Über Funktionenmengen.

Von PAUL VERESS (Budapest).

Herr FRÉCHET hat in seiner Thèse,[1]) in welcher er den Begriff der kompakten Menge einführt, auch eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Kompaktheit angegeben.[2]) Zweck der vorliegenden Arbeit ist, aus diesem allgemeinen Kriterium notwendige und hinreichende Bedingungen für die Kompaktheit von *Funktionenmengen* abzuleiten. Das sind wohl diejenigen Mengen, die für die Anwendungen am wichtigsten sind. Für diese Mengen ist auch die Kompaktheit auf verschiedene Arten zu definieren, je nach der zu Grunde gelegten Definition der Konvergenz. Von den so erhaltenen möglichen Fällen ist meines Wissens bisher nur ein einziger Fall vollständig erledigt.[3]) In dieser Arbeit werden nun alle diese Fälle systematisch behandelt, dazu wird auch (in § 1.) der erwähnte FRÉCHETsche Satz in etwas abgeänderter Form und wohl auch unter etwas allgemeineren Bedingungen abgeleitet.

§ 1. Kompakte Mengen in einem Fréchetschen Raum.

Wir betrachten eine Menge von beliebigen, aber unendlich vielen Elementen und nehmen an, dass zu jedem Paar von Elementen P, Q eine nicht negative Zahl $\overline{PQ}$ als ihre *Entfernung*

---

[1]) *Rendiconti di Palermo* XXII, 1906.

[2]) l. c. p. 25.

[3]) C. ARZELÀ, Sulle funzioni di linee, *Memorie d. R. Acad. d. Scienze di Bologna*, Serie 5, Bd. 1895. — Vgl. jedoch auch eine nach Fertigstellung dieser Arbeit erschienene Note des Herrn FRÉCHET (*Fundamenta Math.* IX), die anschliessend an meine Untersuchung (ebenda Bd. VII) den hier im § 5 behandelten Fall untersucht. — Ich erhielt von Herrn FRÉCHET, dem ich die Resultate meiner Untersuchungen mitteilte, nicht nur einige Litteraturangaben, sondern auch nützliche sachliche Bemerkungen, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen Dank aussprechen möchte.

zugeordnet werden kann. Die Entfernung soll noch folgenden Bedingungen genügen:

1) $$\overline{PP} = 0,$$

2) $$\overline{PQ} = \overline{QP} > 0,$$

wenn P und Q verschieden sind.

Durch das Ausschliessen des Gleichheitszeichens kehren wir hier 1) um, nämlich wir betrachten als identisch solche Elemente, deren Entfernung Null ist.

3) $$\overline{PQ} + \overline{QR} \geqq \overline{PR}.$$

Eine unendliche Menge, in der eine diesen Bedingungen genügende Entfernungsdefinition eingeführt ist, nennen wir einen FRÉCHETschen Raum D, kurz Raum D *(Distanzraum)*.

Eine Folge von Elementen $P_1, P_2, P_3, \dots$ des Raumes wird *konvergent* genannt, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so dass

$$\overline{P_\mu P_\nu} < \varepsilon$$

ist für $\mu > N$, $\nu > N$. Dank der Dreieckseigenschaft 3) ist dies gleichbedeutend mit der Existenz einer Zahl n, so dass $\overline{P_n P_{n+p}} < \varepsilon$ ist, $p = 1, 2, 3, \dots$

Zu dieser Definition der Konvergenz bemerke ich, dass sie sich mit dem üblichen Konvergenzbegriff nur dann deckt, wenn aus $\overline{P_n P_{n+p}} \to 0$ die Existenz eines Elementes P folgt, für das $\lim \overline{PP_n} = 0$ gilt. In diesem Falle wird der Raum *vollständig* genannt. Jeder Raum D kann aber durch Einführung von uneigentlichen Elementen (entsprechend der Einführung der irrationalen Zahlen) zu einem vollständigen Raum erweitert werden, worauf ich hier nicht näher eingehen will. In den zu behandelnden einzelnen Fällen werden wir immer zeigen, dass die Grenzelemente der konvergenten Folgen im betrachteten Raume existieren.

Eine Menge A von Elementen des Raumes wird *kompakt* genannt, wenn jede unendliche Untermenge von A eine konvergente Teilfolge enthält.[4])

Eine konvergente Folge bildet eine kompakte Menge. Es gibt aber auch nicht abzählbare kompakte Mengen, z. B. im Euklidi-

[4]) Eine endliche Menge wird also als kompakt betrachtet. Über die Benennungen vergleiche auch M. FRECHET, Sur la terminologie de la théorie des ensembles abstraits, *Comptes rendus du Congrès des Sociétés savantes en 1924. Sciences.*

schen linearen Raum ein beschränktes Intervall, wenn man die gewöhnliche Entfernungsdefinition zu Grunde legt. Beispiele für nicht kompakte Mengen sind: im selben Raum eine nicht beschränkte Punktmenge, oder im Raume der für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ definierten stetigen Funktionen unter Zugrundelegung der Entfernungsdefinition:

$$\overline{f, \varphi} = \operatorname{Max} |f(x) - \varphi(x)|,$$

die abzählbare gleichmässig beschränkte Menge:

$$f_1(x) = \sin x, \ldots, f_n(x) = \sin nx, \ldots$$

Aus der Definition der kompakten Menge folgt unmittelbar:

Jede Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.

