Sur la formule d'inversion de Fourier.

Par FRÉDÉRIC RIESZ à Szeged.

1. L'analyse de la formule d'inversion de FOURIER

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{iu(x-t)}\,dt \tag{1}$$

a conduit à l'idée d'étudier à part la transformation fonctionnelle linéaire, définie primitivement par la formule

$$T(f)=F(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-iut}\,dt \tag{2}$$

pour les fonctions sommables (au sens de LEBESGUE) dans l'intervalle $(-\infty,\infty)$ et étendue par des définitions convenables à d'autres classes de fonctions, notamment à la classe L^2 des fonctions à carré sommable. L'importance de la classe L^2 était indiquée par l'analogie qu'elle devait montrer avec la théorie des séries de FOURIER des fonctions sommables et à carré sommable et dont les résultats principaux, à savoir le théorème de PARSEVAL et son réciproque, faisaient prévoir des résultats analogues, permettant de préciser le sens de la formule (1).

Dans les travaux de MM. PLANCHEREL et TITCHMARSCH[1]) concernant ce sujet, tous ces faits, avec d'autres plus généraux, ont été démontrés par des voies différentes, et la Note présente a pour seul objet d'appeler l'attention sur ce que l'on peut rattacher ces faits, presque sans calcul et sans faire appel aux séries de

---

[1]) M. PLANCHEREL, Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies, *Rend. di Palermo*, 30 (2e sem. 1910), pp. 289—335; Sur les formules d'inversion de FOURIER et de HANKEL, *Proc. London Math. Soc.*, series 2, vol. 24 (1925), pp. 62—70. E. C. TITCHMARSH, HANKEL transforms, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 21 (1923), pp. 463—473. *Cf.* aussi S. POLLARD, On FOURIER's integral, *Proc. London Math. Soc.*, series 2, vol. 26 (1926), pp. 12—24.

Fourier, aux théorèmes généraux sur l'intégration et en particulier sur la convergence en moyenne et cela en se servant d'un artifice de calcul bien connu. Dans le cas actuel, l'idée de cet artifice est suggérée par le fait que la fonction $e^{-\frac{t^2}{2}}$ est une fonction fondamentale de la transformation T.

2. Considérons l'intégrale triple

$$I=\frac{1}{2\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2n^2}-iut+iux} f(t)g(x)\,du\,dt\,dx$$

et supposons que les fonctions f et g soient sommables dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Dans cette hypothèse, la fonction à intégrer étant égale, en valeur absolue, au produit des fonctions

$$e^{-\frac{u^2}{2n^2}},\ |f(t)|,\ |g(x)|$$

dont chacune est sommable par rapport à la variable dont elle dépend, l'intégrale I existe et, d'après le théorème de M. Fubini, on peut la calculer en intégrant successivement et dans un ordre quelconque par rapport à chaque variable. En intégrant dans l'ordre x, t, u il vient

$$(3)\qquad I=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2n^2}}du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}dt\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,e^{iux}\,dx.$$

L'intégration dans l'ordre t, u, x donne

$$(4)\qquad I=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\,e^{-\frac{u^2}{2n^2}}du\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut}f(t)\,dt.$$

Enfin, en commençant par la variable u et en écrivant d'abord seulement les facteurs qui la contiennent, on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2n^2}+iu(x-t)}du=e^{-n^2\frac{(x-t)^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2n^2}(u-in^2(x-t))^2}du=n\sqrt{2}e^{-n^2\frac{(x-t)^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz$$

où l'intégration par rapport à z se fera suivant une certaine droite parallèle à l'axe réel. Or, il suit immédiatement par le théorème de Cauchy que ladite droite peut être remplacée par l'axe réel et par conséquent, l'intégrale au dernier membre sera égale à $\sqrt{\pi}$. L'intégration par rapport à u est donc effectuée et l'on a

$$(5)\qquad I=\frac{n}{\sqrt{2\pi}}\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2\frac{(x-t)^2}{2}} f(t)\,g(x)\,dt\,dx.$$

3. Dans les formules (3) et (5), écrivons au lieu de $g(x)$ la fonction $\bar{f}(x)$ prenant les valeurs conjuguées à celles de $f(x)$; en comparant les deux formules et en se servant de la notation de la formule (2), il vient

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2n^2}} |F(u)|^2 du = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2\frac{(x-t)^2}{2}} f(t)\bar{f}(x)\, dt\, dx. \tag{6}$$

