Sur la variation des intégrales triples et le théorème de Stokes.

Par ADOLPHE SZÜCS à Budapest.

Le lemme de DU BOIS-REYMOND lève une objection fondamentale, relative à l'établissement des équations différentielles du Calcul des Variations, lorsque les fonctions inconnues dépendent d'une seule variable. Mais on sait depuis une Note de M. HADAMARD (parue dans le tome 144 des Comptes Rendus, en 1907) que l'objection est fondée en fait aussitôt que le nombre des variables indépendantes dépasse l'unité. Pour le cas de deux variables, M. HAAR[1]) est parvenu, sans faire d'hypothèses supplémentaires sur l'existence des dérivées secondes, à substituer à l'équation classique aux dérivées partielles un système de trois équations à trois inconnues. Pour y arriver, il a commencé par démontrer le théorème:

Si les fonctions $u(x, y)$, $v(x, y)$, continues dans un domaine T, sont telles que

$$\iint_T \left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dx\,dy=0$$

pour toutes les fonctions $\zeta(x, y)$ à dérivées premières continues et s'annulant sur la frontière de T, alors l'intégrale

$$\int u dy - v dx,$$

étendue à une courbe fermée quelconque, intérieure à T, a pour valeur zéro.

---

1) A. HAAR, Über die Variation der Doppelintegrale, Journal für Mathematik 149 (1919), p. 1—18.

A. HAAR, A kettős integrálok variatiójáról, Mathematikai és Természettudományi Értesitő, XXX (1917).

En vue de généraliser ce théorème, M. HAAR pose dans son travail le problème suivant:

Soit T un domaine à trois dimensions et $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ des fonctions continues définies dans ce domaine. Supposons que l'intégrale

$$\iiint\left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}+w\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

étendue au domaine T soit nulle pour toutes les fonctions $\zeta(x, y, z)$ continues dans T, s'annulant (ou se réduisant à une constante) sur la frontière et admettant, à l'intérieur, des dérivées premières continues. Que peut-on en conclure relativement aux fonctions u, v, w?

Les pages suivantes sont consacrées à l'étude de ce problème. Faisant usage d'une méthode dont le principe a déjà été employé par M. LICHTENSTEIN[2]) pour le cas du plan, nous établissons d'abord qu'une certaine intégrale, contenant les fonctions u, v, w et prise sur une surface fermée quelconque, intérieure à T, doit être nulle. Nous en déduisons un champ de vecteurs dont le rotationnel fournira une représentation paramétrique des fonctions u, v, w (le rôle de paramètres étant joué par des *fonctions arbitraires*). Pour y arriver, nous définissons le rotationnel d'une façon appropriée à nos besoins, et nous donnons une nouvelle démonstration du théorème de STOKES, basée sur la définition adoptée du rotationnel. L'idée de cette démonstration nous a été suggérée par M. HAAR. Nous montrons enfin que si les coordonnées d'un champ de vecteurs admettent certaines dérivées partielles continues, le rotationnel entendu au sens classique est identique à celui qui sert de base à nos raisonnements.

Quoique les méthodes employées s'appliquent à un nombre quelconque de variables indépendantes, nous considérerons, pour simplifier, uniquement l'espace ordinaire à trois dimensions.

I

Soit S une surface fermée quelconque à l'intérieur du domaine T, sans point double et à plan tangent continu. Désignons par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface.

[2]) L. LICHTENSTEIN, Bemerkungen über das Prinzip der virtuellen Verrückungen in der Hydrodynamik inkompressibler Flüssigkeiten. Annales de la Société Polonaise de Mathématiques, Cracovie, 6 février 1924.

Nous allons démontrer que l'hypothèse relative aux fonctions u, v, w entraîne pour celles-ci la propriété suivante: *L'intégrale de surface*

$$\iint_S (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, dS$$

est nulle. Ce théorème généralise celui de M. Haar, suivant lequel, dans des conditions analogues, on a pour le plan

$$\int_s (u\alpha + v\beta)\, ds = 0$$

s étant une courbe fermée quelconque, ds l'élément de son arc et α, β les cosinus directeurs de la normale extérieure à la courbe.