Die Vereinigungsmenge endlich vieler kompakter Mengen ist kompakt. Wir behaupten weiter:

Ist eine Menge A des Raumes D kompakt, so lässt sich zu jeder positiven Zahl ε eine endliche Anzahl von Elementen B_1, $B_2, \ldots, B_n$ aus der Menge so herausgreifen, dass jedes Element P von A für ein geeignetes i aus $1, 2, \ldots, n$ die Bedingung

$$\overline{B_i P} < \varepsilon$$

erfüllt.

Die Folge $B_1, B_2, \ldots, B_n$ nennen wir eine zu ε gehörende *Basis* von A.

Diese Behauptung beweisen wir so. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben, P_1 irgendein Element von A. Entweder erfüllen alle übrigen Elemente von A die Bedingung:

$$\overline{PP_1} < \varepsilon$$

oder aber es gibt in der Menge ein P_2 so dass

$$\overline{P_1 P_2} \geqq \varepsilon$$

ist. Im ersten Falle ist P_1 selbst eine Basis. Im zweiten Falle ist entweder P_1, P_2 eine Basis, oder aber es gibt ein Element P_3 von der Eigenschaft:

$$\overline{P_1 P_3} \geqq \varepsilon, \quad \overline{P_2 P_3} \geqq \varepsilon.$$

Dieses Auswahlverfahren setzen wir nun so fort. Entweder bricht es nach endlich vielen, etwa n, Schritten ab, und dann ist $P_1, P_2, \ldots, P_n$ eine Basis, oder lässt es sich ins Unendliche fortsetzen, d. h. es kann aus der Menge A die Folge

$$1) \qquad P_1, P_2, P_3, \ldots$$

mit den Eigenschaften

$$2) \qquad \overline{P_i P_k} \geqq \varepsilon, \quad (i \neq k)$$

herausgewählt werden. Ist aber die Menge A kompakt, so kann dieser zweite Fall nicht eintreten, denn die unendliche Folge könnte wegen (2) keine konvergente Teilfolge enthalten.

Damit ist die Behauptung bewiesen. Dieselbe ist aber auch umkehrbar. In der Tat, nehmen wir an, dass die Menge A für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Basis besitzt. U sei eine beliebige, unendliche Untermenge von A; wir haben zu zeigen, dass sie eine konvergente Folge enthält.

Es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ eine gegen Null konvergierende Folge von positiven Zahlen. Entsprechend der Voraussetzung gehört zu jedem ε_i eine Basis $B_1^{(i)}, B_2^{(i)}, \ldots, B_{n_i}^{(i)}$. Jedes Element P von U steht zu einem geeigneten $B_k^{(1)}$ in der Beziehung:

3) $$\overline{PB_k^{(1)}} < \varepsilon_1.$$

Da U unendlich viele Elemente hat und die Basis nur endlich ist, muss es entsprechend dem Schachtelprinzip mindestens ein $B_k^{(i)}$ geben, mit dem unendlich viele Elemente: $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, P_3^{(1)}, \ldots$ in der Beziehung 3) stehen.

Diese Elemente erfüllen auf Grund der Dreieckseigenschaft die Ungleichung: $\overline{P_i^{(1)}P_k^{(1)}} < 2\varepsilon_1$.

In der Folge $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, P_3^{(1)}, \ldots$ gibt es wieder unendlich viele, die mit demselben $B_{k'}^{(2)}$ die Ungleichung:

$$\overline{P_i^{(2)}B_{k'}^{(2)}} < \varepsilon_2$$

erfüllen, für die Elemente dieser Folge gilt also:

$$\overline{P_i^{(2)}P_k^{(2)}} < 2\varepsilon_2.$$

Man setze dieses Verfahren fort. Die Folge $P_1^{(1)}, P_2^{(2)}, \ldots, P_n^{(n)}, \ldots$ ist konvergent, da ja

$$\overline{P_n^{(n)}P_{n+k}^{(n+k)}} < 2\varepsilon_n \text{ ist } (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Daraus ergibt sich also der

Satz I. *Für die Kompaktheit der Menge A von Elementen eines Raumes D ist notwendig und hinreichend die Existenz einer endlichen Basis für jede positive Zahl ε.*

Diesen Satz können wir etwas roh aber sehr anschaulich so aussprechen: Abgesehen von einer Abweichung kleiner als ε, besitzt jede kompakte Menge nur endlich viele Elemente.

§ 2. A-kompakte Funktionenmengen.

