Über asymptotische Entwicklungen der Mittag-Lefflerschen Funktion $E_\alpha(x)$.

Von STEPHAN LIPKA in Szeged.

Einleitung.

Die MITTAG-LEFFLERsche Funktion

$$E_\alpha(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\Gamma(\alpha n+1)} \qquad (\Re(\alpha)>0)$$

spielt eine wichtige Rolle bei der Herstellung in möglichst ausgedehnten Bereichen konvergierender Ausdrücke für analytische Funktionen. Die Eigenschaften dieser Funktion sind aber auch an sich interessant. Wir werden uns mit den asymptotischen Entwicklungen von $E_\alpha(x)$ beschäftigen. Wenn α reell ist, so pflegt man das Verhalten dieser Funktion längs vom Nullpunkte ausgehender Strahlen zu untersuchen, um für grosses $|x|$ einfache Formeln zu entwickeln.[1]) Wenn aber α komplex ist, so muss man statt Halbstrahlen logarithmische Spiralen wählen, um eine verhältnismässig einfache Näherungsformel zu gewinnen.[2]) Die vorliegende, auf Anregung von Herrn A. HAAR entstandene Arbeit hat den Zweck, durch Anwendung der allgemeinen Ergebnisse von Herrn A. HAAR über asymptotische Entwicklungen. die allgemeine Theorie der Funktion $E_\alpha(x)$ auf eine neue Art zu entwickeln.

[1]) Die asymptotische Entwicklung der Funktion $E_\alpha(x)$ ist vielfach behandelt; wir erwähnen nur die folgenden Arbeiten, wo die entsprechenden Resultate zuerst angegeben sind. G. MITTAG-LEFFLER, Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène, *Acta Mathematica*. tome 29., 1905, pag. 132—147. A. WIMAN, Über den Fundamentalsatz in der Theorie der Funktionen $E_\alpha(x)$, *Acta Mathematica*, Bd. 29., 1905, S. 191—201,

[2]) G. MITTAG-LEFFLER, Sopra la funzione $E_\alpha(x)$, *R. Accad. dei Lincei, Atti.* Ser. 5. Vol. 13, 1904, pag. 3—5.

Das Hauptresultat von Herrn HAAR besteht im Folgendem:[3]) Es sei $f(t)$ eine für alle positive Werte von t stetige Funktion, deren LAPLACEsche Transformierte

$$L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt = \varphi(z)$$

die folgenden Eigenschaften besitzt:

I. Für alle Werte von $z = \sigma + iy$, für die $\sigma > a$ ausfällt, ist $\varphi(z) = \varphi(\sigma + iy)$ regulär und besitzt bei $y = \pm\infty$ für hinreichend grosse Werte von t den FOURIERschen *Charakter*. $\varphi(\sigma + iy)$ wird von Herrn HAAR bei $y = \pm\infty$ für hinreichend grosse t vom FOURIERschen Charakter genannt, wenn man zu jeder noch so kleinen Zahl δ eine positive Grenze ω derart bestimmen kann, dass für alle $t \geqq T$

$$\left| \int_\alpha^\beta e^{iyt} \varphi(\sigma + iy)\, dy \right| < \delta$$

ausfällt, sobald $\alpha \geqq \omega$ und $\beta \geqq \omega$ bzw. $\alpha \leqq -\omega$ und $\beta \leqq -\omega$ ist.

II. Ihre Randwerte gestatten auf der Geraden $\Re(z) = a$ eine Darstellung

$$\varphi(z) = \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \frac{a_\varkappa}{(z - z_\varkappa)^{\varrho_\varkappa}} + \psi(z)$$

wobei $z_\varkappa = a + iy_\varkappa$ Punkte dieser Geraden sind, die Funktion $\psi(a + iy)$ aber eine n-mal differenzierbare Funktion von y bedeutet von der Beschaffenheit, dass $\left| \frac{d^n \psi(a + iy)}{dy^n} \right|$ in jedem endlichen Intervall von y beschränkt ist; die Ableitungen

$$\frac{d^k \varphi(a + iy)}{dy^k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

für $y = \pm\infty$ den Grenzwert Null haben, und $\frac{d^n \varphi(a + iy)}{dy^n}$ bei $y = \pm\infty$ für hinreichend grosse t den FOURIERschen Charakter besitzt.

