Operationskalkül von Heaviside und Laplacesche Transformation.

Von TIBOR v. STACHÓ in Budapest.

Zur Behandlung von — gewöhnlichen oder partiellen — *linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten* wird in der theoretischen Telegraphie seit einigen Jahren ein kühner, von OLIVER HEAVISIDE[1]) eingeführter Operationskalkül angewandt. Diese Methode wird an einigen *Beispielen* in § 1 besprochen werden. Es sei aber schon hier bemerkt, dass sie sich einer uralten Idee bedient, indem sie die Zeichen $\frac{d^k}{dt^k}$ bezw. $\frac{\partial^k}{\partial t^k}$ rein formal durch die k-te Potenz eines Parameters s ersetzt und von der Lösung des so vereinfachten Problems auf jene der ursprünglichen Fragestellung schliesst. Bedeutend früher und wesentlich tiefer hat CAUCHY[2]) vor HEAVISIDE in diese Rechnungsweise Einblick gewonnen. Dass wir trotzdem HEAVISIDE gedenken, erklärt der Umstand, dass er auch Regeln zur asymptotischen Entwicklung der Lösung angibt und somit die symbolische Methode selbst zur Diskussion des „Endverlaufes" in einigen Fällen heranzieht; Voraussetzungen und Beweise fehlen aber vollständig bei HEAVISIDE.

Es ist erst unlängst Herrn N. WIENER[3]) gelungen einen strengen Operationskalkül aufzubauen. Er benützt aber den LEBESGUEschen Integralbegriff, tiefliegende alte und neue Integraldarstellungen und streift bloss die Anwendungsmöglichkeit zur Behandlung von

---

[1]) HEAVISIDE, O.: Electromagnetic Theory. (London, 1893—1912). Siehe insbes. Bd. II. (1899).

[2]) Vgl. z. B. dessen Mémoire sur le Calcul Intégral (1850). Ouvres (1) 2

[3]) WIENER, N.: The Operational Calculus. Math Ann. 95 (1926), S 557—584.

Differentialgleichungen. Einfacher und sich ganz auf HEAVISIDES Verfahren stützend nimmt Herr P. LÉVY[4]) die Frage in Angriff. Leider werden aber so die nicht analytischen Lösungen des Problems nicht erfasst und die Asymptotik kommt nicht einen Schritt über HEAVISIDE hinaus.

Wir wollen uns in den Folgenden mit einer dritten Richtung beschäftigen, welche die Beziehung des HEAVISIDEschen Kalküls — kurz *H-Kalküls* — zu der so mannigfaltig benützten LAPLACE*schen Transformation* — kurz *L-Transformation* — feststellt. Dieser Standpunkt wird von Herrn J. R. CARSON[5]) vertreten. Seine Ausführung ist aber rein formal und kann, was die asymptotischen Entwicklungen anbelangt — nach dem Verfasser selbst — „not be regarded as a satisfactory discussion and is indeed almost as heuristic as HEAVISIDE's own procedure."

§ 2 bringt die Zusammenstellung bekannter Sätze über eine Klasse von L-Transformationen. In § 3 werden mit Hinweis auf die Untersuchungen der Herren F. BERNSTEIN und G. DOETSCH[6]) die in § 1 erwähnten partiellen Differentialgleichungen im Lichte der L-Transformation gestreift.

Entscheidend in dieser Richtung muss aber eine Arbeit von Herrn A. HAAR[7]) genannt werden. Die Methode von Herrn HAAR erlaubt nähmlich die asymptotische Entwicklung von Funktionen aus den Singularitäten ihrer L-Transformierten herzuleiten. Dadurch können nicht nur — wie § 4 zeigt — die asymptotischen Regeln des H-Kalküls streng behandelt, sondern — worauf wir aber hier verzichten — deren Anzahl auch beträchtlich vermehrt werden.

---

[4]) LÉVY, P.: Le calcul symbolique de Heaviside. Bull. des sc. math. (2) 50 (1926), S. 174—192.

[5]) CARSON, J. R.: The Heaviside Operational Calculus. Bull. Amer. Math. Soc. 32 (1926), S. 43—68.

[6]) *a)* DOETSCH, G.: Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus. Math. Ann. 89 (1923), S. 192—207., sowie *b)* teilweise mit F. BERNSTEIN: Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. Math. Zeitschr. 22 (1925), S. 289—306.

[7]) HAAR, A.: Über asymptotische Entwicklung von Funktionen. Math. Ann. 96 (1926), S. 59—107.

§ 1.

Der Operationskalkül von Heaviside.