Introduisons les surfaces parallèles à S. En désignant par S_ϱ celle de ces surfaces dont les points sont à la distance ϱ de la surface S, et en faisant varier ϱ de 0 à a (où a est un nombre positif suffisamment petit), on obtient une certaine portion d'espace D, comprise entre les deux surfaces S et S_a, et intérieure au domaine T. Dans la portion d'espace D chaque point peut être caractérisé par la valeur ϱ déterminant la surface S_ϱ qui passe par le point, et par deux autres paramètres λ, μ fixant la position du point sur cette surface. L'élément de volume de la portion d'espace sera $d\varrho\, dS_\varrho$ si nous désignons par dS_ϱ l'élément d'aire de la surface S_ϱ.

Définissons maintenant une fonction ζ constante dans l'espace intérieur à S et extérieur à S_a, et dépendant dans le domaine D uniquement de ϱ. Si nous prenons soin de choisir pour exprimer cette dépendance une fonction $f(\varrho)$ à dérivée continue dont la dérivée s'annule aux extrémités de l'intervalle $(0, a)$, et si nous posons $\zeta = f(0)$ à l'intérieur de S, et $\zeta = f(a)$ à l'extérieur de S_a, nous obtiendrons une des fonctions admissibles et les dérivées premières de celle-ci s'exprimeront comme il suit:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{d\zeta}{d\varrho}\alpha, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{d\zeta}{d\varrho}\beta, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{d\zeta}{d\varrho}\gamma,$$

car

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial \varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x}, \ldots$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} = 0, \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} = 0$$

et, en désignant par (x_0, y_0, z_0) le pied de la normale sur la surface S,

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{1/2}=\frac{x-x_0}{\varrho}=\alpha,$$
$$\frac{\partial \varrho}{\partial y}=\beta, \frac{\partial \varrho}{\partial z}=\gamma.$$

Toute substitution faite, nous aurons

$$\iiint_T \left(u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}+w\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iiint_D \left(u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}+w\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=$$
$$=\iiint_D (u\alpha+v\beta+w\gamma)\frac{d\zeta}{d\varrho}d\varrho\,dS_\varrho=\int_0^a f'(\varrho)\,d\varrho\iint_{S_\varrho}(u\alpha+v\beta+w\gamma)\,dS_\varrho=0.$$

L'intégrale

$$\iint_{S_\varrho}(u\alpha+v\beta+w\gamma)\,dS_\varrho$$

dépend évidemment de ϱ seul et elle est une fonction continue $J(\varrho)$ de ϱ. Comme $f'(\varrho)$ est une fonction quelconque assujettie à la condition de s'annuler pour $\varrho=0$ et $\varrho=a$, l'équation

$$\int_0^a J(\varrho)f'(\varrho)\,d\varrho=0$$

conduit, par l'application du lemme fondamental du Calcul des Variations, à la conclusion

$$J(\varrho)=0.$$

Si on fait, en particulier, $\varrho=0$, on arrive à la proposition énoncée.

II.

Dans le cas du plan, l'égalité

$$\int_s (u\alpha+v\beta)\,ds=0$$

valable pour toute ligne fermée permet de construire très simplement une fonction $\omega(x, y)$ à dérivées premières continues et telle que

$$u=\frac{\partial \omega}{\partial y},\ v=-\frac{\partial \omega}{\partial x}.^{3)}$$

Inversement, si u et v dérivent d'une fonction ω comme l'indiquent ces formules, l'intégrale

$$\int (u\alpha+v\beta)\,ds$$

s'annule bien pour toute ligne fermée. Les deux faits arrivant simultanément, nous dirons que les formules

---

3) Voir HAAR, loc. cit.

$$u = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \; v = -\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

représentent sous forme paramétrique (la fonction ω jouant le rôle de paramètre) l'ensemble des systèmes de fonctions u, v tels que l'intégrale considérée soit nulle pour toute ligne fermée.

Existe-t-il, dans le sens que nous venons de préciser, une représentation paramétrique des systèmes de fonctions u, v, w tels que

$$\iint_S (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, dS = 0$$

quelle que soit la surface fermée S?

L'hypothèse peut encore être formulée en disant que si L est une ligne fermée déterminée et σ une surface bilatère quelconque limitée par le contour L, l'intégrale

$$\iint_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma$$

dépend uniquement de la ligne L et non du choix de la surface σ.

