Involutions et surfaces continues.

(Deuxième communication).*)

Par B. de KERÉKJÁRTÓ (Szeged).

IV. Réductions de la représentation paramétrique d'une surface continue.

1°. Soit S une sphère, t une transformation univoque et continue de S, F la surface continue qui est l'image de S par t. *Supposons que chaque élément* $\mathfrak{P}$[1]) *de S ait pour ensemble complémentaire un seul domaine; nous allons démontrer que sous cette condition, la surface appartient au type de la sphère.*[2])

Cette proposition donne une extension directe du théorème de M. FRÉCHET concernant les représentations paramétriques des courbes continues[3]), et en même temps une généralisation d'un résultat sur les représentations des surfaces continues que j'ai obtenu antérieurement pour un cas spécial.[4])

La proposition en question est équivalente (d'après les développements du numéro III. de la première communication) à la suivante:

Soit $(\mathfrak{P})$ un ensemble d'éléments sur la sphère (chaque élément $\mathfrak{P}$ est un ensemble de points fermé et d'un seul tenant) tel que chaque point de la sphère appartient à un élément $\mathfrak{P}$ et à un seul. Supposons *(a)* que si les points $P_1, P_2, \ldots$ des éléments $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ tendent vers le point P_ω d'un élément $\mathfrak{P}_\omega$, l'ensemble limite de $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ soit un sous-ensemble de $\mathfrak{P}_\omega$; *(b)* que l'ensemble complémentaire d'un élément $\mathfrak{P}$ quelconque sur la sphère

---

*) Première communication, *ces Acta,* vol. 3, (1927) pp. 49 67.

1) voir l. c., p. 58.

2) l. c., p. 59.

3) voir l. c., p. 55.

4) l. c., note 17) de la page 66.

soit un seul domaine. Sous ces conditions, on peut établir une correspondance biunivoque et bicontinue entre les éléments $\mathfrak{P}$ de l'ensemble $(\mathfrak{P})$ et les points d'une sphère.

2°. Pour la démonstration de cet énoncé, nous avons besoin de quelques propositions concernant l'ensemble d'éléments $(\mathfrak{P})$. Nous considérons l'ensemble $(\mathfrak{P})$ comme un espace abstrait; c'est un espace (L) où l'on peut définir la limite par le moyen d'un écart (non nécessairement régulier).[5]) Nous entendons par une *$\mathfrak{P}$-courbe continue* une image univoque et continue de l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ formé d'éléments de cet espace; un *$\mathfrak{P}$-arc simple* respectivement une *$\mathfrak{P}$-courbe simple et fermée* seront définis comme une image biunivoque et bicontinue de l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$, respectivement d'une circonférence.

(A) Soit l un arc de cercle sur la sphère S; l'ensemble $\mathfrak{L}$ des éléments $\mathfrak{P}$ qui ont des points sur l forment une $\mathfrak{P}$-courbe continue.

En effet, à chaque point de l correspond un élément de $\mathfrak{L}$ et un seul; lorsque les points $P_1, P_2, \ldots$ de l tendent vers le point P_ω de l, les éléments correspondants $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ de $\mathfrak{L}$ ont pour élément limite l'élément $\mathfrak{P}_\omega$ de $\mathfrak{L}$ qui correspond à P_ω.

3°. Nous allons démontrer la proposition suivante:

(B) L'ensemble complémentaire d'un $\mathfrak{P}$-arc simple sur S est un seul domaine.

La démonstration s'obtient en généralisant une démonstration élégante due à M. ALEXANDER pour le théorème de JORDAN.[6]) Pour ce but, nous démontrerons d'abord une proposition auxiliaire, savoir:

(C) Soient M_1 et M_2 deux continus sur la sphère dont la partie commune est un seul continu K. Si A et B sont deux points de la sphère qui ne sont séparés ni par M_1, ni par M_2, ils ne sont séparés par $M_1 + M_2$ non plus.

