Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche.

(Punktmengen. — Kartenfärben. — Verwandtschaftsbeziehungen. — Schachspiel.)

Von Dénes König in Budapest.

§ 1.

Beim Analysieren eines Beweises, den Stephan Valkó und ich für einen Satz der allgemeinen Mengenlehre gegeben haben,[1]) wurde ich auf folgendes Lemma geführt,[2]) welches sich als eigentlicher Kern des erwähnten Beweises erwies.

A) *Es sei* $E_1, E_2, E_3 \ldots$ *eine abzählbarunendliche Folge endlicher, nicht leerer Mengen und* R *eine binäre Relation, die so beschaffen ist, dass zu jedem Element* x_{n+1} *von* E_{n+1} *mindestens ein solches Element* x_n *von* E_n *gehört, welches zu* x_{n+1} *in der Relation* R *steht, was wir durch* $x_n R x_{n+1}$ *ausdrücken wollen. Dann kann man in jeder der Mengen* E_n *je ein Element* a_n *derart bestimmen, dass für die unendliche Folge* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *stets* $a_n R a_{n+1}$ *bestehe* $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

Fasst man die Elemente der Mengen E_n als Punkte auf und deutet man das Bestehen der Relation xRy dadurch an, dass man die Punkte x und y durch eine Kante verbindet, so kann man dieses Lemma in graphentheoretischer Formulierung[3]) folgendermassen aussprechen.

Zerfällt die abzählbarunendliche Menge der Punkte (= Knotenpunkte) eines unendlichen Graphen G in abzählbar viele endliche

---

[1]) „Über mehrdeutige Abbildungen", Mathematische Annalen, Bd. 95.

[2]) „Sur les correspondances multivoques", Fundamenta Mathematicae, Bd. 8, § 3.

[3]) Den Begriff des unendlichen Graphen habe ich in § 3 meiner Arbeit „Über Graphen ..", Mathematische Annalen, Bd. 77. eingeführt.

nicht leere Mengen $E_1, E_2, E_3, \ldots$ derart, dass jeder Punkt von E_{n+1} $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ mit einem Punkte von E_n durch eine Kante verbunden ist, so gibt es im Graphen einen „unendlichen Weg" $a_1 a_2 a_3 \ldots$, der aus jeder der Mengen E_n einen Punkt a_n enthält. (Auch hier brauchen die Mengen E_n nicht unbedingt elementfremd zu sein.)

In dieser graphentheoretischer Terminologie gestaltet sich der Beweis folgendermassen. Ein endlicher Weg in G soll als ein S-Weg bezeichnet werden, wenn seine Punkte der Reihe nach zu E_1, zu $E_2, \ldots,$ zu E_k gehören. Es gibt unendlichviele S-Wege in G, da, mit Ausnahme der Punkte von E_1, jeder Punkt von G der Endpunkt eines S-Weges ist. Jeder S-Weg beginnt mit einer Kante die einen Punkt x_1 von E_1 mit einem Punkt x_2 von E_2 verbindet. Da solche Kanten nur in endlicher Anzahl vorhanden sind, so muss *eine* dieser Kanten, etwa $a_1 a_2$, in unendlich vielen S-Wegen vorkommen. Alle *diese* S-Wege enthalten nun als zweite Kante eine der endlichvielen Kanten $a_2 x_3$, wo x_3 zu E_3 gehört; also muss es in E_3 einen Punkt a_3 von der Beschaffenheit geben, dass unendlichviele S-Wege, die mit $a_1 a_2$ beginnen, auch $a_2 a_3$ enthalten. Ebenso fortfahrend definiert man nun einen Punkt a_4 von E_4, a_5 von E_5, u. s. w. Das Verfahren kann nicht abbrechen und führt zu einem unendlichen Weg $a_1 a_2 a_3 \ldots$ von der verlangten Eigenschaft.