S'il est possible alors de trouver un champ de vecteurs $\vec{\Omega}$ ayant pour coordonnées $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ et tel que, L étant parcourue dans le sens positif par rapport aux normales de la surface σ,

$$\int_L Xdx + Ydy + Zdz = \iint_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma,$$

on pourra, en partant d'une définition convenable du vecteur rot $\vec{\Omega}$, établir que les fonctions u, v, w sont les coordonnées du vecteur rot $\vec{\Omega}$:

$$u = (\text{rot}\, \vec{\Omega})_x, \; v = (\text{rot}\, \vec{\Omega})_y, \; w = (\text{rot}\, \vec{\Omega})_z$$

Inversement, la démonstration du théorème de Stokes, basée sur la même définition du rotationnel, permettra d'affirmer que $\vec{\Omega}$ représentant un champ de vecteurs arbitraire à rotationnel continu, les formules précédentes donnent trois fonctions u, v, w dont l'intégrale

$$\iint (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, dS$$

est nulle sur toute surface fermée.

Dans le cas où u, v, w admettraient des dérivées premières continues, on n'aurait qu'à poser

$$u = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \; v = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \; w = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

et résoudre ces équations par rapport à X, Y, Z.[4]) Cette résolution n'offre alors aucune difficulté et par le théorème de STOKES

$$\int Xdx + Ydy + Zdz =$$
$$= \iint \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \alpha + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \beta + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \gamma \right] d\sigma$$

on s'assure que la condition imposée primitivement à X, Y, Z est vérifiée. La difficulté réside dans le fait que la construction du champ $\vec{\Omega}(X, Y, Z)$ est demandée sous la seule hypothèse que les fonctions u, v, w sont continues.

Il est évident, d'abord, que si un champ de vecteurs $\vec{\Omega}$ satisfait aux conditions requises, le champ $\vec{\Omega} + \text{grad.}\,\varphi$ y satisfera de même, φ étant une fonction quelconque à dérivées premières continues; et inversement, tout autre champ jouissant des mêmes propriétés que $\vec{\Omega}$ n'en diffère que par le gradient d'une fonction à dérivées premières continues. Il suffira donc d'obtenir un seul champ répondant à la question.

Pour éviter les complications, nous supposerons que la portion d'espace, objet de nos recherches, contient un point O tel que le segment de droite OP reliant O à un point quelconque P de cette portion d'espace se trouve à l'intérieur de celle-ci. Nous placerons l'origine au point O.

Considérons le problème comme résolu et formons la fonction

$$\varphi(P) \equiv \varphi(x, y, z) \equiv \int_{OP} Xdx + Ydy + Zdz,$$

en intégrant le long du segment de droit OP. Faisons passer par P une droite d de cosinus directeurs a, b, c et prenons sur cette droite un second point P'. Appliquons l'hypothèse au triangle OPP':

$$\iint_{OPP'} (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma = \varphi(P) + \int_{PP'} (Xa + Yb + Zc)\, ds - \varphi(P')$$

d'où

$$\frac{1}{PP'} \int_{PP'} (Xa + Yb + Zc)\, ds = \frac{\varphi(P') - \varphi(P)}{PP'} + \frac{1}{PP'} \iint_{OPP'} (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma.$$

Dans cette égalité fondamentale, nous maintiendrons le point P et la droite d (c'est-à-dire x, y, z; a, b, c) fixes et nous ferons tendre P' vers P. Le premier terme du second membre tendra vers

[4]) Voir, par exemple, PICARD, Traité d'Analyse. t. I, 3e éd., p. 142.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} a + \frac{\partial \varphi}{\partial y} b + \frac{\partial \varphi}{\partial z} c$$

pourvu que φ possède des dérivées premières continues, ce que nous admettrons pour le moment. Calculons le deuxième terme. Tous les points B du triangle peuvent s'obtenir en portant sur OP la distance $OA = \varrho$, sur la demi-droite issue de A et parallèle à PP' la distance ϱ' et en faisant varier ϱ de 0 à r $(= OP)$ et ϱ' de 0 à $\frac{\varrho}{r} PP'$. Adoptons ϱ et ϱ' pour coordonnées sur le plan OPP'; nous aurons pour l'élément d'aire $d\sigma$ l'expression

$$d\sigma = \sin \omega \, d\varrho \, d\varrho'$$

dans laquelle ω désigne l'angle aigu compris entre OP et PP'. Les cosinus directeurs α, β, γ de la normale au plan OPP' (valeurs constantes dans le domaine d'intégration) s'exprimeront par les formules élémentaires

$$\alpha = \frac{yc - zb}{r \sin \omega}, \ \beta = \frac{za - xc}{r \sin \omega}, \ \gamma = \frac{xb - ya}{r \sin \omega}.$$