III. Für hinreichend grosse Werte von t gelten die Gleichungen

$$\lim_{\omega = \infty} \int_{a + i\omega}^{\sigma + i\omega} e^{zt} \varphi(z)\, dz = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\omega = \infty} \int_{a - i\omega}^{\sigma - i\omega} e^{zt} \varphi(z)\, dz = 0.$$

[3]) A. HAAR, Über asymptotische Entwicklungen von Funktionen, *Math. Annalen*, Bd. 96, 1926, S. 85.

Unter diesen Bedingungen gilt die asymptotische Formel

$$\lim_{t=\infty} t^n e^{-\alpha t}\left[f(t)-\sum_{\varkappa=1}^{u}\frac{a_\varkappa}{\Gamma(\varrho_\varkappa)}e^{z_\varkappa t}t^{\varrho_\varkappa-1}\right]=0.$$

Dieser Satz wird im Folgendem als Satz von HAAR zitiert.

Um diesen allgemeinen HAARschen Satz auf konkrete Fälle anwenden zu können, muss man die LAPLACEsche Transformierte der zur Untersuchung vorgelegten Funktion auf eine Form bringen, welche über die für den HAARschen Satz wesentlichen Momente Aufschluss gibt. Für die Funktion $E_\alpha(x)$ ist dies, in anderem Zusammenhange, von den Herren F. BERNSTEIN und G. DOETSCH in einer der inhaltsreichen Arbeiten, die diese Verfasser der LAPLACEschen Transformation widmeten, ausgeführt worden; sie erhalten nämlich durch Einführung einer geeigneten neuen Variablen für die LAPLACEsche Transformierte der Funktion $E_\alpha(x)$ eine explicite elementare Funktion, welche der HAARschen Methode unmittelbar zugänglich ist.

§ 1. Die asymptotischen Entwicklungen im Falle $\alpha > 0$.

In diesem Falle interessiert uns das asymptotische Verhalten der Funktion $E_\alpha(x)$, wenn x längs eines vom Nullpunkte ausgehenden Halbstrahles ins Unendliche rückt. Wir benötigen hier zuerst, um den Satz von HAAR anwenden zu können, die LAPLACEsche Transformierte von $E_\alpha(x)$. Dieselbe ist indessen keine elementare Funktion von z. Nimmt man aber statt $E_\alpha(x)$ die durch die Transformation $x=y^\alpha$ sich ergebende Funktion, so wird die LAPLACEsche Transformierte, wie die Herren F. BERNSTEIN und G. DOETSCH gefunden haben,[4]) eine elementare Funktion, und zwar

$$\frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha-1}.$$

Diese Funktion ist aber *mehrdeutig*, wir müssen daher genau feststellen, um welchen Zweig derselben es sich handelt. Zu dem Ende verfahren wir wie folgt. Wir führen durch die Relation

$$x=(te^{i\varphi})^\alpha=t^\alpha e^{i\varphi\alpha} \tag{1}$$

an Stelle der komplexen Variablen x die reellen Variablen t und

[4]) F. BERNSTEIN und G. DOETSCH, Die Integralgleichungen der elliptischen Thetanullfunktion. *Göttinger Nachrichten*, 1922, S. 42.

Die Verfasser gewinnen $E_\alpha(x)$ als die VOLTERRAsche Transformierte der Funktion $L(E_\alpha(x))$.

φ ein, wobei $t > 0$ sein soll; wird dann φ fixiert und läuft t von 0 bis $+\infty$, so beschreibt x einen vom Nullpunkte ausgehenden Halbstrahl. Ist δ irgend eine relle Zahl, und nimmt φ alle Werte im Intervalle

$$(2) \qquad -\frac{\pi}{\alpha}\delta \leqq \varphi < -\frac{\pi}{\alpha}\delta + \frac{2\pi}{\alpha}$$

an, so erhalten wir auf diese Weise alle die vom Nullpunkte ausgehenden Halbstrahlen der x-Ebene. Wird also

$$E_\alpha(x) = f_\alpha(t, \varphi)$$

gesetzt, so handelt es sich um die Diskussion von $f_\alpha(t, \varphi)$, als Funktion von t betrachtet, für positive reelle Werte von t. Für die LAPLACEsche Transformierte von $f_\alpha(t, \varphi)$, als Funktion von t betrachtet, erhält man

$$(3) \qquad L(f_\alpha(t, \varphi)) = \int_0^\infty f_\alpha(t, \varphi) e^{-zt} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\varphi\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{\alpha n} dt.$$