Was die Anwendungen des hiermit bewiesenen Lemmas innerhalb der Graphentheorie betrifft, ist dort eine andere, teilweise allgemeinere Formulierung von Nutzen. Durch fast wörtliche Wiederholung des gegebenen Beweises ergibt sich nämlich folgender Satz.

Laufen in jedem Punkte eines unendlichen zusammenhängenden Graphen nur endlichviele Kanten zusammen, so enthält der Graph einen unendlichen Weg.

Beide Bedingungen sind hier notwendig. Wenn die Punkte nicht „von endlicher Ordnung" sind, braucht der Graph keinen unendlichen Weg zu besitzen, wie dies ein unendlichviel-strahliger Stern zeigt. Dass der Graph auch zusammenhängend sein muss, zeigt das Beispiel des (regulären) Graphen, welcher aus einem Zweieck, einem Dreieck, einem Viereck, u. s. w. besteht, wobei diese Vielecke untereinander nicht zusammenhängen. Letzteres Beispiel zeigt auch, dass ein Graph einen „beliebig langen" Weg enthalten kann, ohne einen unendlichen Weg enthalten zu müssen.

Folgende Zeilen haben nun den Zweck die unter [2]) erwähnte Anwendung mit anderen Anwendungen des Lemmas A) zu ergänzen. Es kommt dabei nicht immer auf die Neuheit der Resultate, sondern vielmehr darauf an, zu zeigen, dass in diesem Lemma ein fruchtbares Prinzip ausgesprochen wird, welches auf ganz verschiedenartige mathematische Probleme mit Nutzen angewendet werden kann.

§ 2

Wir beweisen zunächst folgende Verallgemeinerung des Borelschen Theorems.[4])

Es sei E eine abgeschlossene Teilmenge des Intervalles (0, 1) *und I eine Menge von Intervallen, die so beschaffen sind, dass jeder Punkt von E in einem dieser Intervalle enthalten ist. Dann gibt es eine natürliche Zahl n so, dass wenn man* (0, 1) *in 2^n gleiche Intervalle teilt, diejenigen dieser Teilintervalle, welche einen Punkt von E enthalten, in einem Intervalle der Intervallmenge I enthalten sind.*

Wäre der Satz nicht richtig, so gäbe es für jedes n wenigstens ein Intervall $\left(\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right)$, wo $m = 0, 1, 2, \ldots$ oder $2^n - 1$ ist, welches einen Punkt von E enthält und in keinem Intervalle aus I enthalten ist. Wir bezeichnen die Menge *dieser* Intervalle mit E_n Für jedes n ist E_n endlich und nicht leer. Ist x_n ein Element von E_n und x_{n+1} von E_{n+1}, so setzen wir $x_n R x_{n+1}$, falls x_{n+1} aus x_n durch Halbieren hervorgegangen ist. Vermöge der gegebenen Definitionen der Mengen E_n und der Relation R erfüllen diese die Bedingungen des Lemmas A). Wendet man das Lemma an, so kommt man zum folgenden Resultat. Es existiert eine unendliche Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von Intervallen, die alle 1) aus dem vorangehenden durch Halbieren entstehn, 2) einen Punkt von E enthalten und 3) in keinem Intervall aus I enthalten sind. Dann ist aber auch der gemeinsame Punkt α der Intervalle $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in keinem Intervalle aus I enthalten. Dies ist aber unmöglich, da, wegen der Abgeschlossenheit von E, α zu E gehört.

Wir wollen noch erwähnen dass dieser Beweis nur vom Satze der ineinandergeschachtelten Intervalle, nicht aber vom Bolzano-Weierstrassschen Satze Gebrauch machte. Derselbe Beweis gilt für die Ebene, Raum, u. s. w.

---

[4]) Vgl. De la Vallée Poussin, Intégrales de Lebesgue, etc., S. 14.

§ 3.