Soit, en effet, $A\lambda_1 B$ une ligne polygonale sur S qui n'a pas de points communs avec M_2, et soit $A\lambda_2 B$ une autre ligne qui n'a pas de points sur M_2. Supposons que λ_1 et λ_2 n'aient pas de points communs sauf leurs extrémités A et B;[7]) le polygone simple

[5]) l. c., note [9]) à la page 58.

[6]) J. W. ALEXANDER, A proof of JORDAN's theorem about a simple closed curve, *Annals of Mathematics*, vol. 21., p. 180—184. (1920).

[7]) voir, par exemple, KERÉKJÁRTÓ, Vorlesungen über Topologie (Berlin, 1923) p. 62., note [1]).

$\pi = \lambda_1 + \lambda_2$ n'a aucun point commun avec K; disons donc que K est à l'intérieur de π. Construisons une triangulation de la sphère dont les triangles sont de diamètre inférieur à la distance des sous-ensembles de M_1 et de M_2 situès à l'extérieur de π. Les triangles de cette triangulation qui contiennent les points de M_1 extérieurs à π et sur π, forment avec π et son intérieur un domaine polygonale. La frontière de ce domaine contient un polygone qui a des points communs avec λ_1; la ligne polygonale obtenu de ce polygone en omettant la ligne λ_2, rejoint A et B et elle n'a pas de point sur $M_1 + M_2$.

En appliquant la proposition que nous venons de démontrer un nombre fini de fois, nous obtenons immédiatement la proposition suivante:

(C') Soient $M_1, M_2, \dots, M_n$ des continus sur la sphère S tels que la partie commune de M_i et M_{i+1} soit un continu et que M_i et M_{i+j} $(j \neq 0, \pm 1)$ n'aient pas de points communs. Si A et B sont deux points de la sphère qui ne sont séparés par aucun des continus M_i, ils ne sont pas séparés par l'ensemble $M_1 + M_2 + \dots + M_n$ non plus.

Pour démontrer la proposition *(B)*, soit $\mathfrak{L}$ un $\mathfrak{P}$-arc quelconque sur S et soient A et B deux points arbitraires de la sphère S qui n'appartiennent à aucun élément de $\mathfrak{L}$. Si $\mathfrak{P}_0$ est un élément arbitraire de $\mathfrak{L}$, il y a une ligne polygonale λ sur S qui joint A et B sans rencontrer $\mathfrak{P}_0$. Il y a donc un ε-voisinage de l'ensemble des points appartenants à $\mathfrak{P}_0$ sur la sphère qui ne contient aucun point de λ. Or il y a un intervalle $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ tel que les éléments correspondants aux nombres x de cet intervalle sont contenus entièrement dans le ε-voisinage de $\mathfrak{P}_0$ (correspondant à x_0). Déterminons donc pour chaque nombre x_0 de l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ un intervalle $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ tel que le sous-ensemble de $\mathfrak{L}$ correspondant à cet intervalle ne sépare pas les points A et B sur la sphère. D'après le théorème de Heine et Borel, il y a parmi ces intervalles un nombre fini recouvrant tout l'intervalle $(0 \leqq x \leqq 1)$; soient $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ les extrémités de ces intervalles rangées de telle façon que $0 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n+1} = 1$. Le sous-ensemble de $\mathfrak{L}$ correspondant à l'intervalle $x_i \leqq x \leqq x_{i+1}$ est donc un continu M_i qui ne sépare pas A et B. La partie commune de M_i et M_{i+1} est le continu formé par les points de l'élément qui correspond à x_{i+1}, tandisque M_i et M_{i+j} $(j \neq 0, \pm 1)$ n'ont aucun point commun. De la proposition *(C')*, ils'ensuit que $M_1 + M_2 + \ldots + M_n = \mathfrak{L}$ ne sépare pas les points A et B sur la sphère; cela démontre notre proposition *(B)*.