In der Folge beschränken wir uns auf die Halbebene $\Re(z) > 0$. Das Integral

$$\int_0^\infty e^{-zt} t^{\alpha n} dt$$

ist daselbst konvergent und stellt dort eine reguläre Funktion von z dar; wir erkennen sogleich, dass dort

$$(4) \qquad \int_0^\infty e^{-zt} t^{\alpha n} dt = \frac{1}{z^{\alpha n+1}} \Gamma(\alpha n + 1) \; ^{5)}$$

gilt, wo die Potenz $z^{\alpha n+1}$ durch

$$(5) \qquad z^{\alpha n+1} = (z^\alpha)^n . z, \quad z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}, \quad -\pi < \arg z < \pi$$

bestimmt ist. In der Tat, für reelle positive Werte von z fällt (4) mit einer bekannten EULERschen Formel zusammen, woraus die Gültigkeit von (4) in der Halbebene $\Re(z) > 0$ auf Grund des Satzes folgt, dass zwei in einem Gebiete reguläre Funktionen identisch sind, wenn sie für die Punkte einer im Innern des Gebiets sich häufenden Punktmenge die gleichen Werte haben. Die Formel (3) liefert demnach für $|z| > 1$

$$(6) \qquad L(f_\alpha(t, \varphi)) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i\varphi\alpha n}}{z^{\alpha n}} = \frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha - e^{i\varphi\alpha}},$$

[5] Diese Formel rührt von EULER her; vgl. N. NIELSEN: Handbuch der Theorie der Gammafunktion, S. 151.

wo der Wert der Potenz z^α durch (5) gegeben ist. Die Funktion

$$\frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha - e^{i\varphi\alpha}} \tag{6'}$$

ist in der Halbebene $\Re(z) \geqq 0$, in welcher sich unsere Betrachtungen abspielen werden, regulär bis auf $z=0$ und gewisse Stellen des Einheitskreises $|z|=1$; und zwar werden, unter Berücksichtigung von (5), diese Pole $z=e^{i\vartheta}$ erhalten, indem man die reelle ganze Zahl μ so bestimmt, dass für

$$\vartheta = \varphi + \frac{2\pi}{\alpha}\mu$$

die Bedingung

$$\left|\varphi + \frac{2\pi\mu}{\alpha}\right| \leqq \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

erfüllt sei. Es gibt offenbar nur endlich viele reelle ganze Zahlen μ, welche die Bedingung (7) erfüllen, mithin auch nur endlich viele Pole der Funktion (6') in $\Re(z) \geqq 0$. Diese Pole sind dabei einfach, wie aus

$$\lim_{z=e^{i\vartheta}} \left\{ \frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha - e^{i\varphi\alpha}} - \frac{1}{\alpha} \frac{1}{z - \exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}} \right\} = \frac{\alpha-1}{2\alpha e^{i\vartheta}}$$

$$\vartheta = \varphi + \frac{2\pi\mu}{\alpha}$$

hervorgeht; diese Beziehung bestimmt gleichzeitig die zu diesen Polen gehörenden Hauptteile. Die Summe dieser Hauptteile ist daher

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{(\mu)} \frac{1}{z - \exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}},$$

wo also μ alle reelle ganze Zahlen durchläuft, für welche die Bedingungen (7) erfüllt ist. Wenn man diese Summe aus (6') subtrahiert, so verschwinden die Singularitäten in der rechten Halbebene. Es wird also die Funktion

$$H_\alpha(z,\varphi) = \frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha - e^{i\varphi\alpha}} - \frac{1}{\alpha}\sum_{(\mu)} \frac{1}{z - \exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}}$$

regulär analytisch für $\Re(z) \geqq 0$, bis auf die Stelle $z=0$; die Bedeutung von z^α ist dabei durch (5) fixiert.