Die zweite Anwendung betrifft das Problem des Kartenfärbens. Es ist bewiesen, dass zu jeder (zweiseitigen) Fläche eine minimale Zahl p (die nur vom Geschlecht der Fläche abhängt) von folgender Eigenschaft gehört: wird die Fläche durch einen beliebigen Graph in *endlich* viele Länder zerteilt, so kann man jedem Lande eine aus p verschiedenen Farben ausgewählte Farbe so zuordnen, dass zwei Länder, die eine gemeinsame Grenzkante besitzen, stets verschieden gefärbt werden. (Für die Ebene und Kugel weiss man nur, dass entweder $p = 4$ oder $p = 5$ ist, für die Torusfläche ist $p = 7$.) Wie steht aber die Sache, wenn dieselbe Fläche durch einen (unendlichen) Graph in (abzählbar) unendlichviele Länder zerlegt wird? Wir beweisen, dass auch *in diesem Falle stets p Farben genügen.*[5])

Es seien $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n, \ldots$ die Länder der „unendlichen" Karte. Die Grenzkanten von $L_1, L_2, \ldots$ und L_n bilden einen Graph G_n, der die Fläche in $n+1$ Länder $L_1, L_2, \ldots, L_n, M_n$ zerschneidet, wo M_n die Länder $L_{n+1}, L_{n+2}, \ldots$ ausmacht. Die durch G_n bestimmte Karte K_n kann, da sie endlich ist, mit p Farben gefärbt werden (die Farbe von M_n wollen wir dabei ausser Acht lassen) und zwar natürlich nur auf endlichviel verschiedene Arten. Die verschiedenen Färbungen $F_n, F'_n, F''_n, \ldots$ von K_n (mit den p Farben) bilden also eine endliche, nicht leere Menge E_n. Aus jeder Färbung F_{n+1} von K_{n+1} ergibt sich sofort eine Färbung F_n von K_n, bei der nämlich jedes der Länder $L_1, L_2, \ldots, L_n$ dieselbe Farbe erhält, wie bei der Färbung F_{n+1} (da, wie gesagt, wir uns um die Farbe von M_n nicht kümmern). In diesem Falle setzen wir $F_n R F_{n+1}$. Vermöge der hier gegebenen Definitionen der Mengen E_n und der Relation R, erfüllen diese die Bedingungen des Lemmas A). Wendet man das Lemma an, so ergibt sich eine unendliche Folge $F_1, F_2, F_3, \ldots$ von Färbungen der Karten K_1, bzw. K_2, bzw. $K_3, \ldots$, die so beschaffen sind, dass jedes Land L_i bei allen diesen Färbungen F_k dieselbe Farbe erhält. D. h.: diese Folge ordnet jedem der Länder $L_1, L_2, L_3, \ldots$ eine bestimmte der p Farben zu. Die so erhaltene Färbung der unendlichen Karte entspricht unseren Forderungen, da ein Verstoss dagegen sich schon bei einer der endlichen Karten K_n zeigen müsste.

---

[5]) Wie ich nachträglich erfahre, ist der englische Mathematiker L. H. Thomas vor kurzem zum selben Resultate gelangt.

§ 4.

Setzt man voraus, dass die Menschheit niemals aussterben wird, so kann man mit Hilfe unseres Lemmas A) beweisen, dass wenigstens ein heute lebender Mensch existiert, der der Ahne einer *unendlichen Folge* von Nachkommen ist.

Es sei nämlich E_1 die Menge der heute lebenden Menschen; E_2 die Menge der Kinder der Elemente von E_1; E_3 die Menge der Kinder der Elemente von E_2; u. s. w. Laut der obigen Hypothese ist — wegen der Endlichkeit des Menschenlebens — keine der Mengen $E_1, E_2, E_3, \ldots$ leer. Da ein Mensch nur endlichviele Kinder haben kann, so folgt aus der Endlichkeit von E_1, dass sämtliche Mengen E_i endlich sind. Die Relation R definieren wir so, dass die Beziehung „xRy" das Folgende bedeuten soll: „y ist ein Kind von x." Vermöge der hier gegebenen Definitionen der Mengen E_i und der Relation R sind also die Bedingungen des Lemmas A) erfüllt. Wendet man das Lemma an, so ergibt sich eine *unendliche* Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von der Beschaffenheit, dass a_i ein Element von E_i und a_{i+1} ein Kind von a_i ist. Demnach ist a_1 ein heute lebender Mensch mit der verlangten Eigenschaft.

