Bibliographie.

F. Klein, Vorlesungen über höhere Geometrie. Dritte Auflage, bearbeitet und herausgegeben von W. Blaschke (Grundlehren der math. Wissenschaften XXII), VIII + 406 S., Berlin, J. Springer, 1926.

Kleins klassisch gewordene Untersuchungen über höhere Geometrie, die im Anschluss an sein Erlanger Programm einen gruppentheoretischen Aufbau der Geometrie erzielen, werden in diesem Band in der meisterhaften Bearbeitung von Blaschke wiedergegeben. Die beiden ersten Hauptteile (Der allgemeine Koordinatenbegriff, Lehre von den Transformationen) entsprechen dem ersten Band der Kleinschen Vorlesungen, sind im wesentlichen ungeändert beibehalten; die Änderungen, die vorgenommen wurden, bringen das Werk näher dem Interesse und der Auffassung der modernen Zeit. Über den Inhalt dieser beiden Hauptteile ein Bild zu geben, kann man — mit den Worten der Einleitung — sagen, dass die vorliegende Darstellung ein Gegenstück zur synthetischen und zur analytischen Geometrie bildet, indem sie die Geometrie auf die Analysis anwendet und versucht, mit Hilfe der Geometrie Einsicht in die Lehre von Funktionen mehrerer Veränderlichen zu gewinnen.

Der zweite Band der Kleinschen Vorlesungen, der der Theorie der geometrischen Gruppen gewidmet ist, wird in der neuen Auflage fortgelassen, mit der Motivierung, dass er nur lose mit dem ersten Band zusammenhängt, und da er völlig neu bearbeitet werden müsste. Statt dessen werden als „Dritter Hauptteil" Beispiele geometrischer Forschung aus den letzten Jahrzehnten gegeben, und zwar: I. E. Studys Liniengeometrie. II. J. Radons mechanische Herleitung des Parallelismus von Levi-Civita. III. Aus der Topologie: E. Artins Zöpfe. IV. Über die Differentialgleichungen von Monge. Ihre Beziehungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und zur Variationsrechnung. V. Einleitung in die Elementarteilertheorie. Der wertvolle und moderne Inhalt dieses dritten Hauptteiles wird sicher jedem Mathematiker eine interessante Lektüre reichen. Nicht ganz berechtigt scheint es nur, diesen Abschnitt, der mit dem Inhalt des Kleinschen ersten Bandes manchmal auch nur lose oder gar nicht zusammenhängt und teilweise im Anfangsstadium befindlichen Untersuchungen wiedergibt, im selben Bande mit Kleins klassischen Vorlesungen zu geben. Es wäre auch ein Wunsch von vielen Mathematikern, den Kleinschen zweiten Band in einer den modernen Forderungen entsprechenden, ebenso meisterhaften Bearbeitung wie den ersten zu haben.

B. v. Kerékjártó.

M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie. Zweite Auflage, mit einem Anhang: **Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung** von **M. Dehn.** (Grundlehren der math. Wissenschaften XXIII) X + 275 S., Berlin, J. Springer, 1926.

Die zum ersten Male in 1882 veröffentlichten Vorlesungen über neuere Geometrie von Pasch haben eine grundlegende Bedeutung für die seitdem entwickelte axiomatische Begründung der Geometrie; der hohe Wert dieses bekannten Werkes besteht aber nicht nur in seiner historischen Bedeutung, sondern dies gilt auch heute als ein Buch, das unterrichtend den Leser zu wissenschaftlichen Untersuchungen vorbereiten kann. Bei der Neuauflage wurde die ursprünglich vertretene Auffassung des Verfassers nebst der Form der Darstellung beibehalten.