Es werde noch die durch unmittelbare Integration für

$$\Re(z) > \Re\left(\exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}\right)$$

sich ergebende Formel

$$\frac{1}{z-\exp\left\{i\left(\varphi+\frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}}=\int_0^\infty \exp\left\{t\left[\exp\left\{i\left(\varphi+\frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}-z\right]\right\}dt$$

erwähnt, welche ausdrückt, dass

$$(8)\qquad L\left(\exp\left[t\exp\left\{i\left(\varphi+\frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}\right]\right)=\frac{1}{z-\exp\left\{i\left(\varphi+\frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}}$$

ist. Wir betrachten jetzt, die Methode von Herrn Haar anwendend, die Differenz

$$F_\alpha(t,\varphi)=f_\alpha(t,\varphi)-\frac{1}{\alpha}\sum_{(\mu)}\exp\left\{t\exp\left\{i\left(\varphi+\frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}\right\}.$$

Die L-Transformierte von $F_\alpha(t,\varphi)$ wird nach (6) und (8)

$$L(F_\alpha(t,\varphi))=\frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha-e^{i\varphi\alpha}}-\frac{1}{\alpha}\sum_{(\mu)}\frac{1}{z-\exp\left\{i\left(\varphi+\frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}}=H_\alpha(z,\varphi).$$

Die Funktion $H_\alpha(z,\varphi)$ ist, wie oben bemerkt wurde, regulär analytisch für $\Re(z)\geqq 0$, bis auf die Stelle $z=0$. Wir wollen zeigen, dass die Funktion

$$H_\alpha(\sigma+iy,\varphi)$$
$$z=\sigma+iy$$

für $\sigma\geqq 0$ bei $y=\pm\infty$ den Fourierschen Charakter besitzt. Für das erste Glied von $H_\alpha(\sigma+iy,\varphi)$ folgt

$$\int_\alpha^\beta e^{iyt}\frac{(\sigma+iy)^{\alpha-1}}{(\sigma+iy)^\alpha-e^{i\varphi\alpha}}dy=\int_\alpha^\beta\left\{e^{iyt}\sum_{n=0}^\infty\frac{e^{i\varphi\alpha n}}{(\sigma+iy)^{\alpha n+1}}\right\}dy=c_1$$

$$|c_1|\leqq\left|\int_\alpha^\beta\frac{e^{iyt}}{(\sigma+iy)}dy\right|+\left|\int_\alpha^\beta\frac{e^{iyt}}{(\sigma+iy)^{1+\alpha}}\left\{e^{i\varphi\alpha}+\sum_{n=2}^\infty\frac{e^{i\varphi\alpha n}}{(\sigma+iy)^{\alpha(n-1)}}\right\}dy\right|;$$

wenn $|y|$ hinreichend gross ist, so gilt die Ungleichung

$$\left|e^{i\varphi\alpha}+\sum_{n=2}^\infty\frac{e^{i\varphi\alpha n}}{(\sigma+iy)^{\alpha(n-1)}}\right|<c_2;$$

also gewinnt man durch Produktintegration die folgende Abschätzung

$$|c_1|<\frac{1}{t}\left\{\frac{1}{|\sigma+i\beta|}+\frac{1}{|\sigma+i\alpha|}+\int_\alpha^\beta\frac{dy}{|\sigma+iy|^2}\right\}+c_2\int_\alpha^\beta\frac{dy}{|\sigma+iy|^{1+\alpha}}.$$

Der Nachweis, dass auch das Glied $\frac{1}{\alpha}\sum\limits_{(\mu)}$ von $H_\alpha(z, \varphi)$ den FOURIERschen Charakter besitzt, gestaltet sich ähnlich. Noch einfacher beweist man, dass die k-te Ableitung von $H_\alpha(z, \varphi)$ auch dieselbe Eigenschaft besitzt, und zwar auf die folgende Weise:

$$\frac{d^k}{dz^k}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{i\varphi\alpha n}}{z^{\alpha n+1}}\right\} = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\varphi\alpha n}\frac{(\alpha n+1)\ldots(\alpha n+k)}{z^{\alpha n+k+1}}$$

$$\left|\int_\alpha^\beta e^{iyt} H_\alpha^{(k)}(\sigma+iy)\,dy\right| = \left|\int_\alpha^\beta \frac{e^{iyt}}{(\sigma+iy)^{k+1}}\,c(y)\,dy\right| < c\int_\alpha^\beta \frac{dy}{|\sigma+iy|^{k+1}},$$

da $|c(y)| < c_8$ gilt, wenn nur $|y|$ hinreichend gross ist. Es folgt auch leicht, dass auch die Bedingung III erfüllt ist. Jetzt brauchen wir noch die Darstellung von $H_\alpha(z, \varphi)$ auf der Geraden $\Re(z) = 0$. Nach der Formel