Man ersetzt in der vorgelegten Differentialgleichung zunächst das Zeichen $\frac{d^k}{dt^k}$ bezw. $\frac{\partial^k}{\partial t^k}$ rein formal durch die k-te Potenz eines Parameters s. Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(1)\qquad D[u] \equiv a_n \frac{d^n u}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 u = b(t)$$

wird dadurch in die symbolische *algebraische* Gleichung

$$(1^*)\qquad C(s)\, u = b$$

überführt. $C(s)$ bezeichnet die linke Seite der zu (1) gehörigen charakteristischen Gleichung

$$(2)\qquad C(s) \equiv a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0 = 0.$$

Handelt es sich aber etwa um die Telegraphengleichung

$$(3)\qquad D[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ac \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (ad + bc) \frac{\partial u}{\partial t} - bdu = 0,$$

in welcher die nicht negativen Konstanten a, b, c, d der Reihe nach die Induktivität, den Widerstand, die Kapazität und die Ableitung des linearen Leiters für die Längeneinheit bezeichnen, so wird man auf eine symbolische *gewöhnliche* Differentialgleichung

$$(3^*)\qquad \frac{d^2 u}{dx^2} - (as + b)(cs + d)\, u = 0$$

mit dem Parameter s geführt.

Löst man nun die Gleichungen (1*), (3*), in welchen die Variable t (die Zeit) explicite nicht vorkommt, so wird

$$(4^*)\qquad u = \frac{b}{C(s)}$$

bezw.

$$(5^*)\qquad u = u_0 e^{-xr} \text{ mit } r^2 = (as + b)(cs + d)$$

Bei der Gleichung (3*) beschränken wir uns somit auf die partikuläre Lösung, der man sich beim einseitig unbegrenzten ($x \geqq 0$) Leiter bedient. Sie stellt *symbolisch* die Spannung in einem solchen Leiter dar, wenn im Punkte $x = 0$ die konstante Spannung u_0 angelegt wird. Wir werden sie in den Fällen $a = d = 0$, $bc \neq 0$ bezw. $d = 0$, $ac \neq 0$ genauer besprechen. Vorläufig wollen wir diese Rechnungsweise im Falle $d = 0$, $ac \neq 0$ weiterführen.

Die Stromstärke v in einem einseitig unbegrenzten Leiter ändert sich mit der Spannung u gemäss

(6) $$a\frac{\partial v}{\partial t}+bv=-\frac{\partial u}{\partial x},$$

oder in symbolischer Gestalt

(6*) $$(as+b)\,v=ru_0e^{-xr},$$

wenn schon (5*) berücksichtigt wird. Da jetzt $r=\sqrt{cs(as+b)}$ ist, wird

$$v=u_0e^{-xr}\sqrt{\frac{cs}{as+b}},$$

insbesondere an der Entrittsstelle $x=0$:

(7*) $$v=u_0\sqrt{\frac{cs}{as+b}}.$$

Es ergibt sich somit die Aufgabe: Man soll I) aus der analytischen Gestalt der symbolischen Lösung in s, jene der eigentlichen Lösung in t bestimmen,

II) aus dem analytischen Verhalten der symbolischen Lösung in s über den asymptotischen Charakter der eigentlichen Lösung in Bezug auf t Aufschluss gewinnen.

Die an den erwähnten Beispielen vorgeführte symbolische Rechnungsweise war — wie erwähnt — lange vor Heavisice bekannt und die Aufgabe I) mannigfach gelöst worden. Wir wenden uns daher der zweiten Aufgabe zu und erwähnen die beiden folgenden Regeln von Heaviside.

A) Wenn die symbolische Lösung in die Reihe

$$H(s)\sqrt{s}=(a_0+a_1s+a_2s^2+\ldots)\sqrt{s}$$

entwickelt werden kann — wie z. B. (7*) —, so erhält man die Lösung der ursprünglichen Gleichung in der Gestalt einer asymptotischen Entwicklung, indem man $\sqrt{s}$ durch $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ und s^k durch $\frac{d^k}{dt^k}$ ersetzt, also

(8) $$\begin{aligned}u(t)&\sim\left(a_0+a_1\frac{d}{dt}+a_2\frac{d^2}{dt^2}+\ldots\right)\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\\&\sim\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\left(a_0-\frac{a_1}{2t}+1.3\frac{a_2}{(2t)^2}-1.3.5\frac{a_3}{(2t)^3}+\ldots\right).\end{aligned}$$

B) Lässt sich dagegen die symbolische Lösung nur nach geraden *und* ungeraden Potenzen von $\sqrt{s}$ entwickeln — wie z. B (5*) im Falle $d=0$, $b\neq0$ — also in die Reihe

$$H(\sqrt{s})=b_0+b_1\sqrt{s}+b_2(\sqrt{s})^2+\ldots,$$

so entferne man einfach alle Glieder mit *positiven* ganzzahligen Potenzen von s und auf den so erhaltenen Teil

$$b_0 + (b_1 + b_3 s + b_5 s^2 + \ldots) \sqrt{s}$$

wende man wieder die Regel *A)* an, die also

$$(9) \quad u(t) \sim b_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left(b_1 - \frac{b_3}{2t} + 1.3 \frac{b_5}{(2t)^2} - 1.3.5 \frac{b_7}{(2t)^3} + - \ldots \right)$$

ergibt.