Durch eine ähnliche Überlegung kann man auch zeigen, dass aus der unendlichen Lebensdauer des menschlichen Geschlechtes auch die Existenz eines unendlichen *Manns*stammes gefolgert werden kann.

§ 5.

Die vierte Anwendung, die ich hier mitteilen will, verdanke ich JOHANN VON NEUMANN und bezieht sich auf eine Art von Spielen zu denen auch das Schachspiel gehört. Aus der „Theorie" der „Endspiele" und der „Schachprobleme" ist es dem praktischen Schachspieler bekannt, dass solche Positionen (sog. Gewinnstellungen) q existiren, in denen der eine Spieler (Weiss), der am Zuge ist, den Sieg erzwingen kann, wie auch sein Gegner (Schwarz) spielen mag. Ist q eine solche Gewinnstellung, so werden wir beweisen, dass es *eine von q abhängende Zahl N von der Beschaffenheit existiert, dass Weiss von dieser Position q aus spielend den Sieg in weniger als N Zügen erzwingen kann.*

Wir müssen zuerst genau definieren, was es bedeutet, dass Weiss in einer Position „den Sieg erzwingen kann", „auf Gewinn steht". Die Notwendigkeit und Möglichkeit einer genauen mathematischen Definition, welche jedes subjektive und psychologische Moment ausschaltet, hat ZERMELO in seinem geistreichen Cambridger Vortrag[6]) erkannt. Da jedoch ZERMELO nur die Bedeutung der Aussage: „der Sieg lässt sich *in höchstens r Zügen* erzwingen" festlegt, so soll die Definition, die wir zu Grunde legen wollen, hier ausführlich ausgesprochen werden.

Es sei q irgendeine Position, die durch einen Zug von Schwarz in irgendeiner regelrechten Partie entstehn kann (oder auch die Anfangsposition). Im Folgenden betrachten wir stets nur jenen Teil der Partien, welcher mit der Position q beginnt. — Eine endliche Folge $w_1, s_1, w_2, s_2, \ldots, w_n$ von Zügen, die den Schachregeln entsprechend von der Stellung q ausgehend abwechselnd von Weiss und Schwarz ausgeführt werden, heisse ein *Spielanfang*. Endigt er mit einer Mattposition (für Schwarz), so haben wir es mit einem beendeten Spiel zu tun. (Das „Patt" soll hier der Einfachheit halber ausser Acht gelassen werden.) Die Gesamtheit dieser Spielanfänge ist eine bestimmte von q abhängende Menge Q. Dass Weiss in der Position q auf Gewinn steht, bedeutet nun Folgendes. Es gibt eine Teilmenge R von Q mit folgenden drei Eigenschaften:

1) es gibt in R ein Element, welches aus einem einzigen Zug (von Weiss) besteht ($n = 1$);

2) ist $(w_1, s_1, w_2, s_2, \ldots, w_n)$ ein Element von R, durch welches die Position q' entsteht und ist s_n irgendein regelrechter Zug von Schwarz von dieser Position q' aus, so gibt es einen Zug w_{n+1} von Weiss derart, dass auch der Spielanfang $(w_1, s_1, \ldots, w_n, s_n, w_{n+1})$ ein Element von R ist[7]);

3) wenn ein (durch Matt) beendetes oder unendliches („remis") Spiel so beschaffen ist, dass die aus seinen (von der Position q aus gezählten) ersten $2n-1$ Zügen bestehenden Spielanfänge sämtlich (d. h. für $n = 1, 2, 3, \ldots$) zu R gehören, so endet das Spiel mit dem Siege von Weiss (kann also garnicht unendlich sein).

Durch die Angabe einer solchen Teilmenge R ist für Weiss in der Position q eine Weisung zum Spielen gegeben, nämlich die

[6]) „Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels." Proceedings of the fifth int. Congress of Mathematicians (Cambridge, 1912), Bd. II., S. 501.