Für unseren Raum wählen wir jetzt den Raum der in $a \leqq x \leqq b$ definierten stetigen Funktionen. Die Entfernung zweier Elemente f und g dieses Raumes definieren wir durch:

$$\overline{f, g} = \operatorname*{Max}_{a \leqq x \leqq b} |f(x) - g(x)|.$$

Die Konvergenz einer Folge bedeutet also gleichmässige Konvergenz im üblichen Sinne, eine in diesem Sinne kompakte Funktionenmenge hat also die Eigenschaft, dass jede ihrer unendlichen Untermengen mindestens eine gleichmässig konvergente Folge enthält. Solche Funktionenmengen nennen wir kompakt im Sinne A, oder kurz A-kompakt.

Dem Satz I entsprechend ist dafür, dass eine Menge dieses Raumes A-kompakt sei, notwendig und hinreichend, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ die Basis $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ existiere so, dass jedes f der Menge mit einem geeigneten φ_i in der Beziehung

$$\operatorname{Max} |f(x) - \varphi_i(x)| < \varepsilon$$

stehe. Daraus sieht man sofort, dass eine A-kompakte Funktionenmenge gleichmässig beschränkt ist; als gemeinsame Schranke gilt $M + \varepsilon$, wenn M die grösste der Schranken M_i von φ_i bezeichnet. Dies ist also die erste notwendige Bedingung; eine zweite erhält man durch folgende Überlegung:

Die Elemente dieses Raumes sind alle gleichmässig stetige Funktionen. Es sei A eine kompakte Menge in diesem Raume, ε eine beliebige positive Zahl und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ die zu $\frac{\varepsilon}{3}$ gehörende Basis der Menge. Zu $\frac{\varepsilon}{3}$ gehört für die Funktion φ_i eine Zahl $\delta_i > 0$ so, dass falls $|x - y| < \delta_i$ ist,

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ ausfällt.}$$

Dies folgt aus der gleichmässigen Stetigkeit von φ_i Die kleinste der Zahlen $\delta_1, \ldots, \delta_n$ werde mit δ bezeichnet. Wegen

$$|f(x) - \varphi_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad a \leqq x \leqq b$$

und

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |x - y| < \delta$$

gilt dann

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \text{ wenn } |x - y| < \delta,$$

für jede Funktion f der Menge A.

Wir können also sagen: die Funktionen der kompakten Menge A sind *gleichartig gleichmässig stetig,* d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gehört für alle Funktionen der Menge ein gemeinsames Stetigkeitsintervall δ.

Diese beiden notwendigen Bedingungen sind zusammen auch hinreichend für die Kompaktheit im Sinne A Nehmen wir an, dass die Funktionen einer Menge A gleichmässig beschränkt und gleichmässig stetig sind. Die Schranke der Funktionen sei M, zu $\varepsilon > 0$ gehöre δ als gemeinsames Stetigkeitsintervall. Man teile das rechtwinklige Viereck:

$$-M \leqq y \leqq M, \quad a \leqq x \leqq b$$

mit einem rechtwinkligen Netze in endlich viele, kleine Vierecke so ein, dass die Höhen der neuen Vierecke kleiner als $\frac{\varepsilon}{4}$, die Längen $< \delta$ werden. In diesem Netz verbinde man auf alle mögliche Arten die Eckpunkte der Vierecke; man erhält endlich viele solche gebrochene gerade Linien, die von der Geraden $y = a$ bis zur Geraden $y = b$ durchlaufen, also stetige Funktionen von x darstellen. Diese streckenweise linearen Funktionen mögen durch $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ bezeichnet werden; sie haben schon die Eigenschaft, dass jede Funktion f der Menge A durch eine von ihnen mit der Genauigkeit $\frac{\varepsilon}{2}$ repräsentiert wird. Anstatt jedem ψ_i nehme man nun irgendeine der von ihm bis auf $\frac{\varepsilon}{2}$ dargestellten Funktionen von A; diese Funktion sei φ_i. Diejenigen ψ_k, die kein entsprechendes φ_k haben, werden einfach weggelassen. Die so erhaltenen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ bilden eine zu ε gehörende Basis von A. Aus der Existenz der Basis folgt wiederum die Kompaktheit der Menge.

Mithin haben wir folgenden Satz von Arzelà:

Damit eine Menge von in $a \leqq x \leqq b$ stetigen Funktionen A-kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, dass die Funktionen

1. *gleichmässig beschränkt,*
2. *gleichartig gleichmässig stetig seien.*

Nun legen wir den Raum der auf der messbaren Menge H messbaren Funktionen zu Grunde, behalten aber die obige Entfernungsdefinition, genauer als Entfernung von f und g bezeichnen wir die obere Grenze von $|f-g|$, wenn x alle Punkte von H durchläuft. Ist f eine beschränkte Funktion dieses Raumes, so sind die Mengen e_k der Punkte, in denen

$$-M + k\varepsilon \leqq f \leqq -M + (k+1)\varepsilon$$

ist, alle messbar.