§ 2.

Die Laplacesche Transformation.

1. Es bezeichne $f(t)$ eine in jedem endlichen, nicht negativen Intervall integrierbare Funktion. Wenn das Integral

$$(10) \qquad F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

im Punkte $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ konvergiert, so konvergiert es auch für alle s mit dem reellen Teil $R(s) = \sigma > \sigma_0$ und stellt in dieser Halbebene eine reguläre Funktion $F(s)$ dar. F wird die *Laplace-transformierte* von f genannt und mit $F = L(f)$, genauer $F(s) = L(f(t))$ bezeichnet.

(10) stellt als Funktionaloperation eine Beziehung zwischen zwei Funktionenbereichen dar. Nach einer Bezeichnungsweise von Herrn Doetsch[8]) gehört f dem *Oberbereich*, F dagegen dem *Unterbereich* an. Sollte (10) absolut konvergieren, so sagen wir f gehöre dem *verengten* Oberbereich an.[9])

2. Die L-Transformation ist eine lineare Funktionaloperation.

3. Ist

$$f_1 * f_2(t) = \int_0^t f_1(t_1) f_2(t - t_1)\, dt_1 = f_2 * f_1(t)$$

die *Faltung* von f_1 und f_2, so ist

$$(11) \qquad L(f_1 * f_2) = L(f_1)\, L(f_2),$$

d. h. der Faltung im *verengten* Oberbereich entspricht die Multiplikation im Unterbereich.

4. Ist $f^{(\nu)}(t)$ eine Oberfunktion und $f^{(\nu-1)}(t)$ bei $t = 0$ stetig, so gehört auch $f^{(\nu-1)}$ und alle Ableitungen niedriger Ordnung samt

[8]) Doetsch: a. a. O. [6]) a).

[9]) Da wir gleichzeitig nur endlich viele voneinander wesentlich verschiedene (vgl. 5.) Funktionen betrachten werden, braucht die Konvergenzhalbebene des betr Funktionenbereiches nicht ausdrücklich angegeben werden.

f dem (sogar verengten) Oberbereich an und es gilt:

(12) $L(f^{(\nu)}) = s^\nu L(f) - [f(0)\, s^{\nu-1} + f'(0)\, s^{\nu-2} + \ldots + f^{(\nu-1)}(0)]$.

Bei Beachtung des Umstandes, dass für $\mu = 0, 1, \ldots \nu - 1$: $f^{(\mu)}(t) = O(e^{\alpha t})$ mit festem α ist, ergibt sich der Beweis durch Produktintegration.[10])

5. Zu jeder *Oberfunktion* ist die *Unterfunktion* eindeutig bestimmt. Zu einer Unterfunktion gehören dagegen unendlich viele Oberfunktionen, die sich aber nur durch Nullfunktionen $n(t)$ mit der Eigenschaft $\int_0^t n(t_1)\, dt_1 \equiv 0$ unterscheiden können.

Zum Schluss noch ein einfacher Satz über die Faltung von Funktionen. Wenn für $t \geqq 0$ die Funktion f_0 stetig ist, die Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ einmal stetig differenzierbar sind, so ist

$$\Phi(t) = f_0 * f_1 * \ldots * f_n(t)$$

vorhanden, n-mal stetig differenzierbar u. zw.

$$(13) \qquad \Phi^{(\nu)}(t) = \begin{cases} f_0 * (f_1 * \ldots * f_n)^{(\nu)}, & \nu = 0, 1, \ldots, n-1 \\ f_0 * (f_1 * \ldots * f_n)^{(\nu)} + f_0(t) f_1(0) \ldots f_n(0), & \nu = n \end{cases}$$

Offenbar ist dann

$$(14) \qquad \Phi^{(\nu)}(0) = \begin{cases} 0, & \nu = 0, 1, \ldots, n-1 \\ f_0(0) f_1(0) \ldots f_n(0), & \nu = n. \end{cases}$$

Für $n = 1$ folgt der Satz aus dem elementaren Satz über Differentiation eines Integrals nach einem Parameter, für den allgemeinen Fall dann mit Schluss von n auf $n + 1$.

§ 3.

H-Kalkül und L-Transformation.

Beschränken wir uns — um die Ideen zu fixieren — auf die in § 1 erwähnten Probleme der Kabeltelegraphie und setzen wir in Gleichung (3) gleich $d = 0$, da die Heavisideschen Regeln *A), B)* nur in diesem Falle angewendet werden können.