Der Anhang hat die Aufgabe das Verhältnis der Resultate von Pasch zu den älteren Forschungen und insbesondere zu den neueren Ergebnissen auf diesem Gebiet klarzustellen. Diese Aufgabe ist in dem von Dehn verfassten Anhang vorzüglich gelöst; man erhält einen klaren Einblick in das Wesen und in die Entwicklung der Geometrie seit der griechischen Schule bis zu unseren Tagen. In einer Einleitung und in fünf Abschnitten, betitelt: Das Parallelenpostulat, Grundlegung der projektiven Geometrie, Die Stetigkeit, Systeme von Postulaten, Inhaltslehre — wird dabei alles was wesentlich und interessant in der Grundlegung der Geometrie ist, dargestellt oder wenigstens angedeutet. Es ist das Werk eines Gelehrten, der nicht nur durch eigene Forschungen, sondern auch durch vielseitiges Interesse in Mathematik und in Geschichte der Mathematik ausgezeichnet ist, und gibt zusammen mit dem grundlegenden Werk von Pasch eines der wertvollesten Bücher, die über Geometrie in den letzten Jahrzehnten erschienen sind.

B. v. Kerékjártó.

F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Für den Druck bearbeitet von R. Courant und O. Neugebauer (Grundlehren der math. Wissenschaften XXIV), XIII + 385 S., Berlin, J Springer, 1926.

Das vorliegende posthume Werk F. Kleins verdankt seine Entstehung den Vorlesungen, die dieser Meister der mathematischen Wissenschaften während der Kriegsjahre vor einem engen Kreise von Zuhörern hielt. In erster Reihe sind die Lieblingsthemata Kleins, denen er seine schöpferische Tätigkeit und sein treffliches Dozententalent widmete, in ihrer historischen Entwicklung dargestellt und in Zusammenhang mit der Gesamtentwicklung der Mathematik im XIX. Jahrhundert gebracht. Freilich erhält das Werk, dadurch dass der Verfasser seine eigenen Gesichtspunkte in den Vordergrund rücken lässt, den „Stempel des Fragmentarischen" — wie die Herausgeber nicht mit Unrecht bemerken; doch wird dies stets der Fall sein, wenn ein wirklich grosser Forscher über die Entwicklung seiner Wissenschaft schreibt. In solchen Werken ist ja nicht nur der historische Tatbestand selbst vom Interesse, sondern — was die Fachgenossen besonders erwarten — die Auffassung des Verfassers, da dadurch seine eigene wissenschaftliche Entwicklung selbst hervortritt. Deshalb werden wohl alle Mathematiker, insbesondere aber die ehemaligen Schüler und Hörer F. Kleins, mit grosser Freude das Erscheinen dieses Werkes begrüssen, das einen tiefen Einblick in seine eigenen Schöpfungen gewährt.

Das erste Kapitel beschäftigt sich mit Gauss. Bekanntlich leitete Klein in den letzten Dezennien die Herausgabe der gesammelten Werke von Gauss;

so wurde er einer der besten Kenner der GAUSS'schen Mathematik und seine Darstellung dieses Gegenstandes wird jeder Mathematiker mit hohem Interesse lesen. Das zweite Kapitel ist den französischen Mathematikern in den ersten Jahrzehnten des XIX. Jahrhunderts gewidmet. In gedrängter Form referiert der Verfasser über POISSON, FOURIER, CAUCHY (der vielleicht nicht hinreichend gewürdigt wird) und sodann über die geometrische Schule, MONGE, PONCELET, für die KLEIN ganz besonders Sympathie zeigt. In gleicher Weise werden in einem kurzen Kapitel (III) DIRICHLET, ABEL, JACOBI sowie die deutsche Geometrie (MÖBIUS, PLÜCKER, STEINER) gewürdigt. Damit beginnt der weitaus interessantere Teil des Werkes, in dem die Probleme nach den führenden Ideen gruppiert sind. Der Reihe nach werden die Lieblingsthemata KLEINS herangezogen: Geometrie, mathematische Physik, Funktionentheorie. In meisterhafter Weise wird im IV. Kapitel die Entwicklnng der projektiven Geometrie und der parallellaufenden Invariantentheorie geschildert; jeder wird mit Interesse die Entstehung der CAYLEY-KLEINschen Massbestimmung daraus entnehmen. Nach einer schönen Darlegung der Entwicklung der mathematischen Physik (wobei der Lieblingsautor KLEINS, MAC CULLAGH, stark hervorgehoben wird) wendet sich KLEIN der Funktionentheorie zu, der die letzten drei Kapitel gewidmet sind. In meisterhafter Weise wird die Wirkung RIEMANNS und WEIERSTRASS' geschildert. Sodann wird mit grösserer Ausführlichkeit die Rolle des Gruppenbegriffes in der Funktionentheorie zu Sprache gebracht. Ein Überblick über die automorphen Funktionen schliesst das Werk ab.