Auf jeder der Mengen e_k ist die Variation von f, das ist die absolut genommene Differenz der oberen und unteren Grenze von f auf e_k kleiner als ε:

$$V_f(e_k) < \varepsilon.$$

Die Grundmenge H lässt sich also in endlich viele punktfremde messbare Teilmengen einteilen:

$$H = e_1 + e_2 + \ldots + e_n,$$

so dass

$$V_f(e_k) < \varepsilon$$

ist auf jeder der Mengen e_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Es sei K eine kompakte Menge von messbaren Funktionen, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ die zu $\varepsilon > 0$ gehörige Basis. Man bilde die zu ε gehörenden Einteilungen für alle φ_i:

$$H = e_1^{(i)} + e_2^{(i)} + \ldots + e_{\lambda_i}^{(i)},$$

so dass also $\quad V_{\varphi_i}(e_k^{(i)}) < \varepsilon \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, \lambda_i \end{pmatrix}.$

Wir bilden nun den Durchschnitt aller Kombinationen von diesen Mengen

$$e_{i_1}^{(1)} e_{i_2}^{(2)} \ldots e_{i_n}^{(n)}$$

und die Einteilung:

$$H = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} e_{i_1}^{(1)} \ldots e_{i_n}^{(n)}.$$

Ist e_k^* eine Menge dieser Einteilung, so gilt:

$$V_{\varphi_i}(e_k^*) < \varepsilon \text{ für jedes } i = 1, 2, \ldots, n,$$

und wegen

$$|f - \varphi_i| < \varepsilon,$$

gilt auch für jedes f:

$$V_f(e_k^*) < 3\varepsilon.$$

Für alle Funktionen der kompakten Menge gibt es also zu jedem ε eine gemeinsame Einteilung $H = \sum_{k=1}^{m} e_k$ so, dass:

$$V_f(e_k) < \varepsilon$$

für alle f und alle $k = 1, 2, \ldots, m$ ist.

Mit Hinzunahme der Beschränktheit gilt auch das Umgekehrte. Dies sieht man ein, indem man alle *Treppenfunktionen* bildet die in den Punkten der Menge e_i alle möglichen Werte $-M + k \cdot \varepsilon$ annehmen $\left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{2M}{\varepsilon}\right] + 1; i = 1, 2, \ldots, n\right)$. Aus diesen Treppenfunktionen erhält man eine zu ε gehörende Basis durch dasselbe Verfahren, welches für den Raum der stetigen Funktionen angegeben wurde.

Damit haben wir neben dem ARZELÀschen Satz den

Satz II. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Kompaktheit einer Menge von auf H messbaren Funktionen ist folgendes:*

1. *Die Funktionen der Menge sind gleichmässig beschränkt auf H.*
2. *zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Einteilung der Gundmenge H in punktfremde, messbare Teilmengen $H = \sum_{i=1}^{n} e_i$ so, dass für jede Funktion f aus der Menge und für jedes i die Ungleichung $V_f(e_i) < \varepsilon$ erfüllt ist.*[5]

§ 3. B-kompakte Funktionenmengen.

Wir betrachten nun eine Menge von messbaren Funktionen, die auf der Punktmenge H von positivem endlichem Mass definiert sind. Diese Funktionenmenge nennen wir B-kompakt, wenn jede ihrer unendlichen Untermengen eine fast überall (d. h. überall höchstens ausser einer Nullmenge) konvergierende Teilfolge enthält.

Zur Behandlung dieses Falles führen wir noch einen von Herrn F. RIESZ herrührenden Konvergenzbegriff ein.[6]

Eine Folge von messbaren Funktionen $f_1, f_2, f_3, \ldots$ konvergiert *dem Masse nach* gegen die messbare Funktion f auf H, wenn es zu jedem Zahlenpaar $\varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ ein Index n so gehört, dass

$$|f - f_\nu| < \varepsilon \text{ für } \nu > n$$

ist, höchstens ausser einer Telmenge von H deren Mass $< \alpha$ ist.

Konvergiert die Folge $f_1, f_2, f_3, \ldots$ fast überall, so konvergiert sie auch dem Masse nach.

Das sieht man so ein: konvergiert die Folge $f_1, f_2, f_3, \ldots$ in den Punkten von H ausser einer Nullmenge N, so ist der auf N beliebig definierte Limes der Folge eine ebenfalls messbare Funktion f. Zu jedem $\varepsilon > 0$ ist die Menge $P(n, \varepsilon)$ der Punkte, in denen

$$|f_n - f| > \varepsilon \text{ ist,}$$

messbar und da die Folge ausser N konvergiert, ist $\lim_{n \to \infty} P(n, \varepsilon) = N$

---

[5]) Vgl. auch P. VERESS, Über kompakte Funktionenmengen und BAIREsche Klassen, *Fund. Math.* Bd. VII.