[7]) hierin ist auch ausgesprochen, dass durch den Zug s_n Weiss nicht Matt gesetzt wurde; eine Mattposition von Weiss ist eben eine Position, von der aus überhaupt kein regelrechter Zug von Weiss existiert.

folgende: er soll so spielen, dass die Folge der ersten $2n-1$ Züge, die auf q folgen, für jedes n ein Element von R sei. Wegen 1) und 2) *kann* Weiss dieser Weisung stets folgen und 3) garantiert es, dass er siegen *wird*, wenn er dieser Weisung folgt.

[Folgende Bemerkung ist vielleicht nicht überflüssig. Wie Weiss in einer durch einen Zug von Schwarz entstandenen Position zu spielen hat, wenn er einer Menge R entsprechenden Weisung folgen will, hängt im Allgemeinen nicht nur von dieser Position, sondern vom ganzen vorangegangenen Spiele ab. Dass, falls eine Weisung im oberen Sinne existiert, stets auch eine solche existiert, bei der der auszuführende Zug von Weiss nur von der momentanen Position abhängt, ist *nicht* trivial; lässt sich jedoch graphentheoretisch beweisen, worauf wir aber hier nicht einzugehen brauchen].

Es sei q eine Gewinnstellung, zu der also eine Menge R mit den erwähnten drei Eigenschaften gehört. Wir wollen ein mit q beginnendes Spiel, welches der Bedingung in 3) entspricht, als „richtiges Spiel" bezeichnen. Laut 3) ist ein richtiges Spiel endlich und endet mit dem Siege von Weiss. Da Weiss durch ausschliesslich richtige Spiele den Sieg (von q aus) erzwingen kann, wird unser Ziel erreicht, wenn wir nun beweisen, dass die Anzahl der Züge in irgendeinem richtigen Spiele unter einer bestimmten (endlichen) Schranke bleibt.

Es sei E_n die Menge sämtlicher aus $2n-1$ Zügen bestehenden Elemente von R ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Da bei irgendeiner Position nach den Schachregeln nur endlichviele Züge möglich sind, sind die Mengen $E_1, E_2, E_3, \ldots$ sämtlich endliche Mengen. Wenn in einem richtigen Spiele der bis inclusive den n-ten Zug von Weiss reichender Spielanfang (von q aus gerechnet) mit a_n, der bis zum $n+1$-ten reichender mit a_{n+1} bezeichnet wird, so wollen wir $a_n R a_{n+1}$ setzen. Nehmen wir nun an, unsere Behauptung wäre falsch. Dies besagt, dass beliebig lange richtige Spiele existieren, dass also keine der Mengen $E_1, E_2, E_3, \ldots$ leer ist. Vermöge der hier gegebenen Definitionen der Mengen E_n und der Relation R, erfüllen diese die Bedingungen unseres Lemmas A). Wendet man das Lemma an, so ergibt sich eine unendliche Folge $a_1, a_2, a_3 \ldots$ von Spielanfängen (wo a_n aus $2n-1$ Zügen besteht), welche die aufeinander folgenden Spielanfänge eines richtigen Spieles geben. Dies ist aber unmöglich, da ein richtiges Spiel endlich ist.

Der hiermit beendete Beweis stützt sich wesentlich auf die Tatsache:

α) die Menge der Positionen, die nach dem n-ten Zug in irgendeinem Spiel entstehen können, ist endlich für jedes n.

Für das Schachspiel gilt sogar, da sowohl die Menge der Felder, wie die der Steine endlich ist:

β) die Menge aller möglichen Positionen ist endlich.