Es sei vorausgesetzt, dass (3) für $x > 0$, $t > 0$ (mit Ausnahme von singulären Wertepaaren, für welche bei der hyperbolischen Differentialgleichung Diskontinuitäten der „Lösung" auftreten können) eine solche Lösung besitzt, welche die Randbedingungen

[10]) Ein eleganter Beweis für den Fall, dass f dem verengten Oberbereich angehört, findet sich bei Doetsch a. a. O. [6]) a).

$$u(x, t) \to 0, \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \to 0 \text{ für } t \to 0, \; x \neq 0$$

$$u(x,t) \to u_0 \text{ (konst.) für } x \to 0, \; t > 0, \; u(x, t) \to 0 \text{ für } x \to \infty$$

erfüllt, und bei welcher $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ — und somit, nach § 2, $\frac{\partial u}{\partial t}$ und u — dem Oberbereich angehört, kurz alle weiter bis (5**) angeführten Operationen erlaubt sind. Überführt man nun (3) in ihre L-Transformierte, indem man sie mit e^{-st} multipliziert und dann von 0 bis ∞ nach t integriert, so gewinnt man die Gleichung

$$(3^{**}) \qquad \frac{d^2 U}{ax^2} - (as + b) cs\, U = 0;$$

dieser muss $U = L(u)$ mit den Randbedingungen

$$U(x, s) \to \frac{u_0}{s} = L(u_0) \text{ für } x \to 0, \; U(x, s) \to 0 \text{ für } x \to \infty$$

genügen. Es ergibt sich so

$$(5^{**}) \qquad U = \frac{u_0}{s} e^{-xr} \text{ mit } r^2 = (as + b) cs.$$

Was nun den Fall $a = 0$, $bc \neq 0$ anbelangt, in welchem (3) in die lineare Wärmeleitungsgleichung übergeht, stellt (5**) tatsächlich die Unterfunktion der gesuchten Lösung dar.[11]

Den Fall $ac \neq 0$ wollen wir näher betrachten. Aus

$$(15) \qquad \frac{e^{-x\sqrt{(as+b)cs}}}{\sqrt{(as+b)cs}} = \frac{1}{\sqrt{ac}} \int\limits_{x\sqrt{ac}}^{\infty} e^{-\frac{b}{2a}t} J_0\left(\frac{b}{2a}\sqrt{acx^2 - t^2}\right) e^{-st}\, dt^{12)}$$

— wo J_0 die Besselsche Funktion erster Art und nullter Ordnung bezeichnet — gewinnt man nach (11)

$$(16) \qquad \frac{1}{s}\frac{e^{-xr}}{r} = \int\limits_0^{\infty} (1 * w(t))\, e^{-st}\, dt$$

mit

$$w(t) = \begin{cases} 0, & t < x\sqrt{ac} \\ \frac{1}{\sqrt{ac}} e^{-\frac{b}{2a}t} J_0\left(\frac{b}{2a}\sqrt{acx^2 - t^2}\right), & t \geqq x\sqrt{ac}. \end{cases}$$

Nach — offentsichtlich erlaubter — Differentiation in Bezug auf x ergibt sich aus (16) somit, dass (5**) die Unterfunktion von

11) Doetsch, a. a. O. 6) b) S. 304.

12) Diese aus einer bekannten Formel fliessende Integraldarstellung benützt auch Herr Carson a. a. O. Man beachte jedoch den Unterschied der hier und dort gegebenen Herleitung.

$$u(x,t)=\begin{cases}0, & t<x\sqrt{ac}\\ u_0 e^{-x\frac{b}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}}+u_0 x\frac{b}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}\int\limits_{x\sqrt{ac}}^{t}\frac{e^{-\frac{bt}{2a}}J_1\left(\frac{b}{2a}\sqrt{acx^2-t^2}\right)}{\sqrt{acx^2-t^2}}dt, & t\geqq x\sqrt{ac}\end{cases}$$

darstellt; dies ist tatsächlich die bekannte Lösung von (3) bei den angegebenen Randbedingungen.

Nach diesen Bemerkungen kann das an (6) anschliessende Problem rasch erledigt werden. Was zunächst die Lösung von (6) mit der Anfangsbedingung $v(x,t)\to 0$ für $t\to 0$, $x>0$ anbelangt, unterwerfe man (6) in dem oben angegebenen Sinne der L-Transformation. Dann muss also $V=L(v)$ der linearen algebraischen Gleichung

$$(6^{**})\qquad (as+b)\,V=r\frac{u_0}{s}e^{-xr}$$

genügen, wenn schon (5**) berücksichtigt worden ist. Es ergibt sich so

$$V=\frac{u_0}{s}\sqrt{\frac{cs}{as+b}}\,e^{-x\sqrt{(as+b)cs}}$$

Aus (15) ersieht man, dass die zu V gehörige Oberfunktion v die u_0c-fache der oben angegebenen Funktion $w(t)$ ist, und so die bekannte Lösung von (6) darstellt, sowie, dass der Grenzwert von V für $x\to 0$, d. h.

$$(7^{**})\qquad \frac{u_0}{s}\sqrt{\frac{cs}{as+b}}$$

als Unterfunktion dem Randwert von $v(x,t)$ für $x\to 0$, $t>0$ gehört.