Donc

$$\iint_{OPP'} (u\alpha + v\beta + w\varrho) \, d\sigma =$$

$$= \iint \left(u \frac{yc - zb}{r \sin \omega} + v \frac{za - xc}{r \sin \omega} + w \frac{xb - ya}{r \sin \omega} \right) \sin \omega \, d\varrho \, d\varrho' =$$

$$= \frac{1}{r} \int_0^r d\varrho \int_0^{\frac{\varrho}{r} PP'} \begin{vmatrix} u & v & w \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} d\varrho'$$

et, par suite, en posant $\tau = \frac{\varrho}{r} PP'$,

$$\frac{1}{PP'} \iint_{OPP'} (u\alpha + v\beta + w\gamma) \, d\sigma = \frac{1}{r^2} \int_0^r \left\{ \frac{\varrho}{\tau} \int_0^\tau \begin{vmatrix} u & v & w \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} d\varrho' \right\} d\varrho.$$

La fonction sous le premier signe $\int$

$$\frac{\varrho}{\tau} \int_0^\tau \begin{vmatrix} u & v & w \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} d\varrho'$$

admet, si τ tend vers zéro, la limite

$$\varrho \begin{vmatrix} u & v & w \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

et cela, uniformément pour $0 \leqq \varrho \leqq \tau$ (conséquence du fait que les fonctions u, v, w sont continues en ϱ, ϱ' et que x, y, z; a, b, c sont indépendants des variables d'intégration). Ainsi, en passant à la limite, on trouve

$$\lim \frac{1}{PP'} \iint\limits_{OPP'} (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma = \frac{1}{r^2} \int_0^r \begin{vmatrix} u & v & w \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} \varrho\, d\varrho.$$

De tout cela, il résulte que la limite $Xa + Yb + Zc$ du premier membre de l'égalité fondamentale s'exprime par les fonctions φ, u, v, w de la manière suivante

$$Xa + Yb + Zc = \frac{\partial \varphi}{\partial x} a + \frac{\partial \varphi}{\partial y} b + \frac{\partial \varphi}{\partial z} c + \frac{1}{r^2} \int_0^r \begin{vmatrix} u & v & w \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} \varrho\, d\varrho.$$

Or, a, b, c sont les cosinus directeurs d'une droite arbitraire passant par P. Donc

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{r^2} \int_0^r (vz - wy)\, \varrho\, d\varrho,$$

$$Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{r^2} \int_0^r (wx - uz)\, \varrho\, d\varrho,$$

$$Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \int_0^r (uy - vx)\, \varrho\, d\varrho.$$

Mais alors le vecteur $\vec{\Omega}^*$

$$X^* = \frac{1}{r^2} \int_0^r (vz - wy)\, \varrho\, d\varrho, \quad Y^* = \frac{1}{r^2} \int_0^r (wx - uz)\, \varrho\, d\varrho,$$

$$Z^* = \frac{1}{r^2} \int_0^r (uy - vx)\, \varrho\, d\varrho$$

ne diffère du vecteur $\vec{\Omega}\,(X, Y, Z)$ que par le gradient de la fonction φ; il est, par conséquent, lui-même une solution du problème.

Pour arriver au résultat que nous venons d'énoncer, nous avons dû supposer l'existence du vecteur $\vec{\Omega}$ et celle des dérivées premières d'une certaine fonction φ. Le vecteur $\vec{\Omega}^*$ étant entièrement déterminé par les fonctions données u, v, w, nous avons maintenant à examiner, indépendamment de toute hypothèse, si l'égalité

$$\int_L X^*dx + Y^*dy + Z^*dz = \iint_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma$$

subsiste, lorsque σ est une portion de surface bilatère quelconque et L le contour de σ.