Der gegebene Beweis hat von dieser letzteren Tatsache keinen Gebrauch gemacht und so gilt er auch für Spiele, für die nur *α)* zutrifft, jedoch *β)* nicht.[8])

Die Behauptung: „ist in einer Position der Gewinn überhaupt zu erzwingen, so ist er auch in höchstens t Zügen, wo $t+1$ die (endliche) Anzahl der möglichen Positionen ist", wurde schon von Zermelo in seinem erwähnten Vortrag aufgestellt. Dieser Satz lässt sich jedoch kaum anders beweisen, als dass man früher überhaupt die Beschränktheit der Zugzahlen — d. h. die oben bewiesene Neumannsche Behauptung, mit der sich Zermelo nicht befasst — beweist. Denn die Überlegung von Zermelo in den Zeilen 1—4, S. 503, a a. O. ist nicht zwingend Es genügt ja nicht die Zugzahl eines einzigen Spieles unter $t+1$ herabzudrücken, sondern dies muss zugleich für sämtliche Spiele erreicht werden können und zwar so, dass nach dieser Reduktion die für R oben geforderten Eigenschaften 1), 2), 3) erhalten bleiben; und dies ernötigt — insbesondere für 2) — eine Überlegung, die keineswegs selbstverständlich ist. Auch kann man — wie noch beiläufig bemerkt werden soll — Weiss nicht die Weisung geben, dass falls dieselbe Position zweimal auftritt, er „beim ersten Erscheinen derselben ebenso weiterspielen soll, wie beim zweiten Male." Diese Forderung ist unerfüllbar, falls im kritischen Moment Schwarz am Zuge ist.

(*Eingegangen am 17. II. 1927*).

Z u s a t z a u f f o l g e n d e r S e i t e.

[8]) Ein solches Spiel würde z. B. entstehn, wenn man die endliche Steinezahl zwar beibehält, jedoch auf einen unendlichen Brett Schach spielen würde und etwa nur Züge von solcher „Länge" zulässt, die auf der gewöhnlichen Tafel von 64 Feldern möglich sind. Der gegebene Beweis gilt auch für dieses „unendliche" Schachspiel.

Zusatz zu § 5.

Nachdem ich die vorangehenden Untersuchungen Herrn Zermelo zukommen liess, hatte er die Freundlichkeit, den folgenden Beweis seines oben erwähnten Satzes über die Schranke t mir mitzuteilen.

Da die Gesamtheit aller Positionen endlich ist, so ist die Gesamtheit derjenigen Positionen, in denen Weiss am Zuge ist und von denen aus Weiss den Sieg in höchstens r Zügen, aber nicht in weniger Zügen, erzwingen kann, ebenfalls endlich. Diese endliche Anzahl sei m_r $(r = 1, 2, 3, \ldots)$. Aus demselben Grund muss die Summe $\Sigma m_r = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$, als die Anzahl verschiedener Positionen, endlich sein, d. h. mit einem Glied m_λ abbrechen; so dass $m_\lambda \geqq 1$, aber für $r > \lambda$ stets $m_r = 0$ wird (es ist klar, dass nicht sämtliche m_r verschwinden können). Es sei p eine Position, von der aus Weiss, mit dem Zuge w_1 beginnend, den Sieg in höchstens r Zügen, nicht aber in weniger Zügen erzwingen kann. Aus jedem der durch einen auf w_1 folgenden Zug von Schwarz entstehenden endlichvielen Positionen kann dann Weiss den Sieg in höchstens $r-1$ Zügen erzwingen. Unter diesen endlichvielen Positionen gibt es auch sicher eine, von der aus Weiss in weniger als $r-1$ Zügen den Sieg *nicht* erzwingen kann, da sonst Weiss von p aus in weniger als r Zügen den Sieg erzwingen könnte. Mit m_r ist also auch m_{r-1} von Null verschieden. Da also $m_\lambda \geqq 1$ ist, ist auch $m_{\lambda-1} \geqq 1$, also auch $m_{\lambda-2} \geqq 1$, u. s. w. bis $m_1 \geqq 1$. Hieraus folgt, dass die Anzahl sämtlicher Positionen mit Weiss am Zuge, von denen aus Weiss den Gewinn in einer begrenzten Anzahl von Zügen erzwingen kann