Der Vergleich der Formel (5*) mit (5**), bezw. (7*) mit (7**) zeigt, dass die mit s multiplizierte L-Transformierte der betr. Funktionen mit ihrer *symbolischen Gestalt* übereinstimmt.

§ 4.

Die asymptotischen Entwicklungen von Heaviside.

Wir wollen nun die Heavisideschen Regeln *A)* und *B)* unter den folgenden Voraussetzungen streng beweisen.

Es sei vorausgesetzt, dass die symbolische Lösung einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten auf die mit s multiplizierte L-Transformierte $U(s)$ der für hinreichend grosse

Werte des Argumentes stetigen Lösung $u(t)$ führt, und selbst die Gestalt

A) $$u = H(s)\sqrt{s}$$

bezw.

B) $$u = H(\sqrt{s}) \text{ besitzt.}$$

Es sei noch im Falle A)

für $R(s) > 0$

a) $H(s)$ regulär,

b) in jedem Vertikalstreifen von endlicher Breite gleichmässig $H(s) = o(\sqrt{s})$,

c) entlang jeder Vertikalen $\frac{H(s)}{\sqrt{s}}$ für hinreichend grosse t bei $\tau = \pm\infty$ vom Fourierschen Charakter.[13])

Längs der imaginären Achse sei

d) $H(s)$ regulär insbesondere in $s = 0$ $H(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu s^\nu$,

e) $H^{(\nu)}(s) = o(\sqrt{s})$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1$,

f) $\frac{H^{(n)}(s)}{\sqrt{s}}$ und $\frac{H^{(n-1)}(s)}{s\sqrt{s}}$ für hinreichend grosse t bei $\tau = \pm\infty$ vom Fourierschen Charakter. Dann ist

$$\lim_{t\to\infty} t^n \left[u(t) - \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu \frac{1 . 3 \ldots (2\nu - 1)}{(2t)^\nu} \right] = 0. \tag{17}$$

Im Falle *B)* sei

für $R(s) > 0$

a) $H(s)$ regulär,

b) in jedem Vertikalstreifen von endlicher Breite gleichmässig $H(\sqrt{s}) = o(s)$,

c) entlang jeder Vertikalen $\frac{H(\sqrt{s})}{s}$ für hinreichend grosse t bei $\tau = \pm\infty$ vom Fourierschen Charakter.

---

[13]) $\varphi(s) = \varphi(\sigma + i\tau)$ wird von Herrn Haar a. a. O. [7]) längs der Vertikalen $\sigma = \gamma$ für hinreichend grosse t bei $\tau = \pm\infty$ vom Fourierschen Charakter genannt, wenn bei jeder noch so kleinen Zahl δ für alle $t \geqq T$ und hinreichend grosse positive ω

$$\left| \int_\alpha^\beta e^{it\tau} \varphi(\gamma + i\tau)\, d\tau \right| < \delta$$

ausfällt, sobald $\alpha \geqq \omega$ und $\beta \geqq \omega$ bzw. $\alpha \leqq -\omega$ und $\beta \leqq -\omega$ ist.

Längs der imaginären Achse sei

d) $H(s)$ regulär, insbesondere in $s=0: H(s)=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu s^\nu$,

e) $H^{(\nu)}(\sqrt{s})=o((\sqrt{s})^{\nu+1})$ für $\nu=0,1,\ldots n-1$,

f) $\dfrac{H^{(n)}(\sqrt{s})}{(\sqrt{s})^{n+2}}$ und $\dfrac{H^{(n-1)}(\sqrt{s})}{(\sqrt{s})^{n+3}}$ für hinreichend grosse t bei $\tau=\pm\infty$ vom Fourierschen Charakter. Dann ist

$$(18)\quad \lim_{t\to\infty} t^n\left[u(t)-b_0-\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu b_{2\nu+1}\frac{1.3\ldots(2\nu-1)}{(2t)^\nu}\right]=0.$$