$$\frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha - e^{i\varphi\alpha}} = -\sum_{k=0}^{\nu}\frac{e^{-i\varphi\alpha(k+1)}}{z^{1-(k+1)\alpha}} + e^{-i\varphi\alpha(\nu+1)}\frac{z^{\alpha(\nu+2)-1}}{z^\alpha - e^{i\varphi\alpha}}$$

und mit der Bezeichnung

$$\psi(z) = e^{-i\varphi\alpha(\nu+1)}\frac{z^{\alpha(\nu+2)-1}}{z^\alpha - e^{i\varphi\alpha}} - \frac{1}{\alpha}\sum_{(\mu)}\frac{1}{z - \exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}}$$

wird

$$H_\alpha(z, \varphi) = -\sum_{k=0}^{\nu}\frac{e^{-i\varphi\alpha(k+1)}}{z^{1-(k+1)\alpha}} + \psi(z).$$

Wir zeigen: die n-te Ableitung $\frac{d^n\psi(iy)}{dy^n}$ ist in jedem endlichen Intervall von y von beschränktem absolutem Betrage, wenn nur

(9) $$n \leq [\alpha(\nu+2)-1]$$

ist. ([ ] bezeichnet die grösste ganze Zahl $\leq \alpha(\nu+2)-1$).

Der Nachweis ergibt sich durch vollständige Induktion. Der Betrag des Gliedes

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{(\mu)}\frac{1}{(\sigma+iy) - \exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}}$$

wird sicher beschränkt, wenn für y ein genügend kleines den Nullpunkt enthaltendes Intervall gewählt wird, und dies gilt auch für die Ableitungen. Das erste Glied von $\psi(z)$ hat — vom konstanten Faktor $e^{-i\varphi\alpha(\nu+1)}$ abgesehen — die n-te Ableitung

(10) $$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{\alpha(\nu+2)-1}g(z)\right] = \sum_{k=0}^{n} a_k\, g^{(k)}(z)\, z^{\alpha(\nu+2)+k-(n+1)},$$

wo wir

$$g(z)=\frac{1}{z^{\alpha}-e^{i\varphi\alpha}}$$

gesetzt haben. Für die Ableitung $g^{(k)}(z)$ folgt aus der Formel

$$\frac{d^k}{dz^k}[g(z)(z^{\alpha}-e^{i\varphi\alpha})]=g^{(k)}(z)(z^{\alpha}-e^{i\varphi\alpha})+$$
$$+b_1 g^{(k-1)}(z)z^{\alpha-1}+\ldots+b_k g(z)z^{\alpha-k}=0$$

der Ausdruck:

$$g^{(k)}(z)=-g(z)\{b_1 g^{(k-1)}(z)z^{\alpha-1}+b_2 g^{(k-2)}(z)z^{\alpha-2}+\ldots+b_k g(z)z^{\alpha-k}\},$$

aus welchem (durch vollständige Induktion) ersichtlich ist, dass der Zähler von $g^{(k)}(z)$ in keinem Glied einen Faktor z^{λ} besitzt, für welchen $\lambda<-k$ ist. Hieraus folgt nach (10) und (9), dass der Zähler von $\frac{d^n}{dz^n}[z^{\alpha(\nu+2)-1}g(z)]$ in keinem Glied einen Faktor z^{λ} besitzt, für welchen $\lambda<0$ ist. Es sei noch bemerkt, dass $\psi^{(n)}(z)$ in jedem den Punkt $z=0$ nicht enthaltenden Intervall der imaginären Achse regulär, also $\left|\frac{d^n\psi(iy)}{dy^n}\right|$ beschränkt ist.

Wir können also den Satz von Haar anwenden. Derselbe liefert die Limesgleichung

$$\lim_{t=\infty} t^n\left[f_{\alpha}(t,\varphi)-\frac{1}{\alpha}\sum_{(\mu)}\exp\left\{t\exp\left\{i\left(\varphi+\frac{2\pi\mu}{\alpha}\right)\right\}\right\}+\sum_{k=1}^{\nu+1}\frac{e^{-i\varphi\alpha k}}{\Gamma(1-\alpha k)}\right]=0$$

woraus nach (1)

$$\lim x^{\frac{n}{\alpha}}\left[E_{\alpha}(x)-\frac{1}{\alpha}\sum_{(\mu)}\exp\left\{|x|^{\frac{1}{\alpha}}\exp\left\{i\frac{\arg x+2\pi\mu}{\alpha}\right\}\right\}+\sum_{k=1}^{\nu+1}\frac{x^{-k}}{\Gamma(1-k\alpha)}\right]=0$$