[6]) F. RIESZ, Sur les suites de fonctions mesurables, *Comptes Rendus* 150, 1909. Ich bemerke, dass ich die Resultate dieses Paragraphen ursprünglich aus einem EGOROFFschen Satze (Sur les suites de fonctions mesurables, *C. R.* 152, 1911) herleitete; die hier angegebene Beweisanordnung wurde mir von Herrn F. RIESZ vorgeschlagen.

unabhängig von ε. Wir bezeichnen mit

$$S(n,\varepsilon)=\sum_{\nu=n}^{\infty} P(\nu,\varepsilon)$$

die Vereinigungsmenge aller $P(\nu,\varepsilon)$ von $\nu=n$ an. Es ist dann

$$S(n,\varepsilon)\supset S(n+1,\varepsilon)\supset S(n+2,\varepsilon)\supset\ldots$$

und $\lim\limits_{n\to\infty} S(n,\varepsilon)$ als der Durchschnitt aller Mengen $S(\nu,\varepsilon)$ von $\nu=n$ an, ist ebenfalls die Nullmenge N, d. h.:

$$m\left(\lim_{n\to\infty} S(n,\varepsilon)\right)=0,$$

daher:[7])

$$\lim_{n\to\infty} m\,S(n,\varepsilon)=0.$$

Zu vorgegebenem $\eta>0$ kann also n so gewählt werden, dass $m\,S(\nu,\varepsilon)<\eta$ beträgt, sobald $\nu\geqq n$ ist und das heisst eben, dass die Folge dem Masse nach konvergent ist.

Das Umgekehrte gilt nicht, aber man kann nach Herrn F. Riesz (l. c.) aus jeder dem Masse nach konvergenten Folge eine fast überall konvergente Teilfolge auswählen.

In der Tat sei $f_1, f_2, f_3, \ldots$ die dem Masse nach konvergente Folge und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon_\nu$ eine konvergente Reihe positiver monoton abnehmender Zahlen. Zu jedem ε_ν kann man eine Funktion f_ν^* so bestimmen, dass

$$|f-f_\nu^*|<\varepsilon_\nu$$

sei ausser einer Menge vom Masse $<\varepsilon_\nu$, und dass die Funktionen $f_1^*, f_2^*, \ldots$ verschiedene Funktionen der Folge $\{f_\nu\}$ seien. Diese Folge konvergiert fast überall; denn sie konvergiert gleichmässig ausser einer Menge, deren Mass beliebig klein ist. Denn sind zwei Zahlen $\varepsilon>0$ und $\alpha>0$ gegeben, so suche man die natürliche Zahl n, für welche

$$\varepsilon_n<\varepsilon \text{ und } \sum_{\nu=n}^{\infty}\varepsilon_\nu<\alpha \text{ ist,}$$

dann gilt für $\nu>n$

$$|f-f_\nu|<\varepsilon$$

ausser einer Menge, deren Mass $\leqq \sum\limits_{\nu=n}^{\infty}\varepsilon_\nu<\alpha$ ist.

Enthält also jede unendliche Untermenge einer Funktionenmenge eine dem Masse nach konvergente Teilfolge, so enthält sie

---

7) Vgl. C. Carathéodory: Vorlesungen über reelle Funktionen, Berlin 1917, p. 256, Satz 12 von § 250.

auch eine fast überall konvergente und umgekehrt; Kompaktheit auf Grund der Konvergenz ausser einer Nullmenge ist identisch mit Kompaktheit auf Grund der Konvergenz dem Masse nach. Diese letztere Konvergenz können wir aber auf einen Entfernungsbegriff zurückführen.[8])

Sind f und g zwei messbare Funktionen, die auf der messbaren Menge H erklärt sind, so definieren wir als ihre Enfernung (f, g) die untere Grenze der Zahlen

$$\varepsilon + m(\varepsilon; f, g),$$

wenn ε eine positive reelle Zahl ist und $m(\varepsilon; f, g)$ das Mass derjenigen Menge bedeutet, auf welcher

$$|f-g| > \varepsilon$$

gilt.

Ist $(f, g) = 0$, so können die Funktionen f und g höchstens auf einer Nullmenge verschieden sein. Solche Funktionen betrachten wir jetzt als identisch; dies entspricht auch der Natur der fast überall stattfindenden Konvergenz.

Wir haben noch zu zeigen, dass dieser Entfernungsbegriff auch die Dreieckseigenschaft hat. Bezeichnen f, g und h drei Funktionen unseres eben betrachteten Raumes, und ist δ eine beliebige positive Zahl, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass

$$\varepsilon + m(\varepsilon; f, g) < (f, g) + \delta$$

und ein ε', so dass

$$\varepsilon' + m(\varepsilon'; g, h) < (g, h) + \delta.$$

Ausser der Menge vom Masse $m(\varepsilon; f, g) + m(\varepsilon'; g, h)$ gilt überall:

$$|f-g| + |g-h| < \varepsilon + \varepsilon'$$

also auch:

$$|f-h| < \varepsilon + \varepsilon'$$

und daher:

$$(f, h) \leqq \varepsilon + \varepsilon' + m(\varepsilon; f, g) + m(\varepsilon'; g, h) < (f, g) + (g, h) + 2\delta.$$

Da aber δ beliebig war, folgt hieraus:

$$(f, h) \leqq (f, g) + (g, h).$$

Es gilt nun folgender Satz von Herrn F. Riesz:

Damit die Folge $f_1, f_2, f_3, \ldots$ dem Masse nach konvergiere, ist es notwendig und hinreichend, dass $\lim\limits_{\substack{i=\infty \\ k=\infty}} (f_i, f_k) = 0$ sei. (Das

[8]) Vgl. auch M. Fréchet, L'écart de deux fonctions quelconques, *C. R.* 162, 1916; Sur divers modes de convergence d'une suite de fonctions d'une variable, *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, XI, 1921.

heisst soviel, dass das Konvergenzkriterium von CAUCHY auch in diesem Raume erfüllt ist.)