$$m = \Sigma m_r = m_1 + m_2 + \ldots + m_\lambda$$

grösser oder gleich λ ist. Andererseits ist natürlich m kleiner als die Anzahl t sämtlicher Positionen mit Weiss am Zuge. Also ist $\lambda < t$. Lässt sich also der Gewinn von einer Position aus in einer begrenzten Anzahl von Zügen erzwingen, so lässt er sich auch in weniger als t Zügen. Da aber — wie wir oben gezeigt haben — aus jeder Gewinnstellung der Sieg in einer begrenzten Anzahl von Zügen erreicht werden kann, so is in der Tat t eine universelle obere Schranke für die nötigen Zugzahlen bei irgendeiner Gewinnstellung.

Durch diesem Beweis[9]) hat Zermelo die oben erwähnte Lücke

[9]) Laut früheren mündlichen Mitteilungen des Herrn J. von Neumann war ihm ein auf derselben Grundidee beruhender Beweis bekannt.

in seiner Cambridger Darstellung vollkommen und zwar in elegantester Weise ausgefüllt.

Einer oben ausgesprochenen Vermutung entsprechend benutzt dieser Beweis den NEUMANNschen Satz über die Beschränktheit der Zugzahlen, den wir oben auf das Lemma A) zurückgeführt haben. Auch für diesen Beschränktheitssatz hat mir Herr ZERMELO einen Beweis mitgeteilt, der vom Lemma A) explizite keinen Gebrauch macht. Dieser ausserordentlich einfach formulierter Beweis soll — ebenfalls mit der Erlaubniss des Herrn ZERMELO — hier *wörtlich* mitgeteilt werden.[10])

„Es sei p_0 eine Position, in welcher Weiss am Zuge in *keiner begrenzten* Anzahl von Zügen das Mat erzwingen kann, sondern, je nach dem Spiel des Gegners, vielleicht in unbegrenzt wachsender Anzahl. Dann wird auf *jedem* Zug von Weiss der Schwarze eine Position p_1 herbeiführen können, welche von der *gleichen* Beschaffenheit ist. Denn sonst würde, da die Zahl der möglichen Züge endlich ist, Weiss auch von p_0 aus mit begrenzter Zugzahl zum Ziele kommen. Somit wird, wie Weiss auch spielt, bei richtigem Gegenspiel eine unbegrenzte Folge $p_0, p_1, p_2, \ldots$ von Positionen (mit Weiss am Zuge) entstehen, welche *sämtlich* die Beschaffenheit p_0 haben, also niemals zum Mat führen können. Ist also in einer Position p_0 der Sieg *überhaupt* zu erzwingen, so auch in einer begrenzten Zugzahl."

Zu diesem Beweis will ich nur folgende Bemerkung hinzufügen. Wenn man diesen Beweis ganz ausführlich darstellt und bis auf die oben gegebene Definition der „Gewinnstellung" zurückführt, ersieht man, dass er mit dem oben (§ 5) gegebenen übereinstimmt, nur dass er auch den oben (§ 1) gegebenen Beweis des Lemmas A) mitenthält. — Wenn auch die Formulierung des Beweises hierdurch länger wird, scheint mir ein Beweis, der den Beweis des Lemmas A) von den übrigen Überlegungen lostrennt, klarer den logischen Inhalt hervortreten zu lassen. Und zwar gilt dies nicht nur für die Anwendung auf die Theorie der Spiele, sondern auf jede Überlegung (wie die in § 2, 3 oder 4), welche im Wesentlichen auf dem Lemma A) basiert. Die Sache steht hier ähnlich, wie bei vielen Beweisen der Analysis und der Geometrie, wo durch die Isolierung des implizite angewandten BORELschen Überdeckungssatzes die Überlegungen durchsichtiger werden.

---

[10]) Herr ZERMELO beabsichtigt seine Untersuchungen über die Schach-Theorie demnächst in zusammenhängender Darstellung erscheinen lassen.

(*Hinzugefügt am 14. III. 1927.*)