folgt, *wenn nur x längs eines vom Nullpunkte ausgehenden Strahles ins Unendliche rückt. Aber gemäss* (9) *ist* $\left[\frac{n}{\alpha}\right]\leqq\nu+1$, *also gilt für jedes n die asymptotische Formel*

$$E_{\alpha}(x)=\frac{1}{\alpha}\sum_{(\mu)}\exp\left\{|x|^{\frac{1}{\alpha}}\exp\left\{i\frac{\arg x+2\pi\mu}{\alpha}\right\}\right\}-\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{\alpha}\right]}\frac{x^{-k}}{\Gamma(1-k\alpha)}+x^{-\frac{n}{\alpha}}\varepsilon(x),$$
$$\varepsilon(x)\to 0$$

wo μ ganz und

$$\left|\frac{\arg x+2\pi\mu}{\alpha}\right|\leqq\frac{\pi}{2}$$

ist. Dabei ist also, nach (1) *und* (2), $\arg x$ *durch*

$$-\pi\delta \leqq \arg x < -\pi\delta + 2\pi$$

eindeutig bestimmt.

Wir werden jetzt diese Formel für verschiedene Werte von α diskutieren. Es sei

$$\alpha \geqq 2.$$

In der Relation (2) bedeute δ in diesem Falle den Wert 1, also betrachten wir diejenigen φ, für welche die Bedingung $-\frac{\pi}{\alpha} \leqq \varphi < \frac{\pi}{\alpha}$, also $-\pi \leqq \arg x < \pi$, erfüllt ist. Es ist aber $\frac{\pi}{\alpha} \leqq \frac{\pi}{2}$, also wird $-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi < \frac{\pi}{2}$, so dass z. B. $\mu = 0$ der Bedingung (7) genügt. Die Summe $\sum\limits_{(\mu)}$ wird also im Falle $\alpha \geqq 2$ nie leer. Es sei nun

$$2 > \alpha > 0$$

und es bedeute δ den Wert $\frac{\alpha}{2}$; φ variiert also im Intervalle $-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi < \frac{2\pi}{\alpha} - \frac{\pi}{2}$. Wir beschränken uns zunächst auf die Werte

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}, \tag{11}$$

somit nach (1) in der Ebene x auf die Werte

$$-\frac{\pi\alpha}{2} \leqq \arg x \leqq \frac{\pi\alpha}{2}. \tag{12}$$

Jetzt wird die Summe $\sum\limits_{(\mu)}$ im $H_\alpha(z, \varphi)$ nur das dem Werte $\mu = 0$ entsprechende Glied

$$\frac{1}{z - e^{i\varphi}}$$

enthalten, weil für positives μ, wegen $\alpha < 2$, nach (11) die Ungleichung

$$\varphi + \frac{2\pi\mu}{\alpha} > \frac{\pi}{2}$$

folgt, was der Bedingung (7) nicht entspricht. Man schliesst ebenso, dass für $\mu < 0$ eine Ungleichung

$$\varphi + \frac{2\pi\mu}{\alpha} < -\frac{\pi}{2}$$

besteht. Die Summe $\sum\limits_{(\mu)}$ wird aber leer, wenn die Werte von φ ausserhalb des Intervalles (11) in dem Intervalle

$$\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{2\pi}{\alpha} - \frac{\pi}{2}$$

(13) $$\frac{\alpha\pi}{2} < \arg x < 2\pi - \frac{\pi\alpha}{2}$$

liegen, weil die Relation

$$\left|\varphi + \frac{2\pi\mu}{\alpha}\right| \leqq \frac{\pi}{2}$$

zunächst für $\mu \geqq 0$ nicht gilt. Aber sie gilt auch für $\mu < 0$ nicht, da wenn ein $0 > \mu = -p$, $p \geqq 1$ der Relation genügte, so wäre

$$-\frac{\pi}{2} + \vartheta\pi = \varphi - \frac{2\pi}{\alpha} p, \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 1,$$

woraus

$$\varphi = \frac{2\pi}{\alpha} p - \frac{\pi}{2} + \vartheta\pi \geqq \frac{2\pi}{\alpha} - \frac{\pi}{2}$$