Supposons que le fonction $f(t)$, outre d'être sommable comme il était supposé jusqu'ici, soit aussi à carré sommable. Cela étant, faisons tendre n vers l'infini. Envisageons d'abord le second membre. Appliquons aux fonctions

$$e^{-n^2\frac{(x-t)^2}{4}} f(t) \quad \text{et} \quad e^{-n^2\frac{(x-t)^2}{4}} \bar{f}(x)$$

l'inégalité de Schwarz; il vient que

$$\left| \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2\frac{(x-t)^2}{2}} f(t)\, \bar{f}(x)\, dt\, dx \right| \leqq \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2\frac{(x-t)^2}{2}} |f(t)|^2 dt\, dx.$$

En effectuant au second membre l'intégration par rapport à x, on obtient

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{n} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

En comparant ce résultat avec l'équation (6), il vient que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2n^2}} |F(u)|^2 du \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt,$$

et par le lemme bien connu de M. Fatou, il s'ensuit, pour $n = \infty$, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \tag{7}$$

Cette inégalité établie, nous sommes à même d'étendre la définition de la transformation de Fourier $T(f)$, donnée primitivement par la formule (2), à toute la classe L^2. Rappelons ce que l'on entend par transformation linéaire, portant sur la classe L^2 Tout d'abord, pour la commodité du langage et par la nature des choses, on convient de considérer comme identiques deux fonctions qui ne diffèrent que dans un ensemble de mesure nulle. Conformément à cette convention, nous parlerons d'une fonction déterminée aussi dans le cas, lorsque la fonction n'est déterminée qu'à une fonction additive près, s'annulant sauf dans un ensemble de mesure nulle. Ces conventions faites, une transformation $T(f)$ qui fait correspondre à chaque élément de la classe L^2 un élément déterminé de la même classe, sera dite linéaire lorsqu'elle est distributive, c'est-à-dire que

$$T(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 T(f_1) + \lambda_2 T(f_2)$$

et qu'elle est bornée, c'est qu'il existe une constante M de sorte que l'on ait pour toutes les $f(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |T(f)|^2 du \leqq M^2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \tag{8}$$

Envisageons maintenant la formule (2). Cette formule a un sens pour les fonctions sommables et, a fortiori, pour celles qui sont à la fois sommables et à carré sommable et qui constituent un sous-ensemble L^{12} de la classe L^2; mais elle est, jusqu'à présent, dépourvue de sens pour les éléments de L^2 qui restent. Quant à l'ensemble L^{12}, la formule (2) fait correspondre à chaque élément $f(t)$ de cet ensemble une fonction $T(f) = F(u)$ et l'inégalité (7) nous assure que $F(u)$ appartient à la classe L^2. De plus, grâce à cette même inégalité, l'hypothèse (8) est satisfaite pour les éléments de L^{12} et cela avec $M = 1$. La distributivité de $T(f)$ est évidente. Enfin, l'ensemble L^{12} contient toutes les combinaisons linéaires de ses éléments et il est partout dense dans la classe L^2, l'écart de deux fonctions f_1 et f_2 étant mesuré par

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} |f_1 - f_2|^2 dt\right]^{1/2},$$

c'est-à-dire les éléments limites étant définis à la base de la notion de la convergence en moyenne. En effet, pour s'approcher en moyenne d'un élément quelconque f^* de L^2 par des éléments $f_1, f_2, \ldots$ de L^{12} il suffit par exemple poser $f_n(t) = f^*(t)$ pour $t| < n$ et $f_n(t) = 0$ ailleurs.

Soit donc f^* un élément quelconque de L^2 et soit $\{f_n\}$ une suite d'éléments du sous-ensemble L^{12}, convergeant en moyenne vers l'élément f^*. Soit $\{F_n\}$ la suite qui y correspond par la formule (2); on aura, d'après l'inégalité (7), appliquée à la fonction $f = f_m - f_n$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_m(t) - F_n(t)|^2 dt \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f_m(t) - f_n(t)|^2 dt. \tag{9}$$

Comme, d'après l'hypothèse faite, la suite $\{f_n\}$ converge en moyenne et, par conséquent, le second membre de (9) tend vers zéro quand m et n vont à l'infini, il en sera de même quant au premier membre. Il s'ensuit que les F_n convergent en moyenne vers un élément déterminé F^* de L^2. En faisant correspondre cet élément à l'élément f^*, on aura défini la transformation de FOURIER $T(f)$ pour la classe L^2 complète et l'on voit immédiatement que cette transformation est univoquement déterminée et qu'elle est linéaire, c'est-à-dire qu'elle est distributive et bornée, avec $M = 1$.