Dass diese Bedingung notwendig ist, das ergibt sich sofort aus der soeben bewiesenen Dreieckseigenschaft der Entfernung; dass sie hinreichend ist, beweisen wir so: Genügt die Folge dieser Bedingung, so enthält sie eine fast überall konvergente Teilfolge. Diese letztere: $f_1^*, f_2^*, f_3^*, \ldots$ wird wieder mit Hilfe der konvergenten Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu$ folgendermassen bestimmt. f_n^* sei die erste auf f_{n-1}^* folgende Funktion der Folge $f_1, f_2, f_3, \ldots$ für welche alle Funktionen mit grösserem Index die Bedingung

$$(f_\nu, f_n^*) < \varepsilon_n$$

erfüllen. (Die Existenz einer solchen f_n^* folgt aus $\lim_{\substack{i=\infty \\ k=\infty}} (f_i, f_k) = 0$.)

Man sieht wieder wie vorhin, dass die Folge $\{f_n^*\}$ ausser einer Menge von beliebig kleinem Masse gleichmässig konvergiert, sie konvergiert also fast überall. Bezeichnet f den auf einer Nullmenge beliebig definierten Limes von f_n^*, so folgert man aus $\lim (f_n^*, f) = 0$ und $\lim (f_i, f_k) = 0$,

$$\lim (f_\nu, f) = 0$$

und diese letzte Gleichung zeigt, dass die Folge $\{f_n\}$ dem Masse nach gegen f konvergiert.

Aus diesem Grunde bedeutet die Kompaktheit im Sinne *B)* nichts anderes als dass jede unendliche Untermenge eine Teilfolge mit $\lim_{\substack{i=\infty \\ k=\infty}} (f_i, f_k) = 0$ enthält. Die Anwendung des Satzes I. ergibt also den

Satz III. *Damit eine Menge von messbaren Funktionen kompakt im Sinne B) sei, ist notwendig und hinreichend, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ und $\alpha > 0$ eine Basis $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ existiere, so dass für jede Funktion f der Menge ein ψ_i die Bedingung:*

$$|f - \psi_i| < \varepsilon$$

erfüllt ausser auf einer Menge h, deren Mass $mh < \alpha$ ist.

Für die Basis $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ kann man eine gemeinsame Einteilung:

$$H = e_1 + e_2 + \ldots + e_r$$

machen, wie in § 2, so dass also

$$V_{\psi_i}(e_k) < \varepsilon \text{ sei. } \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}$$

Wegen der Basiseigenschaft der Funktionen ψ_i gibt es dann für jedes f eine Menge h, für die $mh < \alpha$ ist, so dass

$$V_f(e_k . h) < \varepsilon \text{ ist für jedes } k = 1, 2, \ldots, r.$$

Diese Bedingung ist aber allein nicht hinreichend, wie es auch für die Kompaktheit im Sinne *A)* nicht genügend war. Um eine hinreichende Bedingung zu erhalten braucht man nicht die gleichmässige Beschränktheit wie dort hinzuzunehmen, sondern nur die Beschränktheit ausser einer Menge von beliebig kleinem Mass. In der Tat kann man in diesem Falle die Treppenfunktionen bilden und weiter schliessen wie im § 2.

So erhalten wir neben Satz III den

Satz IV. *Eine Funktionenmenge ist dann und nur dann kompakt im Sinne B), wenn*

1. *zu jedem $\eta > 0$ ein $M > 0$ so gehört, dass für jede Funktion f der Menge:* $|f| < M$ *ist ausser einer Menge, deren Mass $< \eta$ ist.*

2. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ und $\alpha > 0$ existiert die Einteilung der Grundmenge H in messbare Teilmengen:*

$$H = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$$

und für jede der Funktionen f eine Menge h mit $mh < \alpha$, so dass:

$$V_f(e_i - e_i . h) < \varepsilon \text{ sei, } i = 1, 2, \ldots, n.$$

§ 5. C-kompakte Funktionenmengen.

Für unsere weitere Betrachtungen wählen wir jetzt den Raum der auf der beschränkten, messbaren Menge H erklärten, quadratisch integrierbaren Funktionen. Die Entfernung zweier Elemente dieses Raumes definieren wir durch

$$\overline{f, g} = \left[\int_H (f-g)^2 dx\right]^{1/2}.$$

Diese Entfernungsdefinition erfüllt die in § 1 verlangten Eigenschaften der Entfernung.