Substituons dans le premier membre les expressions trouvées. Nous aurons la formule

$$\int_L X^*dx + Y^*dy + Z^*dz =$$

$$= \int_{-L} ds \int_0 \left[(vz - wy)\frac{dx}{ds} + (wx - uz)\frac{dy}{ds} + (uy - vx)\frac{dz}{ds}\right]\frac{\varrho\, d\varrho}{r^2} =$$

$$= \iint \frac{\varrho}{r^2} \begin{vmatrix} u & v & w \\ x & y & z \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix} ds\, d\varrho$$

où l'intégrale double doit être étendue à la surface conique C formée par les segments de droite issues de O et aboutissant aux points de L. Sur cette surface, l'élément d'aire s'exprime par les variables s (arc du contour L) et ϱ (distance comptée de O)

$$d\sigma = \frac{\varrho}{r} \sin\omega\, ds\, d\varrho,$$

ω désignant l'angle aigu entre la génératrice du cône et la tangente au contour. Notre intégrale double s'écrit donc

$$\iint_C \begin{vmatrix} u & v & w \\ x & y & z \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{vmatrix} \frac{d\sigma}{r\sin\omega}.$$

Remarquons qu'en un point quelconque de la génératrice passant par le point (x, y, z) du contour, la normale à la surface a pour cosinus directeurs

$$\alpha = \frac{1}{r\sin\omega}\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right),\ \beta = \frac{1}{r\sin\omega}\left(z\frac{dx}{ds} - x\frac{dz}{ds}\right),$$

$$\gamma = \frac{1}{r\sin\omega}\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right);$$

donc l'intégrale double n'est autre que

$$\iint_C (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma.$$

D'après l'hypothèse que nous avons faite relativement aux fonctions u, v, w, l'intégrale

$$\iint (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma$$

a même valeur sur deux portions de surface quelconques pourvu qu'elles aient le même contour. Ainsi, en définitive,

$$\int_L X^*dx + Y^*dy + Z^*dz = \iint_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma$$

où σ est une portion de surface quelconque avec L comme contour. La vérification est faite.

III.

L'égalité

$$\int_L Xdx + Ydy + Zdz = \iint_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma$$

nous fournit un moyen de déduire du champ de vecteurs $\vec{\Omega}\,(X, Y, Z)$ le champ $\vec{R}\,(u, v, w)$.

Soient P un point déterminé de l'espace, et n une direction donnée ayant pour cosinus directeurs α, β, γ. Considérons une ligne plane fermée L dans un plan perpendiculaire à la direction n; désignons par σ l'aire limitée par L; et écrivons l'égalité précédente sous la forme

$$\frac{1}{\sigma}\int_L Xdx + Ydy + Zdz = \frac{1}{\sigma}\iint_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma.$$

Si nous faisons tendre la ligne fermée L vers le point P, le second membre a pour limite $u(P)\,\alpha + v\,(P)\,\beta + w\,(P)\,\gamma$, c'est-à-dire la composante R_n, suivant la direction n, du vecteur $\vec{R}$ en P; donc

$$R_n = \lim \frac{1}{\sigma}\int_L Xdx + Ydy + Zdz.$$

Définissons, d'une façon générale, le rotationnel d'un vecteur $\vec{\Omega}\,(X, Y, Z)$ par l'égalité précédente. Il faut s'assurer qu'on a bien affaire ici à un vecteur; en d'autres termes, que R_x, R_y, R_z étant les composantes suivant les axes O_x, O_y, O_z, on a pour la composante R_n suivant la direction de cosinus directeurs α, β, γ,

$$R_n = R_x\alpha + R_y\beta + R_z\gamma.$$

A cet effet, menons par P trois droites parallèles aux axes de coordonnées et prenons sur ces droites les points A, B, C de telle façon que la normale au plan ABC ait pour cosinus directeurs α, β, γ. Désignons par σ l'aire positive du triangle ABC et par $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ les aires PBC, PCA, PAB, ces dernières étant prises positivement ou négativement suivant que les normales positives qui correspondent aux parcours indiqués coïncident ou non avec les directions positives des axes. Avec ces conventions, on a

$$\sigma_x = \alpha\sigma,\ \sigma_y = \beta\sigma,\ \sigma_z = \gamma\sigma$$

et

$$R_n = \lim \frac{1}{\sigma} \int_{ABC} Xdx + Ydy + Zdz,$$

$$R_x = \lim \frac{1}{\sigma_x} \int_{PBC},\ R_y = \lim \frac{1}{\sigma_y} \int_{PCA},\ R_z = \lim \frac{1}{\sigma_z} \int_{PAB}.$$

Remarquons maintenant que

$$\int_{ABC} = \int_{PBC} + \int_{PCA} + \int_{PAB}\ ;$$

il s'ensuit

$$\frac{1}{\sigma} \int_{ABC} = \alpha \cdot \frac{1}{\sigma_x} \int_{PBC} + \beta \cdot \frac{1}{\sigma_y} \int_{PCA} + \gamma \cdot \frac{1}{\sigma_z} \int_{PAB},$$

d'où, par un passage à la limite, on tire la relation annoncée.

