Sur l'aire des surfaces $z=f(x,y)$.

Par S. Saks à Varsovie (Pologne).

1. En complétant et précisant en certains points les recherches récentes de M. Tonelli[1]) sur la quadrature des surfaces, M. Radó[2]) a prouvé que l'aire d'une surface continue quelconque, donnée sous la forme $z=f(x,y)$, peut être toujours déterminée comme limite de certaines expressions d'une nature assez simple, considérées déjà par le regretté géomètre hongrois Zoárd de Geöcze. Le résultat de M. Radó gagne encore d'intérêt si l'on l'énonce en termes de la théorie générale des fonctions d'intervalle.

2. Pour la commodité du lecteur, je vais rappeler brièvement quelques notions et théorèmes de cette théorie.[3])

$g(R)$ étant une fonction du rectangle R (on sousentendra toujours que les côtés des rectangles sont parallèles aux axes des coordonnées), on désigne par $\overline{g}(p)=\overline{g}(x,y)$, resp. $\underline{g}(p)=\underline{g}(x,y)$, en un point $p=(x,y)$, les deux limites d'indétermination, supérieure et inférieure, du quotient $g(K):m(K)$, K désignant un carré quelconque contenant le point p et tendant vers zéro. La fonction $g(R)$ est *dérivable* au point p, lorsque $\overline{g}(p)=\underline{g}(p)$; on écrit alors $\overline{g}(p)=\underline{g}(p)=g'(p)=g'(x,y)$, $g'(p)$ s'appelant la *dérivée* de $g(R)$ en p.

[1]) L. Tonelli, *C. R.* 1926, t. 182, p. 1198; *Rend. Acad. Linc.* 1926, vol. III, 6e Série, 1o sem., fasc. 7, 8, 11.

[2]) T. Radó, *C. R.* 1926, t. 183, p. 588; Sur le calcul de l'aire des surfaces courbes, *Fund. Math.*, t. X, pp. 197—210. (*Voir* aussi l'article précédent.)

[3]) Voir: S. Saks, Sur les fonctions d'intervalle, *Fund. Math.*, t. X, pp. 211—224., où les notions rappelées dans le texte sont traitées sous un aspect plus général; aussi: St. Banach, Sur une classe de fonctions d'ensemble, *Fund. Math.*, t. VI, pp. 170—188.

La fonction $g(R)$ est *intégrable* (Burkill) dans un rectangle R^0, lorsque $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ étant une subdivision quelconque de R^0 en un nombre fini de rectangles n'empiétant pas, la somme $\sum_{k=1}^{n} g(R_k)$ tend vers une limite finie et unique, lorsque les diamètres des R_k tendent uniformément vers zéro. Cette limite est appelée *l'intégrale* de $g(R)$ dans R^0 et se désigne par $\int_{R^0} g(R)$.

L'intégrale $G(R)=\int_R g(R)$ d'une fonction intégrable est encore une fonction d'intervalle, évidemment *additive*.

Une fonction $g(R)$ est *absolument continue* lorsque pour chaque système d'intervalles $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ n'empiétant pas, la somme $\sum_{k=1}^{n} g(R_k)$ tend vers zéro avec $m\left(\sum_{k=1}^{n} R_k\right)$.

Lorsqu'une fonction intégrable $g(R)$ est absolument continue, son intégrale l'est aussi.

Lorsqu'une fonction $g(R)$ est intégrable et $G(R)$ est son intégrale, on a en presque tout point p:

$$\overline{g}(p)=\overline{G}(p), \ \underline{g}(p)=\underline{G}(p);$$

en particulier, lorsque l'une des deux fonctions $g(R)$, $G(R)$ est presque partout dérivable, il en est de même de l'autre et l'on a presque partout: $g'(p)=G'(p)$.