In diesem Sinne wird also eine Menge der quadratisch integrierbaren Funktionen C-kompakt genannt, wenn jede unendliche Untermenge eine im Mittel konvergente Folge enthält. Eine im Mittel konvergente Folge ist aber auch konvergent dem Masse naoh, daher ist auch *aus jeder im Mittel konvergenten Funktionenfolge eine fast überall konvergente Teilfolge auswählbar.*[9]) Hieraus schliesst man weiter, dass aus der Grenzgleichung

[9]) Vgl. E. Fischer, Sur la convergence en moyenne, *C. R.* 144, 1907.

$$\int_H (f_m - f_n)^2\, dx \to 0$$

die Existenz einer quadratisch integrierbaren Funktion f folgt, für die

$$\int_H (f - f_n)^2\, dx \to 0$$

gilt; diese Funktion ist eben die auf einer Nullmenge beliebig definierte Grenzfunktion der fast überall konvergenten Teilfolge.

Hiemit haben wir gezeigt, dass das Konvergenzkriterium von Cauchy auch in unserem jetzt betrachteten Raume erfüllt ist, dass also unsere Konvergenzdefinition sich auch jetzt mit der üblichen deckt (vgl. § 1).

Ferner folgt aus derselben Überlegung, dass jede C-kompakte Menge auch kompakt im Sinne *B)* ist; so ergibt Satz III eine notwendige Bedingung für die Kompaktheit im Sinne *B)*.

Diese Bedingung ist jedoch nicht hinreichend, d. h. es gibt Funktionenmengen, die B-kompakt aber nicht C-kompakt sind. Zum Beispiel sei H das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ und

$$f_1 \equiv 1, \qquad f_n = 2^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{in} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2^{n-1}};$$

$$f_n = 0 \quad \text{in} \quad \frac{1}{2^{n-1}} < x \leqq 1.$$

Durch Anwendung des Satzes I erhalten wir als notwendige und hinreichende Bedingung für die Kompaktheit im Sinne *C)* die Existenz einer Basis $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ zu jedem $\varepsilon > 0$ so, dass jede Funktion f der Menge zu einer geeigneten Funktion φ_i in der Beziehung

$$\int_H (f - \varphi_i)^2\, dx < \varepsilon$$

stehe.

Da alle φ_i selbst quadratisch integrierbare Funktionen sind, also $\int_H \varphi_i^2\, dx$ endliche Zahlen sind $(i = 1, 2, \ldots, n)$, erhalten wir hieraus weiter als eine notwendige Bedingung der Kompaktheit die Beschränktheit von $\int_H f^2\, dx$. Aber noch mehr, die unbestimmten Integrale $\int_e \varphi_i^2\, dx$ sind alle *totalstetige* Mengenfunktionen, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gehört ein $\alpha_i > 0$ so, dass

$$\int_e \varphi_i^2\, dx < \varepsilon$$

ist, wenn nur $me < \alpha_i$ ist, und $e \subset H$.

Die kleinste der Zahlen α_i sei α, e sei eine Menge, deren Mass $me < \alpha$ ist und f irgendeine Funktion aus der kompakten Menge. Wir haben:

$$(1) \qquad \int_e (f-\varphi_i)^2\,dx \leq \int_H (f-\varphi_i)^2\,dx < \varepsilon$$

wegen der Basiseigenschaft der φ_i.

Ferner folgt aus $f = \varphi_i + (f-\varphi_i)$,

$$(2) \qquad \int_e f^2\,dx \leq 2\left\{\int_e \varphi_i^2\,dx + \int_e (f-\varphi_i)^2\,dx\right\} \leq 2\,.\,2\varepsilon.$$

Zu dem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ gehört also ein $\alpha > 0$ so, dass

$$\int_e f^2\,dx < \varepsilon$$

ausfällt für alle Funktionen f der kompakten Menge, wenn nur

$$me < \alpha$$

ist. Diese Eigenschaft der Funktionen drücken wir so aus: *die Mengenfunktionen* $\int_e f^2\,dx$ *sind gleichartig totalstetig.*

Diese notwendige Bedingung ist jedoch nicht hinreichend für die Kompaktheit im Sinne *C)*. Dies zeigt schon das einfache Beispiel der Folge:

$f_k(x) = \sin kx,\; k = 1, 2, 3, \ldots$ im Intervall: $0 \leq x \leq 2\pi$.