Le rotationnel a donc bien le caractère de vecteur; nous le désignerons, suivant l'usage, par le symbole rot $\vec{\Omega}$ et ses coordonnées par

$$(\text{rot}\ \vec{\Omega})_x,\ (\text{rot}\ \vec{\Omega})_y,\ (\text{rot}\ \vec{\Omega})_z.$$

Le résultat peut alors se résumer ainsi: Il existe un champ $\vec{\Omega}$ à rotationnel continu et tel que

$$u = (\text{rot}\ \vec{\Omega})_x,\ v = (\text{rot}\ \vec{\Omega})_y,\ w = (\text{rot}\ \vec{\Omega})_z.$$

IV.

Pour démontrer l'inverse, établissons d'abord le théorème de Stokes en partant de la définition que nous venons d'adopter pour le rotationnel.

Nous envisagerons, pour commencer, une aire plane σ limitée par une ligne fermée (plane) L. Le rotationnel $\vec{R}$ étant défini pour chaque point de σ, considérons deux nombres A et B tels que la projection R_n de $\vec{R}$ sur la normale au plan de σ soit comprise, au sens strict, entre ces nombres:

$$A < R_n < B$$

dans toute l'aire σ. Nous affirmons que

$$A\sigma < \int_L Xdx + Ydy + Zdz < B\sigma.$$

Supposons que ce ne soit pas le cas, par exemple, que

$$\int_L \geqq B\sigma.$$

Divisons σ en deux parties σ' et σ'' limitées par les contours L' et L''. Comme

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' \text{ et } \int_L = \int_{L'} + \int_{L''},$$

l'une au moins des inégalités

$$\int_{L'} \geqq B\sigma', \int_{L''} \geqq B\sigma''$$

sera nécessairement vérifiée. Nous pourrons former alors une suite d'aires $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\nu, \ldots$ limitées par les contours $L_1, L_2, \ldots, L_\nu, \ldots$ qui s'enveloppent mutuellement, tendent vers un point P et sont tels que

$$\int_{L_\nu} \geqq B\sigma_\nu.$$

Il s'ensuivra qu'au point P

$$R_n = \lim \frac{1}{\sigma_\nu} \int_{L_\nu} \geqq B,$$

contrairement à l'hypothèse.

Par conséquent, si M et m désignent les bornes supérieure et inférieure de R_n dans l'aire σ, on a

$$m\sigma \leqq \int_L Xdx + Ydy + Zdz \leqq M\sigma.$$

Cette double inégalité s'applique à toute portion de σ; elle entraîne, pour le cas où R_n est une fonction continue, l'égalité

$$\int_L Xdx + Ydy + Zdz = \iint_\sigma R_n\, d\sigma.$$

Nous aurions pu déduire ce résultat d'un théorème très général de M. LEBESGUE,[5]) mais pour le but poursuivi, les considérations élémentaires précédentes ont suffi.

Le théorème de STOKES se trouve ainsi démontré pour le plan. De là, on s'élève au théorème général en faisant intervenir un polygone inscrit au contour L, une surface polyédrale limitée par

[5]) H. LEBESGUE, Intégration des fonctions discontinues. Annales de l'Ecole Normale, 27 (1910), p. 399.

C. de la VALLÉE-POUSSIN, Cours d'Analyse, t. II, 2e éd., p. 116.

C. de la VALLÉE-POUSSIN, Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire, Paris, 1916, p. 73.

ce polygone et tendant vers la surface σ de telle façon que les faces du polyèdre deviennent plans tangents, puis en passant à la limite.[6])

Du théorème de STOKES, on tire la conclusion immédiate que si S est une surface fermée et $\vec{R}(u, v, w)$ le rotationnel continu d'un champ $\vec{\Omega}$, on a

$$\iint_S (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, dS = 0.$$

Nous avons ainsi la réponse complète à la question posée au début:

L'ensemble des fonctions u, v, w cherchées s'obtient par les formules

$$u = (\text{rot}\,\vec{\Omega})_x, \quad v = (\text{rot}\,\vec{\Omega})_y, \quad w = (\text{rot}\,\vec{\Omega})_z,$$

$\vec{\Omega}$ représentant un champ de vecteurs quelconque à rotationnel continu.