4⁰. Une $\mathfrak{P}$-courbe simple et fermée peut être considérée comme la somme de deux $\mathfrak{P}$-arcs simples qui n'ont aucun autre élément commun que leurs extrémités. D'un théorème de M. Rosenthal,[8]) on obtient, en tenant compte de notre proposition *(B)* le résultat suivant:

(D) Une $\mathfrak{P}$-courbe simple et fermée décompose la sphère S en précisément deux domaines.

Nous allons démontrer le complément suivant à la proposition *(D)*:

(E) Tout élément d'une $\mathfrak{P}$-courbe simple et fermée appartient à la $\mathfrak{P}$-frontière de tous les deux domaines déterminés par elle sur la sphère.

Soit $\mathfrak{P}_0$ un élément quelconque de la $\mathfrak{P}$-courbe $\mathfrak{L}$ et soit $\mathfrak{L}_0$ un arc arbitraire de $\mathfrak{L}$ contenant $\mathfrak{P}_0$; soit $\mathfrak{L}_1$ l'autre arc de $\mathfrak{L}$ déterminé par les extrémités de $\mathfrak{L}_0$. D'aprés la proposition *(B)*, l'arc $\mathfrak{L}_1$ ne décompose pas la sphère. Soient donc A et B deux points quelconques de la sphère, situés en deux domaines complémentaires différents de $\mathfrak{L}$. Soit $A\lambda B$ une ligne polygonale joignant A et B sans rencontrer $\mathfrak{L}_1$; λ a donc un point au moins sur $\mathfrak{L}_0$. Soient A_1 et B_1 des points de λ sur $\mathfrak{L}_0$ tels que les lignes AA_1 et BB_1 de λ ne contiennent pas des points de $\mathfrak{L}$ à part leurs extrémités. L'élément $\mathfrak{P}_1$ de $\mathfrak{L}$ contenant le point A_1 appartient à la $\mathfrak{P}$-frontière du domaine complémentaire de $\mathfrak{L}$ qui contient A; l'élément $\mathfrak{P}_2$ de $\mathfrak{L}$ contenant le point B_1 appartient à la $\mathfrak{P}$-frontière du domaine contenant B. Par conséquent, l'arc $\mathfrak{L}_0$ de $\mathfrak{L}$ contient d'éléments de tous les deux domaines. Comme $\mathfrak{L}_0$ est aussi voisin de $\mathfrak{P}_0$ que l'on veut, il s'ensuit que $\mathfrak{P}_0$ est un élément-limite des frontières de ces deux domaines. La $\mathfrak{P}$-frontière d'un $\mathfrak{P}$-domaine est un ensemble fermé d'éléments,[9]) par conséquent, $\mathfrak{P}_0$ appartient aux $\mathfrak{P}$-frontières de tous les deux domaines déterminés par $\mathfrak{L}$ sur la sphère.

(F) Chaque élément d'une $\mathfrak{P}$-courbe simple et fermée est accessible dans les deux domaines complémentaires de la courbe.

---

[8]) A. Rosenthal, Teilung der Ebene durch irreduzible Kontinua, *Sitzungsber. der Bayer. Akad. der Wiss.*, München, 1919, p. 102, Satz 6.

[9]) voir note [9]) à la page 58 de la première communication.

La démonstration de cette proposition s'obtient par une légère modification de ma démonstration pour l'accessibilité des points d'une courbe simple et fermée.[10])

5°. Nous allons démontrer la proposition suivante:

(G) Pour deux éléments quelconques $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$, il y a une $\mathfrak{P}$-courbe simple et fermée séparant ces deux éléments.