Beweis: *A)* Unter den angeführten Bedingungen ist mit Rücksicht auf

$$U^{(\nu)}(s)=\frac{H^{(\nu)}(s)}{\sqrt{s}}+d_1\frac{H^{(\nu-1)}(s)}{s\sqrt{s}}+\ldots+d_\nu\frac{H(s)}{s^\nu\sqrt{s}}$$

auf der imaginären Achse $U^{(\nu)}(s)=o(1)$ mit $\nu=0,1,\ldots n-1$ und $U^{(n)}(s)$ für hinreichend grosse t bei $\tau=\pm\infty$ vom Fourierschen Charakter. Subtrahiert man ferner von $U(s)$ die mit s multiplizierte n-te Teilsumme der Taylorschen Entwicklung von $H(s)$ um $s=0$, so versehwindet die Differenz an der Stelle $s=0$ von der $n+\frac{1}{2}$-ter Ordnung; es ist daher in

$$U(s)=\frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu s^\nu+W(s)$$

$W^{(n)}(s)$ auf der imaginären Achse stetig. Zieht man noch die aus *a), b), c)* fliessenden Voraussetzungen für $U(s)$ innerhalb $R(s)>0$ heran, so folgt nach einem Satz[14]) von Herrn Haar

$$\lim_{t\to\infty} t^n\left[u(t)-\sum_{\nu=0}^{n}\frac{a_\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}t^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\right]=0.$$

Nach der bekannten Relation

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+\nu)}{x(x+1)\ldots(x+\nu-1)}$$

ist aber

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)=(-1)^\nu 2^\nu\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{1.3\ldots(2\nu-1)}=(-1)^\nu\frac{2^\nu\sqrt{\pi}}{1.3\ldots(2\nu-1)},$$

[14]) a. a. O. [7]) S. 85. Der Satz ist dort unter der doppelten Voraussetzung über die Oberfunktion $u(t)$ ausgesprochen, dass sie stetig und in jedem endlichen Bereich von beschränkter Schwankung ist. Die genaue Verfolgung, des ebendort mitgeteilten Beweises zeigt aber, dass die erste Bedingung nur für hinreichend grosse t-Werte benützt wird, und die zweite — wenn sie auch in den Anwendungen immer erfüllt ist — entbehrt werden kann.

somit die in (17) angegebene asymptotische Entwicklung tatsächlich bewiesen.

B) In diesem Falle wird wegen

$$U^{(\nu)}(s) = d_0 \frac{H^{(\nu)}(\sqrt{s})}{(\sqrt{s})^{\nu+2}} + d_1 \frac{H^{(\nu-1)}(\sqrt{s})}{(\sqrt{s})^{\nu+3}} + \ldots + d_\nu \frac{H(\sqrt{s})}{(\sqrt{s})^{2\nu+2}}$$

auf der imaginären Achse $U^{(\nu)}(s) = o(1)$ mit $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ und $U^{(n)}(s)$ für hinreichend grosse t bei $\tau = +\infty$ vom Fourierschen Charakter; subtrahiert man ferner von $U(s)$ den Ausdruck

$$V(s) = \frac{1}{s}\left(b_0 + \sum_{\nu=0}^{n} b_{2\nu+1} s^{\frac{2\nu+1}{2}}\right)$$

so ist in

$$U(s) = V(s) + W(s)$$

$W^{(n)}(s)$ auf der imaginären Achse stetig. Alles in Allem ergibt dann die Anwendung des erwähnten Satzes von Herrn HAAR offenbar (18) w. z. b. w.

Im Falle (7*) mit $abc \neq 0$ ist nun die symbolische Lösung von der Gestalt *A)*, im Falle (5*) mit $bc \neq 0$ dagegen von der Gestalt *B)*. Alle sonst angeführten Bedingungen sind teils nach § 3 teils offenbar[15]) erfüllt. Damit können auf diese Fälle die HEAVISIDEschen Regeln *A)* bezw. *B)* mit voller Recht angewandt werden.

---

[15]) Allein die Bedingungen *B) e*, *f)* erfordern im Falle (5*) eine längere Betrachtung. Differenziert man durchwegs nach $\sqrt{s}$, so wird

$$(\sqrt{as+b})^{(\nu)} = \sqrt{s^\nu}\,\sqrt{(as+b)^{1-2\nu}} + \sqrt{s^{\nu-2}}\,\sqrt{(as+b)^{1-2(\nu-1)}} + \ldots = O(\sqrt{s^{1-\nu}})$$

und so nach der Leibnizschen Regel

$$r_\nu = r^{(\nu)} = c_1 \sqrt{s}\,(\sqrt{as+b})^{(\nu)} + c_2 (\sqrt{as+b})^{(\nu-1)} = O(\sqrt{s^{2-\nu}}).$$

Zum Schluss wird

$$H^{(\nu)}(\sqrt{s}) = H(\sqrt{s}) \sum c_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} r_1^{i_1} r_2^{i_2} \ldots r_\nu^{i_\nu}$$

mit

$$i_1 + 2i_2 + \ldots + \nu i_\nu = \nu,$$

d. h.