Es gilt aber der

Satz V. *Damit eine Menge der auf einer beschränkten, messbaren Menge H quadratisch integrierbaren Funktionen kompakt im Sinne C) sei, ist notwendig und hinreichend, dass*

1. *zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *so gehört, dass für alle Funktionen der Menge* $\int_e f^2\,dx < \varepsilon$ *ausfalle, wenn nur* $me < \delta$ *ist;*

2. *zu jedem* $\varepsilon > 0$ *und* $\alpha > 0$ *existiere eine Basis* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ *so dass für jede Funktion f ein* ψ_i *die Bedingung*

$$|f - \psi_i| < \varepsilon$$

erfüllt, ausser einer Menge h, deren Mass $mh < \alpha$ *ist.*

Wir brauchen nur noch die Hinlänglichkeit der Bedingungen zu zeigen. Nehmen wir also an, die Bedingungen 1. und 2. seien erfüllt für die Funktionenmenge K. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu $\frac{\varepsilon}{8}$ suche man α so, dass

$$\int_e f^2\,dx < \frac{\varepsilon}{8}$$

ausfalle für $me < \alpha$. Zu diesem α und $\eta = \left(\frac{\varepsilon}{2mH}\right)^{1/2}$ existiert die Basis $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ im Sinne der Bedingung 2). Für jedes f gibt es also ein ψ_i mit:

$$|f - \psi_i| < \eta \text{ ausser } h, \text{ wo } mh < \alpha \text{ ist.}$$

Daher ist auch

$$\int_H (f - \psi_i)^2 dx \leqq \eta^2 . mH + \int_h (f - \psi_i)^2 dx \leqq \frac{\varepsilon}{2} + 4 . \frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon,$$

also ist $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ auch eine Basis, die zu ε im Sinne von § 1 gehört. Aus der Existenz dieser Basis folgt aber, dass die Menge kompakt im Sinne *C)* ist.

Für die Basis $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ kann man eine gemeinsame Einteilung:

$$H = e_1 + e_2 + \ldots + e_r$$

machen wie im § 2 und 4, dass also

$$V_{\psi_i}(e_k) < \varepsilon \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, r \end{pmatrix}$$

sei. Wegen der Basiseigenschaft der Funktionen ψ_i gibt es dann für jedes f eine Menge h, für die $mh < \alpha$ ist, so dass:

$$V_f(e_k - h . e_k) < \varepsilon$$

ist für jedes $k = 1, 2, \ldots, r$.

Aber auch umgekehrt, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine derartige Einteilung der Grundmenge H und ist auch die Bedingung 1) des Satzes V erfüllt, so wird auch 2) erfüllt, daher ist die Menge kompakt. Denn aus der Bedingung 1) folgt erstens die gleichmässige Beschränktheit von $\int_H f^2 dx$. (*H* war beschränkt vorausgesetzt, also mH endlich.) Daraus folgt wieder zu jedem $\varepsilon > 0$ die Existenz einer Schranke M so, dass $|f| < M$ gilt für jedes f ausser einer Menge, deren Mass $< \alpha$ ist. Man bilde alle möglichen Treppenfunktionen, die auf jeder Menge e_k einen der Werte $-M + i . \frac{\varepsilon}{2}$ haben ($k = 1, 2, \ldots, r$; $i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{4M}{\varepsilon}\right] + 1$).

Diese Funktionen bilden eine Basis im Sinne der Bedingung 1). Wir haben also neben V den

Satz VI. *Damit eine Funktionenmenge kompakt im Sinne C) sei, ist es notwendig und hinreichend, dass*

1. *die Mengenfunktionen* $\int f^2 dx$ *gleichartig totalstetig sind,*

2. *zu jedem* $\varepsilon > 0$ *und* $\alpha > 0$ *existiere die Einteilung der Grundmenge in messbare Teilmengen:*

$$H = e_1 + e_2 + \ldots + e_n,$$

und für jede der Funktionen f eine Menge h mit $mh < \alpha$ *so dass*

$$V_f(e_i - e_i h) < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Es entsteht nun die Frage, ob es vielleicht möglich wäre eine gemeinsame Menge h für alle Funktionen der kompakten Menge zu finden. Dem ist es doch im allgemeinen nicht so, auch dann nicht, wenn die C-kompakte Menge nur aus einer im Mittel konvergenten Folge besteht. Das zeigt das folgende Beispiel: Im Intervall (0, 1) sei:

$$f_1(x) = 1, \; f_2(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \\ 0 \text{ für } \frac{1}{2} < x \leqq 1 \end{cases}, f_3(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \\ 1 \text{ für } \frac{1}{2} < x \leqq 1 \end{cases}$$

$$f_{2^n+1}(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2^{n+1}} \\ 0 \text{ für } \frac{1}{2^{n+1}} < x \leqq 1 \end{cases}, f_{2^{n+1}+k} = \begin{cases} 1 \text{ für } \frac{k}{2^{n+1}} < x \leqq \frac{k+1}{2^{n+1}} \\ 0 \text{ für alle übrigen } x. \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \ldots, (2^{n+1} - 1),$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dies ist auch ein Beispiel einer im Mittel konvergenten Folge, die im gewöhnlichen Sinne in keinem Punkte des Intervalles (0, 1) konvergiert.[10]

Die Überlegungen dieses Paragraphen bleiben auch gültig, wenn man die Entfernung anstatt durch die mittlere quadratische Abweichung durch die mit irgendeinem Exponenten $p > 0$ gebildete mittlere Abweichung definiert.

(*Eingegangen am 22. IV. 1927*).

[10]) Über die Existenz solcher Folgen vgl. F. Riesz, Systeme integrierbarer Funktionen, *Math. Annalen*, Bd. 69, 1910, p. 464.