Si nous considérons les éléments $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ comme des ensembles de points sur la sphère S, ils sont deux ensembles fermés sans point commun Il y a donc un polygone simple et fermé π séparant ces deux ensembles sur la sphère. Désignons par Q_1 et Q_2 deux points de π qui appartiennent à deux éléments différents $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$, et désignons par l_1 et l_2 les deux lignes en lesquelles π est divisé par ces deux points. Les éléments $\mathfrak{P}$ qui ont des points sur l_1 respectivement sur l_2 forment une $\mathfrak{P}$-courbe continue $\mathfrak{B}_1$ resp. $\mathfrak{B}_2$ en vertu de la proposition *(A)*. D'après un théorème dû à Kaluzsay,[11]) il y a en chaque courbe continue pour deux points arbitraires de la courbe un arc simple joignant les deux points. En appliquant ce théorème à nos $\mathfrak{P}$-courbes $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$, déterminons un $\mathfrak{P}$-arc simple $\mathfrak{L}_1$ contenu en $\mathfrak{B}_1$ qui joigne $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$ et un $\mathfrak{P}$-arc simple $\mathfrak{L}_2$ contenu en $\mathfrak{B}_2$ joignant $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$. Soient l_1' et l_2' deux lignes polygonales sur la sphère qui joignent un point P_1 de $\mathfrak{P}_1$ avec un point P_2 de $\mathfrak{P}_2$ sans se couper d'ailleurs, de telle façon que l_1' n'ait pas de points sur $\mathfrak{L}_2$ el l_2' n'ait pas de points sur $\mathfrak{L}_1$; comme aucun des $\mathfrak{P}$-arcs $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}_2$ ne decompose la sphère, d'après la proposition *(B)*, cela est toujours possible. En partant de $\mathfrak{Q}_1$ sur $\mathfrak{L}_1$, considérons le premier élément de $\mathfrak{L}_1$ qui a un point sur l_1' et en retournant de cet élément sur $\mathfrak{L}_1$, soit $\mathfrak{Q}_1'$ le premier élément de $\mathfrak{L}_1$ qui appartient à $\mathfrak{L}_2$. En passant de $\mathfrak{Q}_2$ sur $\mathfrak{L}_1$ jusqu'au premier élément qui a un point sur l_1' et en

[10]) Vorlesungen über Topologie, p. 65.

[11]) Kaluzsay, A felületre vonatkozó Jordan-tétel megforditása (L'inverse du théorème de Jordan relatif aux surfaces), *Math. Phys. Lapok*, 24., p. 101–141 (1915). — Ce jeune géomètre hongrois bien doué disparu pendant la guerre — un élève de M. F. Riesz — a traité dans sa Thèse (Kolozsvár, 1915) le problème d'étendre le théorème de Schoenflies, inverse du théorème de Jordan, pour l'espace à trois dimension. Bien que sa solution du problème ne soit pas entièrement satisfaisante, dans son développement, il fournit des méthodes précieuses et des propositions intéressantes, parmi celles le théorème cité dans le texte. Le même théorème a été découvert plus tard par d'autres auteurs (Tietze, R. L. Moore) qui ne pouvaient pas connaître la Thèse ne publiée qu'en hongrois. Mais la démonstration de Kaluzsay a l'avantage d'une extrême simplicité; elle a été reproduite dans mon livre cité, p. 103.

retournant de cet élément, soit $\mathfrak{Q}_2'$ le premier élément de $\mathfrak{L}_1$ qui appartient à $\mathfrak{L}_2$. Les arcs $\mathfrak{L}_1'$ et $\mathfrak{L}_2'$ déterminés sur $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}_2$ par les éléments $\mathfrak{Q}_1'$, $\mathfrak{Q}_2'$ n'ont aucun élément en commun sauf leurs extrémités. Ils forment ensemble une $\mathfrak{P}$-courbe simple et fermée qui sépare les éléments $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ l'un de l'autre. Cela démontre la proposition *(G)*.

On peut démontrer de la même façon, en tenant compte des propositions *(D)*, *(E)* et *(F)* la proposition suivante:

Si $\mathfrak{L}$ est une $\mathfrak{P}$-courbe simple et fermée et si $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ sont deux éléments quelconques intérieurs à $\mathfrak{L}$ ou sur $\mathfrak{L}$, il y a un $\mathfrak{P}$-arc simple intérieur à $\mathfrak{L}$, sauf ses extrémités, qui sépare les éléments $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ l'un de l'autre à l'intérieur de $\mathfrak{L}$.