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_\nu \begin{cases} \leqq \nu - 1, & i_1 \neq \nu \\ = \nu, & i_1 = \nu. \end{cases}$$

Es ist also

$$H^{(\nu)}(\sqrt{s}) = c_3 H(\sqrt{s})\, r_1^\nu + O(\sqrt{s^{\nu-2}}),$$

und hierin das zweite Glied nach Division durch $\sqrt{s^{\nu+2}}$ von der Grössenordnung s^{-2}, also vom Fourierschen Charakter. Wegen

$$\frac{r_1^\nu}{\sqrt{s^{\nu+2}}} = c_4 \frac{1}{s}\left(\frac{s}{as+b}\right)^{\frac{\nu}{2}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{s^3}}\right)$$

ist auch das erste Glied in $H^{(\nu)}(\sqrt{s})$ nach Division durch $\sqrt{s^{\nu+2}}$ vom Fourierschen Charakter. Im Falle (5*) ist also *B) f)* erfüllt. Nebenbei ergibt sich $H^{(\nu)}(\sqrt{s}) = O(\sqrt{s^\nu})$, so dass auch die Bedingung *e)* erfüllt ist.

§ 5.

Einige Verallgemeinerungen des H-Kalküls.

Wie die symbolische Lösung (4*) der gewöhnlichen Differentialgleichung (1) zeigt, kommen bei ihr die Regeln $A)$, $B)$ zunächst überhaupt nicht in Betracht. Bei konstanter rechten Seite b ist nämlich (4*) eine meromorphe Funktion von s und bei einer anderen Funktion $b(t)$ scheint der Operationskalkül nicht einmal ansetzbar zu sein, — solange man die *symbolische Gestalt* von $b(t)$ nicht kennt. Der Heavisidesche Ansatz an Gleichung (6) scheint aber uns in dieser Hinsicht ein recht charakteristisches Beispiel zu geben. Der Vergleich der rechten Seite von (6*) mit der Ableitung von (5**) nach x zeigt nämlich, dass die symbolische Gestalt der rechten Seite von (6) ihre mit s multiplizierte L-Transformierte ist. So wird man zu folgendem Satze geführt:

Es sei in der Gleichung (1) $b(t)$ eine stetige Funktion des verengten Oberbereichs. Handelt es sich um die asymptotische Entwicklung der Lösung mit den Anfangswerten $u(0)=u'(0)=...=u^{(n-1)}(0)=0$, so ersetze man in (1) das Zeichen $\frac{d^k}{dt^k}$ durch s^k, die Funktion $b(t)$ aber durch ihre mit s multiplizierte L-Transformierte $B(s)=L(b(t))$. Ergibt sich aus dieser in u linearen algebraischen Gleichung

$$
(19) \qquad u=s\frac{B(s)}{C(s)}=\begin{cases} H(s)\sqrt{s} \\ H(\sqrt{s}) \end{cases}
$$

mit den in § 4. angegebenen Eigenschaften der Funktion $H(s)$, so sind die Regeln $A)$ bzw. $B)$ anwendbar.

Es erübrigt sich nach § 4 nur der Beweis, dass (19) die mit s multiplizierte L-Transformierte der stetigen Lösung darstellt. Wir benützen diese Gelegenheit um eine neue Methode zur Integration der Gleichung (1) anzugeben.

Es sei also die Gleichung (1) vorgelegt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $a_n=1$ und $a_0\neq 0$ gewählt werden. Gesetzt, es gibt — unter der Annahme, dass $b(t)$ dem verengten Oberbereich angehört — eine Lösung deren n-te Ableitung eine Oberfunktion und $n-1$-te Ableitung bei $t=0$ stetig ist. Führt man dann (1) in ihre L-Transformierte über indem man beiderseits mit e^{-st} multipliziert und dann von 0 bis ∞ nach t integriert, so ergibt sich mit Rücksicht auf (2) und (12)

$$(20)\quad C(s)\,L(u)-u(0)\,\{a_n s^{n-1}+\ldots+a_1\}$$
$$-u'(0)\,\{a_n s^{n-2}+\ldots+a_2\}-\ldots-u^{(n-1)}(0)=L(b).$$