folgen würde, aber dies ist offenbar unmöglich. *Also gestaltet sich die Darstellung im Falle* $2 > \alpha > 0$, *nach* (12) *und* (13), *auf die folgende Weise:*

$$E_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} \exp x^{\frac{1}{\alpha}} - \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{\alpha}\right]} \frac{x^{-k}}{\Gamma(1 - k\alpha)} + x^{-\frac{n}{\alpha}} \varepsilon(x)$$

für $$-\frac{\pi\alpha}{2} \leqq \arg x \leqq \frac{\pi\alpha}{2};$$

$$E_\alpha(x) = -\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{\alpha}\right]} \frac{x^{-k}}{\Gamma(1 - k\alpha)} + x^{-\frac{n}{\alpha}} \varepsilon(x)$$

für $$\frac{\pi\alpha}{2} < \arg x < 2\pi - \frac{\pi\alpha}{2},$$

wo

$$\varepsilon(x) \to 0$$

wenn nur x längs eines vom Nullpunkte ausgehenden Halbstrahles ins Unendliche rückt.

§ 2. Die asymptotische Entwicklung im Falle $\alpha = a + ib$.

Man muss die Ungleichung $a > 0$ voraussetzen, damit $E_\alpha(x)$ eine ganze Funktion sei. Wir führen die Transformation

(1') $$x = (te^{i\varphi})^\alpha, \quad (\alpha = a + ib)$$

in dem Sinne

$$(te^{i\varphi})^\alpha = e^{\alpha \log t}\, e^{i\varphi\alpha}$$

ein, wo $t > 0$, φ reell und $\log t$ reell sind. Somit ist wieder $x = (te^{i\varphi})^\alpha$ offenbar eine eindeutige Funktion des Wertepaares (t, φ) und es wird, wie im § 1.,

$$E_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha n}\, e^{i\varphi\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} = f_\alpha(t, \varphi),$$

wo wieder $f_\alpha(t, \varphi)$ als Funktion von $t > 0$ betrachtet wird. φ spielt die Rolle eines Parameters.

Man gewinnt für die L-Transformierte von $f_\alpha(t, \varphi)$ den Ausdruck

$$L(f_\alpha(t, \varphi)) = \int_0^\infty f_\alpha(t, \varphi)\, e^{-zt}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i\varphi\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} \int_0^\infty t^{\alpha n} e^{-zt}\, dt,$$

wo für das in der Summe stehende Integral die Eulersche Formel gilt

$$\int_0^\infty e^{-zt}\, t^{\alpha n} dt = \frac{1}{z^{\alpha n + 1}}\, \Gamma(\alpha n + 1),$$

(5′) $\quad (z^\alpha = e^{\alpha \log|z|}\, e^{i\alpha \arg z}, \; -\pi < \arg z < \pi, \; \log|z| \text{ reell})$

wenn man nur für solche Werte von z beschränkt, welche der Forderung $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ genügen. Beweis ist wie bei (4). Wir gelangen also zu derselben Formel wie im Falle eines reellen α:

$$L(f_\alpha(t, \varphi)) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i\varphi\alpha n}}{z^{\alpha n}} = \frac{z^{\alpha - 1}}{z^\alpha - e^{i\varphi\alpha}},$$

wo der Wert der Potenz z^α durch (5′) gegeben ist. Diese Funktion besitzt in der rechten Halbebene einfache Pole. Es sei ζ ein Pol, so wird

$$\zeta^\alpha - e^{i\varphi\alpha} = 0,$$

woraus die Gleichungen

$$b \arg \zeta - a \log|\zeta| = b\varphi$$
$$a \arg \zeta + b \log|\zeta| = a\varphi + 2\pi\varkappa$$

folgen. Man gewinnt am denselben die Formeln

$$\arg \zeta = \varphi + \frac{2\pi\varkappa a}{|\alpha|^2},$$
$$\log|\zeta| = \frac{2\pi\varkappa b}{|\alpha|^2},$$

also

$$\zeta = \exp\left\{\frac{2\pi\varkappa b}{|\alpha|^2}\right\}\exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\varkappa a}{|\alpha|^2}\right)\right\}$$

wird. Es folgt noch ebenso wie im § 1., dass diese Pole einfach sind und das Residuum $\frac{1}{\alpha}$ haben, also es wird die Funktion

$$(14)\quad G_\alpha(z,\varphi) = L(f_\alpha(\varphi,t)) - \frac{1}{\alpha}\sum_{(\varkappa)} \frac{1}{z - \exp\left\{\frac{2\pi\varkappa b}{|\alpha|^2}\right\}\exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\varkappa a}{|\alpha|^2}\right)\right\}}$$