Recht bedauerlich ist, dass es KLEIN nicht vergönnt war die Abschnitte über LIE und POINCARÉ auszuarbeiten; in seinen älteren Vorlesungen pflegte er ja insbesondere die Leistungen LIES stark zu berücksichtigen. Auch die ganze Mengenlehre mit ihrem genialen Schöpfer G. CANTOR bleiben unberücksichtigt; freilich ist dies ein Gegenstand, der KLEIN nicht nahe lag. Diese Mängel können aber die grossen Vorzüge dieses Werkes, das kaum seinesgleichen in der mathematischen Literatur hat, nicht beeinflussen; sicherlich wird des Werk jedem Fachgenossen eine fesselnde Lektüre von ungeheurem Interesse sein.

A. H.

E. Cesàro, Vorlesungen über natürliche Geometrie. Autorisierte deutsche Ausgabe von G. KOWALEWSKI. Zweite Auflage mit einem Anhang über die verallgemeinerte natürliche Geometrie. VI + 352 S., Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1926.

Die natürliche Geometrie (geometria intrinseca) ist eine Disziplin, die versucht die geometrischen Gebilde aus ihren inneren Eigenschaften zu charakterisieren, mithin fremdartige Elemente zu vermeiden — wie sie in der gewöhnlichen analytischen Geometrie die Wahl eines bestimmten Koordinatensystems in die Untersuchung hineinbringt. Diese Art der Betrachtung bringt viele Vereinfachungen mit sich und lässt besser das Wesen der erreichten Resultate erkennen. In CESÀRO's Darstellung sind alle diese Vorteile der natürlichen Geometrie besonders zu geniessen; in eleganter und leichtverständlicher Weise wird da eine grosse Menge von Resultaten dargelegt; die vielen und glücklich gewählten Beispiele machen das Buch für das Studium ausgezeichnet geeignet. Die Betrachtung der ebenen Kurven wird als eine Einleitung in die Methoden und Ideen der natürlichen Geometrie gegeben; der ausführlichen Discussion der ebenen und räumlichen Kurven folgt die allgemeine Theorie der Flächen, infinitesimale Transformationen von Flächen, Kurven in Überräumen, Überräume, nebst einigen sehr eleganten Anwendungen auf Gleichgewicht und Elastizitätsfragen.

Im Anhang wird die von G. Pick begründete verallgemeinerte natürliche Geometrie dargestellt, die statt der im Cesároschen Buch zugrunde liegenden euklidischen Gruppen die allgemeinsten ebenen Transformationsgruppen zu grunde legt.

B. v. Kerékjártó.

E. Lohr, Atomismus und Kontinuitätstheorie in der neuzeitlichen Physik (Sammlung wissenschaftlicher Grundfragen, herausgegeben von R. Hönigswald in Breslau, Bd. VI), 82 S., B. G. Teubner, 1926.

Es wird in der vorliegenden Schrift eine Darstellung der korpuskularen und der kontinuierlichen Auffassung in der Physik gegeben, angefangen von den noch sehr wenig differencierten Anfängen in der griechischen Philosophie bis zu den neuesten Theorien. Die Darstellung bewegt sich in grosser Allgemeinheit, eingehend werden nur die allgemeinsten Auffassungen, nicht aber die speziellen Durchführungen der Theorien behandelt.

Nach einer Schilderung der Entwickelung der korpuskularen Theorie von den Eleaten und Demokritos bis zur modernen Elektronen- und Quantentheorie, wendet sich der Verfasser der Kontinuitätstheorie zu, als deren Anhänger er sich auch ausdrücklich bekennt. Und zwar wird als Prototyp einer „konsequenten" Kontinuitätstheorie die von Jaumann eingehender behandelt im Gegensatz zu den „inkonsequenten" Theorien, die zwar ein kontinuierliches Feld irgendwelcher Zustandsvariablen annehmen, darin aber irgendwelche Singularitäten, „Energieknoten", entsprechend den Atomen oder Elektronen der Korpuskulartheorie, zulassen, wie die Theorie von Mie.