4. Voilà maintenant le fait qui correspond, dans l'ordre d'idée que nous suivons, à la formule d'inversion de FOURIER.

Désignons par $\overline{T}(f)$ la transformation qui résulte de T en la faisant suivre d'un changement de signe de la variable, c'est à dire en faisant correspondre à $f(t)$ la fonction $F(-u)$. Il est manifeste que l'on peut aussi définir la transformation $\overline{T}$, pour l'ensemble L'^2, par la formule

$$\overline{T}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x)\, dx$$

et étendre cette définition, par continuité au sens de la convergence en moyenne, à toute la classe L^2. Je dis que l'on a $\overline{T} = T^{-1}$ ou ce qui revient au même, $\overline{T}T = E$, E désignant la transformation unité, celle qui fait correspondre chaque fonction à elle-même.

Avant d'aller à la démonstration de ce fait principal de notre théorie, observons qu'il implique, comme conséquence immédiate, la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2\, du = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt, \tag{10}$$

l'analogue de la formule de PARSEVAL. En effet, comme $F(u) = T(f)$, il faut avoir

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2\, du \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt$$

et d'autre part, la relation $\overline{T}(F) = f(t)$ ou ce qui revient au même, la relation $T(F) = f(-t)$ entraîne l'inégalité inverse.

5. Pour démontrer la relation $\overline{T}T = E$ ou $T\overline{T}(f) = f$, il suffira montrer que l'intégrale de la fonction $\overline{T}T(f)$ sur un intervalle (a, b) quelconque ne diffère pas de celle de la fonction f. En effet, d'après la théorie de M. LEBESGUE, deux fonctions qui ont la même intégrale indéfinie, ne peuvent différer l'une de l'autre que dans un ensemble de mesure nulle. De plus, il suffira constater cette identité seulement pour les fonctions appartenant à l'ensemble L^{12} puisque cet ensemble est partout dense dans L^2 et que, par conséquent, c'est E la seule transformation qui fait correspondre à eux-mêmes tous les éléments de L^{12}.

Nous partons des formules (4) et (5), dans lesquelles nous posons $g(x) = 1$ pour $a < x < b$ et égale à zéro ailleurs. En comparant les deux formules et en remplaçant, dans la seconde, l'intégrale double par deux intégrations successives, on obtient l'équation

$$(11) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} e^{-\frac{u^2}{2n^2}} F(u)\, du = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \int_a^b e^{-n^2 \frac{(x-t)^2}{2}} dx.$$

Considérons d'abord le second membre de cette équation. Par la substitution $x = t + \frac{y}{n}$, il devient

$$(12) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \int_{n(a-t)}^{n(b-t)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g_n(t)\, dt$$

où l'on a posé

$$g_n(t) = \int_{n(a-t)}^{n(b-t)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

La fonction $g_n(t)$ ne peut dépasser la valeur $\sqrt{2\pi}$, valeur de la même intégrale entre les limites $-\infty$, ∞; de plus, elle tend vers cette valeur, pour n infini, toujours que t est situé entre a et b, et elle tend vers 0 pour les valeurs de t extérieures à l'intervalle (a, b). Par conséquent, d'après le théorème de M. Lebesgue sur l'intégration terme à terme des suites ayant une fonction majorante sommable, l'intégrale (12), c'est-à-dire le second membre de la formule (11), tendra, pour n infini, vers l'intégrale de $f(t)$ entre a et b.

Quant au premier membre de la même formule, il peut être mis sous la forme

$$(13) \qquad \int_a^b [\, \overline{T}(e^{-\frac{u^2}{2n^2}} F(u))]\, dx.$$

Or, l'expression en parenthèse n'est que la fonction $F(u)$, à carré sommable et indépendante de n, multipliée par un facteur qui, pour n infini, tend vers la constante 1 tout en restant borné; donc on a, d'après le théorème de M. Lebesgue que nous venons d'appliquer,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| F(u) - e^{-\frac{u^2}{2n^2}} F(u) \right|^2 du \to 0,$$

c'est à dire que, la fonction en parenthèse converge en moyenne vers $F(u)$. Donc l'intégrande de (13) converge en moyenne vers la fonction $\overline{T}(F) = \overline{T}T(f)$ et l'intégrale (13), c'est à dire le premier membre de (11) tend vers l'intégrale de cette fonction entre a et b.

En résumé, le passage à la limite, pour n infini, dans les deux membres de (11) donne

$$\int_a^b \overline{T}T(f)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt,$$

C. Q. F. D.

(Reçu le 25 octobre 1927)