— wo $\varkappa$ alle ganzen Zahlen (Null inclusive) durchläuft, welche der Bedingung

$$\left|\varphi + \frac{2\pi\varkappa a}{|\alpha|^2}\right| \leqq \frac{\pi}{2}$$

genügen — regulär analytisch für $\Re(z) \geqq 0$, bis auf die Stelle $z = 0$. Wir erwähnen noch die durch unmittelbare Integration für den Fall $\Re(z) > \exp\frac{2\pi\varkappa b}{|\alpha|^2}$ sich ergebende Formel

$$\frac{1}{z - \exp\left\{\frac{2\pi\varkappa b}{|\alpha|^2}\right\}\exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\varkappa a}{|\alpha|^2}\right)\right\}} =$$

$$= \int_0^\infty \exp\left\{t\left[\exp\left\{\frac{2\pi\varkappa b}{|\alpha|^2}\right\}\exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\varkappa a}{|\alpha|^2}\right)\right\} - z\right]\right\} dt,$$

woraus wir nach (14) gewinnen, dass die Funktion

$$f_\alpha(t,\varphi) - \frac{1}{\alpha}\sum_{(\varkappa)} \exp\left\{t \,.\, \exp\left\{\frac{2\pi\varkappa b}{|\alpha|^2}\right\}\exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\varkappa a}{|\alpha|^2}\right)\right\}\right\}$$

die L-Transformierte $G_\alpha(z,\varphi)$ hat. Dies ist für die rechte Halbebene regulär und der charakteristische Teil ihrer Darstellung auf der Geraden $\Re(z) = 0$ wird wie im Falle eines reellen α

$$-\sum_{(k \geqq 0)} \frac{e^{i(k+1)\alpha}}{z^{1-(k+1)\alpha}}.$$

Wir können jetzt schon den Satz von Haar anwenden und nach demselben wird

$$\lim_{t=\infty} t^n\left[f_\alpha(t,\varphi) - \sum_{(\varkappa)} \exp\left\{t\exp\left\{\frac{2\pi\varkappa b}{|\alpha|^2}\right\}\exp\left\{i\left(\varphi + \frac{2\pi\varkappa a}{|\alpha|^2}\right)\right\}\right\} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\nu+1} \frac{e^{-i\varphi\alpha k}}{\Gamma(1-k\alpha)} t^{-k\alpha}\right] = 0$$

für

$$n \leqq [a(\nu+2)-1].$$

Im Laufe unserer Betrachtung hat φ einen beliebigen festen Wert bedeutet. Wenn φ konstant ist und t von Null bis Unendlich wächst, dann läuft

$$x = t^\alpha e^{i\varphi\alpha} \qquad (\alpha = a + ib)$$

längs einer logarithmischen Spiralen. Die Gleichung dieser Spiralen ist in Polarkoordinaten

$$\varrho = \exp\left\{-\varphi\frac{|\alpha|^2}{b}\right\}\exp\left\{\frac{a}{b}\theta\right\}$$

$$\theta = \varphi a + b\log t.$$

Wenn man noch die Transformation einführt

$$\varphi = \frac{a}{|\alpha|^2}\Phi,$$

so ergibt sich endlich nach der vorigen Formel *die asymptotische Formel*

$$E_\alpha(x) = \sum_{(\varkappa)} \exp\left\{|x|^{\frac{1}{\alpha}}\exp\left\{\frac{\Phi+2\pi\varkappa}{\alpha}i\right\}\right\} - \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{\alpha}\right]}\frac{x^{-k}}{\Gamma(1-k\alpha)} + \frac{\varepsilon(x)}{x^{\frac{n}{\alpha}}},$$

wo die Summation $(\varkappa)$ *über die der Relation*

$$|\Phi + 2\pi\varkappa| \leqq \frac{\pi}{2}\,\frac{|\alpha|^2}{a}$$

genügenden ganzen Zahlen erstreckt wird, und $\varepsilon(x)\to 0$, *wenn* x *längs einer der logarithmischen Spiralen*

$$\arg x = \frac{b}{a}\log|x| + \Phi$$

ins Unendliche rückt.

(Eingegangen am 30. Juni 1927.)