Beachtet man, dass

$$a_n s^{n-\nu}+a_{n-1}s^{n-\nu-1}+\ldots+a_\nu=\frac{C(s)}{s^\nu}-\left(\frac{a_0}{s^\nu}+\frac{a_1}{s^{\nu-1}}+\ldots+\frac{a_{\nu-1}}{s}\right)$$

ist, so ergibt eine leichte Rechnung:

$$(1^{**})\qquad L(u)=\left[L(b)-\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{c_\nu}{s^{\nu+1}}\right]\frac{1}{C(s)}+\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{u^{(\nu)}(0)}{s^{\nu+1}}$$

mit

$$c_\nu=a_0u^{(\nu)}(0)+a_1u^{(\nu+1)}(0)+\ldots+a_{n-\nu-1}u^{(n-1)}(0).$$

Geht man nun in (1^{**}) beiderseits auf die Oberfunktionen zurück und bezeichnet die zu $\frac{1}{C(s)}$ gehörende stetige Oberfunktion mit $c(t)$, so ergibt sich schliesslich

$$(21)\qquad \begin{aligned} u(t)&=\left[b(t)-\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{c_\nu}{\nu!}t^\nu\right]*c(t)+\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{u^{(\nu)}(0)}{\nu!}t^\nu\\ &=v(t)*c(t)+w(t)\end{aligned}$$

bis auf eine Nullfunktion, die aber, da wir uns auf differenzierbare Funktionen beschränken, identisch gleich Null ist.

Nun beweist man sofort, dass (21) eine Lösung des Anfangswertproblems ist u. zw. bereits unter der einzigen Bedingung, dass $b(t)$ stetig ist. Wegen

$$w^{(\nu)}(0)=u^{(\nu)}(0)\quad\text{für }\nu=0,1,2,\ldots,n-1$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu w^{(\nu)}(t)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{c_\nu}{\nu!}t^\nu$$

genügt hiezu nämlich nur den Spezialfall zu beweisen, dass bei stetigem $v(t)$

$$z(t)=v(t)*c(t)=v(t)*e^{s_1t}*\ldots*e^{s_nt}$$

der Differentialgleichung $D[z]=v(t)$ mit den Anfangswerten $z(0)=z'(0)=\ldots=z^{(n-1)}(0)=0$ genügt. $s_1,\ldots,s_n$ sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (2).

Was die Anfangswerte anbelangt, ist dies nach (14) offenbar der Fall. Die Anwendung von (13) ergibt ferner

$$D[z]=v(t)*\sum a_\nu c^{(\nu)}(t)+v(t),$$

so dass zum Schluss nur der Beweis von

$$(22)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}a_\nu c^{(\nu)}(t)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu\,(e^{s_1t}*\ldots*e^{s_nt})^{(\nu)}\equiv 0$$

übrig bleibt.

Die Funktionen $c^{(\nu)}(t)$ gehören aber offenbar dem Oberbereich an, ferner wird nach (14) $c^{(\nu)}(0) = 0$ für $\nu = 0, 1, \ldots n-2$, und $c^{(n-1)}(0) = 1$; es ist also nach (12)

$$L(c^{(\nu)}) = s^\nu L(c) \text{ für } \nu = 0, 1, \ldots n-1$$
$$L(c^{(n)}) = s^n L(c) - 1,$$

und so

$$L\left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu c^{(\nu)}(t)\right) = \sum_{\nu=0}^{n} a_n s^\nu L(c(t)) - 1$$
$$= \frac{C(s)}{C(s)} - 1 \equiv 0;$$

es ist somit die Oberfunktion (22) eine Nullfunktion, die aber wegen der Stetigkeit identisch verschwindet.

Setzt man nun in (1**) die Anfangswerte $u(0), \ldots, u^{(n-1)}(0)$ — und somit die Konstanten c_ν — alle gleich Null, so zeigt der Vergleich von (1**) mit (19) die Richtigkeit unserer Behauptung.

Aus (20) ersieht man übrigens auch, dass, wenn die Wurzeln der charakteristischen Gleichung (2) in der Halbebene $R(s) < 0$ liegen, die asymptotischen Regeln bei beliebigen Anfangswerten bestehen bleiben. Die ausschlaggebende singuläre Stelle von $L(u)$ bleibt dann noch immer jene von $\frac{B(s)}{C(s)}$ bei $s = 0$.

In gleicher Weise wird man sich bei partiellen Differentialgleichungen von der dem symbolischen Kalkül eigentümlichen Bedingung bezüglich konstanter Randbedingungen befreien können. Man führe nur zu diesem Zwecke die symbolische Gestalt (d. i. die mit s multiplizierte L-Transformierte) dieser Randwerten an Stelle der früheren Konstanten ein.

Zum Schluss bemerken wir noch, — und diese bedeutende Erweiterung folgt nun aus den erwähnten Sätzen von Herrn Haar unmittelbar — dass die Heavisideschen Regeln *A), B)* selbst dann gültig bleiben, falls die Entwicklungen *A), B)* die symbolische Lösung bis auf eine mit s multiplizierte, in der Halbebene $R(s) \geqq 0$ reguläre und dort bei wachsender Ordinate samt ihren Ableitungen hinreichend stark gegen Null strebende Funktionen darstellen.

(Eingegangen am 2. Dezember 1926.)