V.

Le théorème de STOKES permet d'établir une formule intéressante qui montre, entre autres choses, que si les coordonnées du vecteur $\vec{\Omega}$ admettent certaines dérivées partielles du premier ordre, la définition usuelle du rotationnel est identique à celle dont nous nous sommes servi.

Soit C un arc de courbe allant du point P au point Q et représenté par les équations

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad z = \varphi_3(t) \quad [0 \leqq t \leqq T]$$

Faisons varier l'arc C en posant

$$x = \Phi_1(t, \lambda), \quad y = \Phi_2(t, \lambda), \quad z = \Phi_3(t, \lambda) \quad [0 \leqq t \leqq T]$$

L'arc $P'Q'$, défini par ces équations, doit se réduire à C, par hypothèse, pour $\lambda = 0$.

Appliquons à la portion de surface correspondant aux inégalités

$$0 \leqq t \leqq T$$
$$0 \leqq \lambda \leqq \varepsilon$$

le théorème de STOKES

$$\int X dx + Y dy + Z dz = \iint (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma,$$

où u, v, w désignent le rotationnel de X, Y, Z.

---

6) PICARD, Traité d'Analyse, t. I, 3e éd. p. 145.

Le contour se compose des arcs PQ, QQ', $Q'P'$ et $P'P$; et l'on a

$$\alpha\, d\sigma = \frac{\partial (y, z)}{\partial (t, \lambda)}\, dt\, d\lambda, \quad \beta\, d\sigma = \frac{\partial (z, x)}{\partial (t, \lambda)}\, dt\, d\lambda, \quad \gamma\, d\sigma = \frac{\partial (x, y)}{\partial (t, \lambda)}\, dt\, d\lambda.$$

La formule peut donc s'écrire ainsi:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{QQ'} - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{PP'} - \frac{1}{\varepsilon}\Big[\int\limits_{P'Q'} - \int\limits_{PQ}\Big] = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} d\lambda \int_0^T \begin{vmatrix} u & v & w \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} \end{vmatrix} dt.$$

Faisons tendre ε vers zéro et employons, suivant l'usage, le symbole δ pour marquer l'opération $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)_0 \lambda$. Nous aurons à la limite

$$\Big[X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\Big]_P^Q - \delta \int\limits_C Xdx + Ydy + Zdz = \int\limits_C \begin{vmatrix} u & v & w \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \delta x & \delta y & \delta z \end{vmatrix} dt,$$

autrement écrit

$$\delta \int\limits_C Xdx + Ydy + Zdz = \Big[X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\Big]_P^Q + \int\limits_C \begin{vmatrix} u & v & w \\ \delta x & \delta y & \delta z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}.$$

C'est la formule générale annoncée.[7])

En particulier, si δx ne dépend pas de t et $\delta y = \delta z = 0$, on a

$$\frac{\delta}{\delta x}\int\limits_C Xdx + Ydy + Zdz = X(Q) - X(P) + \int\limits_C wdy - vdz.$$

Soit par exemple PQ un segment de droite parallèle à l'axe Oy et reliant les points (x, y_1, z) et (x, y_2, z). La formule précédente donnera alors

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{y_1}^{y_2} Y(x, y, z)\, dy = X(x, y_2, z) - X(x, y_1, z) + \int_{y_1}^{y_2} w(x, y, z)\, dy.$$

Nous voyons que si Y admet une dérivée partielle continue par rapport à x, il en résulte

---

[7]) Nous trouvons cette formule dans le Cours d'Analyse de M. Goursat (t. I, 4e éd., p. 654), établie sans l'intervention du théorème de Stokes mais au prix d'un calcul plus long.

$$X(x, y_2, z) - X(x, y_1, z) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial Y}{\partial x} dy - \int_{y_1}^{y_2} w dy;$$

donc X est dérivable par rapport à y et

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} - w$$

d'où

$$w = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Ainsi l'hypothèse que les dérivées

$$\frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial y}, \frac{\partial X}{\partial z}$$

existent et sont continues, entraîne l'existence des dérivées

$$\frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial Z}{\partial x}$$

et les formules

$$u = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

(Reçu le 13 novembre 1926.)