie entre ζ et ζ' à une transformation topologique de toute la sphère S en toute la sphère S', on obtient, par conséquent, *une homéomorphie h entre les points de S et de S' telle que deux points quelconques correspondants par h ont des images en distance $< \varepsilon$.*

Ainsi, il est démontré que les deux définitions pour l'identité de deux surfaces sont équivalentes. — Nous ferons encore quelques remarques qui se rattachent aux notions géométriques données ci-dessus.

D'après notre classification, l'ensemble de toutes les surfaces continues (ce sont les images univoques et continues de la sphère) est divisé en plusieurs types; deux surfaces appartiennent au même type (ou elles sont homéomorphes) s'il y a une homéomorphie entre leurs points, qui fait correspondre à deux points différents quelconques deux points différents. Un type se divise en plusieurs classes; deux surfaces homéomorphes appartiennent à la même classe (ou elles sont topiquement homéomorphes) s'il y a une homéomorphie entre leurs points conservant les relations de coïncidence. — On pourrait définir les relations de limite, la distance

[13]) Isotope veut dire ici: isotope dans le sens combinatoire; dans le cas présent, c'est équivalent à la notion (moins restrictive) donnée à la page 7 de mon livre cité sous [2]), en supposant pour un moment que les sphères S et S' coïncident.

paramétrique, etc, d'abord pour les surfaces appartenant à une classe, ensuite pour celles appartenant à un type et enfin pour toutes les surfaces continues. La considération d'une classe de surfaces montre de ce point de vue peu d'intérêt; il s'agit, en somme, d'une combinaison des remarques suivantes concernant un type de surfaces et des résultats sur la distance de deux ensembles de points. — Pour deux surfaces appartenant au même type, on définit leur distance paramétrique (spéciale) comme la borne inférieure de la distance maximum de deux points correspondants, pour toutes les homéomorphies entre leurs points. Des raisonnements développés sur les pages 62—64, il s'ensuit que chaque homéomorphie entre les points des deux surfaces peut être approchée par une homéomorphie entre les points de leurs sphères représentantes[14]); la distance paramétrique spéciale est par conséquent égale à la distance paramétrique ordinaire.

Il est intéressant de remarquer que *les surfaces continues du type de la sphère*[15]) *forment un sousensemble partout dense de l'ensemble de toutes les surfaces continues.* — Soit F une surface continue dans l'espace $(x, y, \ldots z)$, image de la sphère S par la transformation t univoque et continue. Par la méthode de l'*approximation simpliciale* due à M. Brouwer[16]), on peut construire une surface F' du type de la sphère dont la distance paramétrique de F est aussi petite que l'on veut. Soit, en effet, $\varepsilon > 0$ arbitraire et soit $\delta > 0$ suffisamment petit de telle sorte que deux points quelco ques de S en distance $< \delta$ ont des images en distance $< \varepsilon/5$. Nous construisons une triangulation de S dont chaque triangle a un diamètre $< \delta$. Soient P_1, P_2, P_3 les sommets d'un triangle, P'_1, P'_2, P'_3 leurs images par t et soient P''_1, P''_2, P''_3 trois points non alignés dont les distances de P'_1, P'_2, P'_3 respectivement sont inférieures à $\varepsilon/5$. Nous transformons par la transformation barycentrique les points du triangle $P_1P_2P_3$ de S en les points du triangle plan déterminé par les segments droits $P''_1P''_2$, $P''_2P''_3$, $P''_3P''_1$. En appliquant la même opération à chaque triangle de S, on obtient une surface

[14]) Il est à remarquer qu'une homéomorphie entre les points des sphères ne donne pas nécessairement une homéomorphie entre les points des surfaces.

[15]) ce sont les images de la sphère par des transformations univoques et continues, non constant sur aucun vrai continu de la sphère.

[16]) Brouwer, Mathem. Annalen, Bd. 71 (1911) S. 97—115.

F du type de la sphère (parce que la transformation barycentrique n'est constante sur aucun vrai continu de la sphère S); deux points de F et de F correspondants au même point de la sphère ont une distance $< \varepsilon$; c'est-à-dire, la distance paramétrique de F et F est inférieure à ε.

Le probléme de la *réduction de la représentation paramétrique* d'une surface continue est de trouver une autre représentation paramétrique dont l'ensemble d'éléments est aussi simple que possible. Il s'agit donc de remplacer une décomposition de la sphère en un ensemble d'éléments fermés par une autre décomposition en un ensemble d'éléments homéomorphe au premier de telle sorte que les éléments du second ensemble soient comme ensembles de points d'une plus simple structure. On essayera de prendre au lieu d'un élément qui a des points intérieurs un autre sans points intérieurs, au lieu d'un continu générale un continu composé d'un nombre fini ou dénombrable d'arcs simples, au lieu d'un arc simple un seul point, etc.

Dans une note sur ce sujet[17]), j'ai donné un résultat définitif pour le *cas spécial* caractérisé par la condition suivante:

Nous entendons par un élément $\mathfrak{C}$ un élément $\mathfrak{P}$ qui contient deux points au moins (c'est donc un continu maximum de la sphère contenant deux points au moins et transformé en un seul point de la surface continue); notre condition est que *l'ensemble* $\mathfrak{E}$ *des points qui appartiennent aux différents continus* $\mathfrak{C}$ *soit fermé et que chaque composant de cet ensemble soit un élément* $\mathfrak{C}$[18]).

Sous la dite condition, on peut transformer topologiquement l'ensemble des éléments $\mathfrak{P}$ en un autre ensemble d'éléments de telle façon que l'ensemble $\mathfrak{E}$ a pour image un ensemble de points nulle part dense, composé d'un ensemble dénombrable d'arcs simples. En particulier, si chacun des continus $\mathfrak{C}$ a pour ensemble com-

---

[17]) Proceed. of the Nat. Acad. of Sciences, Washington, v. 10 (1924) p. 267—271.

[18]) Dans la note citée, j'ai manqué. malheureusement, de formuler explicitement cette condition; implicitement elle est contenue dans les déductions des lignes 8—10 de la page 268 et des lignes 2—4 de la page 269; à l'énoncé du théorème il faut donc ajouter la condition que *l'ensemble des points de la surface dont les images inverses sont des vrais continus, est fermé et non enchaîné sur la surface,* ce qui est évidemment équivalent à la condition donnée dans le texte.

plémentaire un seul domaine, on peut réduire l'ensemble $\mathfrak{E}$ en un ensemble de points partout discontinu[19]).

Sans la condition ci-dessus, il n'y a pas des réductions de la même vigueur. L'exemple suivant dû à M. Lebesgue nous donne un cas où aucune réduction n'est possible; soit la surface représentée par les formules:

$$x=\sin 2v.\cos u,\ y=\sin 2v.\sin u,\ z=0, \quad \text{pour } -\pi/2<v\leqq 0$$
$$x=0 \qquad y=0 \qquad z=\sin v, \text{ pour } 0\leqq v\leqq \pi/2$$
$$(0\leqq u<2\pi,\ -\pi/2<v<\pi/2).$$

Chaque circonférence $v=$const. $\geqq 0$ a pour image un seul point, l'ensembe $\mathfrak{E}$ remplit la demisphère $v\geqq 0$, son image est le segment droit $0\leqq z\leqq 1$, $x=y=0$.

Dans une prochaine communication, je considérerai les réductions possibles pour le cas général et leur connexion avec le problème de dimension et de mesure.

Szeged, le 1 décembre, 1926.

---

19) voir les pages 268 et 270 de ma note citée.

(Reçu le 1 décembre 1926)