3. Soit maintenant $z=f(x, y)$ une fonction continue dans le carré $K_0=(0, 0;\ 1, 1)$. Posons, en modifiant légèrement les notations de M. Radó, pour chaque rectangle $R=(x', y';\ x'', y'')$ contenu dans K_0:

$$\alpha(R; f)=\int_{x'}^{x''} |f(x, y'')-f(x, y')|\, dx, \quad \beta(R; f)=\int_{y'}^{y''} |f(x'', y)-f(x', y)|\, dy$$

$$\sigma(R; f)=\sqrt{\alpha^2(R; f)+\beta^2(R; f)+m^2(R)}.$$

Les trois fonctions ainsi déterminées sont non-négatives. L'intégrabilité de σ équivaut à l'intégrabilité simultanée de α et de β. D'autre part, l'intégrabilité de la fonction $\alpha(R; f)$ équivaut à la condition que $f(x, y)$ soit, sur presque chaque droite $x=const.$, à variation bornée (relativement à y) et que l'intégrale $\int_0^1 V_{(y)}(x, 1)\, dx$[4],

[4]) Notation de M. Tonelli (l. c. [1])): $V_{(y)}(\xi, \eta)$ désigne la variation totale dans l'intervalle $(0, \eta)$ de $f(\xi, y)$ considérée comme fonction de la seule variable y; le sens analogue est attribué au symbole $V_{(x)}(\xi, \eta)$.

soit finie; on a aussi

$$\int_R \alpha(R;f) = \alpha(R; V_{(y)}).$$

Les relations analogues subsistent évidemment pour $\beta(R;f)$. L'intégrabilité de $\sigma(R;f)$ équivaut ainsi à la condition que la fonction $f(x,y)$ soit *à variation bornée* au sens de M. Tonelli. Donc[5]: *pour qu'une surface continue* $z=f(x,y)$, *définie dans le carré* K_0, *admette une aire finie* (au sens de Lebesgue), *il faut et il suffit que la fonction de rectangle* $\sigma(R;f)$ *soit intégrable dans* K_0. Dans la suite, nous considérons le cas où l'aire est finie. Le théorème mentionné plus haut de M. Radó s'énonce alors: *l'aire de la surface est égale à* $\int_{K_0} \sigma(R;f)$.

4. Le but de la note présente est de prouver une relation élémentaire, rentrant dans le même ordre d'idées et que j'ai signalée déjà dans une note des *C. R.* (t. 183, p. 850); notamment, que $z=f(x,y)$ *étant une surface continue à l'aire finie, on a en presque tout point* (x,y)

$$\lim \left[\frac{S(K)}{m(K)}\right]^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2,$$

K *désignant un carré quelconque contenant le point* (x,y) *et tendant vers zéro, et* $S(K)$ *l'aire de la partie correspondante de la surface.* Les considérations qui vont suivre ne s'appuient d'ailleurs que sur le théorème mentionné de M. Radó et les propositions rappelées au § 2. Il s'en suivra aussi immédiatement la relation suivante, établie par M. Tonelli:

$$S \geqq \iint_R \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2} dx\,dy,$$

le signe d'égalité ayant lieu dans le seul cas où $f(x,y)$ est absolument continue an sens de cet auteur.

5. Théorème 1. 1°. $z=f(x,y)$ *étant une fonction continue dans le carré* $K_0=(0,0;\ 1,1)$ *et telle que la fonction de rectangle correspondante* $\alpha(R;f)$ *soit intégrable, on a en presque tout point* (x,y):

$$\alpha'(x,y;f) = \alpha'(x,y;V_{(y)}) = \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|; \tag{1}$$

2°. *la fonction* $\alpha(R;f)$ *est absolument continue dans le seul*

---

5) Tonelli, l. c. 1).

cas où la fonction $f(x,y)$ est absolument continue par rapport à y sur presque chaque droite $x=const.$

Démonstration. Je vais d'abord étudier la fonction $\alpha(R; V_{(y)})$ qu'on désignera pour abréger par $\alpha_*(R)$. $\alpha_*(R)$ est évidemment une fonction additive et non-négative. Elle admet donc presque partout une dérivée finie $\alpha'_*(x,y)$ et on a, pour chaque rectangle $R=(x',y';x'',y'')$,

$$(2)\qquad \alpha_*(R)=\int_{x'}^{x''}[V_{(y)}(x,y'')-V_{(y)}(x,y')]\,dx \geqq \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\alpha'_*(x,y)\,dx\,dy.$$