Die Jaumannsche Theorie ist eine Feldtheorie, die von nichtlinearen Differenzialgleichungen beherrscht wird und bei welcher der physikalische Zustand ausser der elektrischen und magnetischen Feldstärke durch eine grössere Zahl Zustandsvariabeln bestimmt wird. Diese Theorie soll auch von denjenigen Eigenschaften der sogenannten Korpuskularstrahlen, die als hauptsächliche Belege der atomistischen Struktur derselben angesehen werden, Rechenschaft geben können. Diese Strahlen werden als longitudinale Schwingungen angenommen. Die Scintillation wird durch enge Strahlenbündel erklärt. Ebenso soll sich auch die Reichweite der α-Strahlen in die Theorie einordnen lassen. Die Laueschen Interferenzen werden nach Lohr durch eine kontinuierliche periodische Struktur der Materie erklärt. Diese Möglichkeiten werden indessen in der vorliegenden Schrift nur ganz allgemein erwähnt, und nicht einmal an den wichtigsten Beispielen durchgeführt. Es wird auch auf die Verwandtschaft der Jaumannschen Theorie mit den bedeutenden Ansätzen von de Broglie hingewiesen, wobei die Verwandtschaft wohl nur darin besteht, dass beidemal Wellen benützt werden. Man wird wohl heutzutage unter dem Eindruck der de BROGLIEschen Gedanken und der SCHRÖDINGERschen Theorie ein erhöhtes Interesse den Kontinuitätstheorien zuwenden, besonders wenn sich diese ebenso fruchtbar erweisen sollten wie die zuletztgenannte, was von der JAUMANNschen Theorie zu zeigen dem Verfasser nicht gelungen zu sein scheint.

R. Ortvay.

W. v. Ignatowsky, Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik I, II (Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher, herausgegeben von E. Trefftz), VIII + 110 bzw. IV + 123 S., dritte Auflage, B. G. Teubner, 1926

Das bestens bekannte Lehrbuch der Vektoranalysis von v. IGNATOWSKY erscheint jetzt zum drittenmal.

Der erste Band behandelt die Grundlagen der Vektoranalysis ohne Rücksicht auf physikalische Anwendungen als eine selbstständige Disziplin. Für die angewandte Methode ist es bezeichnend, dass jeglicher Gebrauch von Koordinatensystemen zum Beweise irgendwelcher vektoranalytischen Transformationen gänzlich vermieden ist. Die analytische Darstellung der vektoranalytischen Operationen, auch mit Hülfe krummliniger orthogonaler Koordinaten, erfolgt erst im vorletzten Kapitel. Im letzten Kapitel des ersten Bandes werden allgemeinere gerichtete Grössen, so die Dyaden, Affinoren und Tensoren behandelt.

Die Verallgemeinerung auf mehrere Dimensionen und auf allgemeine Räume, die durch ihr Linienelement definiert sind, wird vermieden, und auch auf den allgemeinen Begriff von Tensoren beliebiger Ordnung wird nicht eingegangen. Es mag dafür wohl ausschlaggebend gewesen sein, dass diese Verallgemeinerungen mehr in der Richtung einer analytischen Behandlungsweise liegen. Da sie aber nicht nur in der allgemeinen und speziellen Relativitätstheorie unentbehrlich sind, sondern auch in anderen Gebieten, wie allgemeine Mechanik, SCHRÖDINGERsche Theorie etc. zur Anwendung gelangen, kann man sie mit einem gewissen Recht als zu dem vektoranalytischen Rüstzeug des theoretischen Physikers gehörig betrachten. Eine diesbezügliche Ergänzung bei einer Neuauflage des vortrefflichen Werkes wäre gewiss sehr erfreulich.

Der zweite Band behandelt die Anwendungen auf die Mechanik des Punktes und der starren Körper, auf Hydrodynamik und Elastizitätstheorie sowie auf Elektrodynamik, wobei die Übersichtlichkeit und Anschaulichkeit der vektoranalytischen Methoden ins rechte Licht gesetzt werden.

R. Ortvay.