Fixons, pour un instant, les valeurs y', y''. En considérant les deux côtés de l'inégalité, équivalente à (2),

$$(2^{\text{bis}})\qquad \int_{x'}^{x''}[V_{(y)}(x,y'')-V_{(y)}(x,y')]\,dx \geqq \int_{x'}^{x''}\left[\int_{y'}^{y''}\alpha'_*\,dy\right]dx,$$

comme des fonctions de l'intervalle linéaire (x',x''), il s'ensuit, en vertu d'un théorème connu de Lebesgue, pour presque toute valeur de x:

$$(3)\qquad V_{(y)}(x,y'')-V_{(y)}(x,y') \geqq \int_{y'}^{y''}\alpha'_*\,dy.$$

L'ensemble (nécessairement de mesure nulle) des valeurs de x où (3) ne tient pas, dépend, en général, du couple (y',y'') et on désignera cet ensemble, par conséquent, par $E(y',y'')$. Posons maintenant

$$E=\sum_{y',y''}E(y',y''),$$

la sommation n'étant étendue qu'aux couples (y',y'') de nombres *rationnels*. E est donc encore de mesure nulle et on peut affirmer que (3) subsiste pour chaque couple de nombres rationnels (y',y'') et pour chaque x n'appartenant pas à l'ensemble E de mesure nulle. Par suite, pour chaque x n'appartenant pas à l'ensemble E, l'inégalité

$$(4)\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=\frac{\partial V_{(y)}}{\partial y}\geqq \alpha'_*(x,y)$$

a lieu pour presque chaque y. Or, tous les ensembles traîtés ici étant, comme on le vérifie aisément, mesurables,[6]) il s'ensuit que (4) a lieu sur une pleine épaisseur du carré considéré.

[6]) La mesurabilité (superficielle) de $\frac{\partial f}{\partial y}$ s'ensuit facilement p. ex. de la continuité de $f(x;y)$; l'existence et la sommabilité (superficielle) de $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont des conséquences de l'intégrabilité de $\alpha(R;f)$ qui entraîne (§ 3) la sommabilité de $V_{(y)}(x,1)$.

Pour passer encore de l'inégalité (4) à l'égalité, il suffit de remarquer qu'on a pour chaque rectangle $R=(x',y';\ x'',y'')$:

$$\alpha_*(R)=\int_{x'}^{x''}[V_{(y)}(x,y'')-V_{(y)}(x,y')]\,dx \geqq \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| dx\,dy,$$

d'où il résulte évidemment que presque partout dans K_0:

$$\alpha'_*(x,y)\geqq\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|.$$

Donc, en raison de (4)

$$\alpha'_*(x,y)=\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|. \tag{5}$$

Remarquons ensuite (§ 3), que $\alpha(R;\ V_{(y)})$ est une intégrale de la fonction $\alpha(R;f)$ et que par conséquent (§ 2) on a presque partout:

$$\alpha'(x,y;f)=\alpha'(x,y;\ V_{(y)})=\alpha'_*(x,y)=\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|.$$

La relation (1) se trouve donc prouvée complètement.[7])

2^0. Pour prouver encore la seconde partie de notre proposition, supposons d'abord que $f(x,y)$ soit une fonction absolument continue de y pour presque chaque x On a alors:

$$\alpha(R;f)=\int_{x'}^{x''}|f(x,y'')-f(x,y')|\,dx=$$

$$=\int_{x'}^{x''}\left|\int_{y'}^{y''}\frac{\partial f}{\partial y}dy\right|dx\leqq\int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|dx\,dy$$

et $\alpha(R;f)$ est par conséquent une fonction de rectangle absolument continue. Inversement, si $\alpha(R;f)$ est une telle fonction, son intégrale $\alpha_*(R)=\alpha(R;\ V_{(y)})$ l'est aussi (§ 2) et — les relations (2), (2^{bis}), (3) se transformant alors en des égalités — il s'en suit que $V_{(y)}$, et par conséquent $f(x,y)$, sont, pour presque chaque x, des fonctions absolument continues de y.

On déduit aussitôt du théorème précédent l'énoncé suivant dont la seconde partie constitue le résultat mentionné plus haut de M Tonelli:

Théorème 2. *Si la surface continue $z=f(x,y)$ admet dans le carré K_0 une aire finie, on a en presque tout point (x,y) de ce carré:*

---

[7]) On peut d'ailleurs démontrer l'égalité $\alpha'(x,y;f)=\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|$ directement, sans faire recours au théorème du § 2.

$$S'(x,y)=\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2};$$

d'où, pour chaque rectangle R contenu dans K_0:

$$S(R)\geqq\iint\limits_R\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}dx\,dy,$$

le signe d'égalité ayant lieu dans le seul cas où $f(x,y)$ est absolument continue.[8])

D é m o n s t r a t i o n. $S(R)$ étant (§ 3) l'intégrale de la fonction intégrable $\sigma(R)$, elle est une fonction de rectangle non-négative et additive; elle possède donc en presque tout point de K_0 une dérivée $S'(x,y)$ et l'on a, pour chaque rectangle R contenu dans K_0:

$$S(R)\geqq\iint\limits_R S'(x,y)\,dx\,dy. \tag{6}$$

D'autre part, en tenant compte du théorème précédent, ainsi que du théorème mentionné au § 2, on a presque partout:

$$S'(x,y)=\sigma'(x,y)=\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}.$$

L'inégalité (6) s'écrit donc:

$$S(R)\geqq\iint\limits_R\left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}dx\,dy.$$

Le signe d'égalité dans cette relation (ou, ce qui revient au même, dans (5)) n'a lieu que dans le cas où $S(R)$ est une fonction absolument continue de rectangle, ou bien, lorsque (§ 2) la fonction $\sigma(R)\leqq S(R)$ est aussi une telle fonction. Or, on a pour tout rectangle R:

$$\alpha(R),\ \beta(R)\leqq\sigma(R)\leqq\alpha(R)+\beta(R)+m(R),$$

ce qui montre que la continuité absolue de $\sigma(R)$, donc celle de $S(R)$, équivaut à la continuité absolue de $\alpha(R)$ et $\beta(R)$ à la fois, donc, en raison de la 2^0 partie du théorème précédent, à la continuité absolue de $f(x,y)$ au sens de M. Tonelli.

6. Je veux profiter encore de cette occasion pour remarquer que le théorème de M. Radó permet d'établir immédiatement, pour les surfaces continues $z=f(x,y)$, l'équivalence de la notion de l'aire considérée récemment par M. Banach[9]) avec celle de M. Lebesgue.

[8]) La fonction $f(x,y)$ est appelée par M. Tonelli (l. c. [1])) *absolument continue* lorsqu'elle l'est (au sens de la théorie des fonctions d'une seule variable) sur presque chaque droite parallèle aux axes des coordonnées.

[9]) Banach, Sur les lignes rectifiables etc. *Fund. Math.* t. VII, 1925.

Désignons, dans ce but, pour chaque rectangle R contenu dans le carré K_0 (où la tonction donnée est définie), par R_x resp. R_y les ensembles de points $(x, z = f(x, y))$ resp. $(y, z = f(x, y))$ correspondants aux point (x, y) du rectangle R. Posons ensuite:

$$\sigma_{**}(R) = [m^2(R_x) + m^2(R_y) + m^2(R)]^{1/2}.$$

La définition de Banach s'exprime alors de la manière suivante: *la surface $z = f(x. y)$ est quarrable si la fonction correspondante $\sigma_{**}(R)$ est intégrable; l'intégrale de cette fonction est égale, par définition, à l'aire de la surface envisagée.*

Attribuons, d'autre part, aux symboles $\alpha(f; R) = \alpha(R), \beta(R), \sigma(R)$ le sens établi dans le § 3, et posons encore (comme dans la démonstration du th. 1):

$$\alpha_*(R) = \alpha(R; V_{(y)}),\ \beta_*(R) = \beta(R; V_{(x)}),$$
$$\sigma_*(R) = [\alpha_*^2(R) + \beta_*^2(R) + m^2(R)]^{1/2}.$$

On voit de suite que:

$$(1) \qquad \sigma(R) \leqq \sigma_{**}(R) \leqq \sigma_*(R),$$

pour chaque rectangle R contenu dans K_0.

Or, d'après les résultats (§ 3) de MM. Tonelli et Radó, l'intégrabilité de chacune des fonctions $\sigma(R)$, $\sigma_*(R)$ équivaut à la condition que $z = f(x, y)$ admette une aire finie (au sens de Lebesgue) et l'on a:

$$S(K_0) = \int_{K_0} \sigma(R) = \int_{K_0} \sigma_*(R).$$

Il s'ensuit donc de (1) que l'intégrabilité de $\sigma_{**}(R)$ équivaut à la même condition, et qu'on a aussi:

$$S(K_0) = \int_{K_0} \sigma_{**}(K_0).$$

Cette relation exprime précisément l'équivalence en question.

(*Reçu le 27. mars 1927*).