6°. Nous déterminons maintenant une suite d'éléments $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2, \ldots$ telle que les n_k premiers éléments soient ε_k-denses sur S ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots \to 0$, et $n_1 < n_2 < \ldots$). Cela veut dire que chaque surface circulaire sur la sphère S dont le diamètre est supérieur à ε_k, contient un point, au moins, appartenant à quelqu'un des éléments $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{n_k}$. Pour ce but, nous considérons une suite de triangulations successives de la sphère que nous désignons par $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ telles que chaque triangle de ζ_k soit de diamètre inférieur à $\varepsilon_k/2$; ensuite nous choisissons dans chaque triangle de $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ un point et nous ordonnons ces points en une suite P_1, $P_2, \ldots$ où les points pris des triangles de ζ_{i+1} succèdent aux points pris des triangles de ζ_i. Nous écrivons les éléments $\mathfrak{P}$ auxquels appartiennent les points $P_1, P_2, \ldots$ dans le même ordre, seulement nous omettons les éléments qui sont identiques à des éléments antécédents.

Autour de chaque élément $\mathfrak{P}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n_1$), nous considérons une *couronne* formé des éléments $\mathfrak{P}$ pour lesquels l'écart $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_i)$ est entre ε_1 et $2\varepsilon_1$. Dans chacune de ces couronnes, nous construisons en nous servant de la proposition *(G)* une $\mathfrak{P}$-courbe simple et fermée $\mathfrak{L}_i^{(1)}$ qui sépare les deux frontières de la couronne. Nous pouvons supposer que deux quelconques parmi les courbes $\mathfrak{L}_1^{(1)}, \mathfrak{L}_2^{(1)}, \ldots, \mathfrak{L}_{n_1}^{(1)}$ n'ont qu'un nombre fini d'éléments communs tels dont le voisinage contient d'éléments appartenants à l'une des deux courbes sans appartenir à l'autre. (Par exemple, la courbe $\mathfrak{L}_2^{(1)}$ n'a qu'un nombre fini d'arcs dont les extrémités appartiennent à $\mathfrak{L}_1^{(1)}$ et qui ont des points extérieurs à la couronne de $\mathfrak{P}_1$; nous gardons ces arcs de $\mathfrak{L}_2^{(1)}$ et nous remplaçons les autres par des arcs correspondants de $\mathfrak{L}_1^{(1)}$; etc.) Soit $\mathfrak{D}_i^{(1)}$ le $\mathfrak{P}$-domaine fermé consistant en l'intérieur de $\mathfrak{L}_i^{(1)}$ et sa frontière (c'est donc le domaine déterminé par $\mathfrak{L}_i^{(1)}$ contenant $\mathfrak{P}_i$ et la courbe même). Chaque élément de $\mathfrak{D}_i^{(1)}$ a de $\mathfrak{P}_i$ un écart inférieur à $2\varepsilon_1$ et chaque élément $\mathfrak{P}$ dont l'écart de $\mathfrak{P}_i$ est inférieur à ε_1 appartient à $\mathfrak{D}_i^{(1)}$; nous appelons $\mathfrak{P}_i$ *centre* du domaine $\mathfrak{D}_i^{(1)}$. Tout élément $\mathfrak{P}$ appartient à un, au moins, des $\mathfrak{P}$-domaines $\mathfrak{D}_1^{(1)}$, $\mathfrak{D}_2^{(1)}, \ldots, \mathfrak{D}_n^{(1)}$. De la même façon, nous construisons les $\mathfrak{P}$-courbes $\mathfrak{L}_1^{(k)}, \mathfrak{L}_2^{(k)}, \ldots, \mathfrak{L}_{n_k}^{(k)}$ pour chaque k et supposons que toutes les courbes $\mathfrak{L}_r^{(s)}$ $(r = 1, 2, \ldots, n_s;\ s = 1, 2, \ldots, k)$ n'aient deux à deux qu'un nombre fini de points communs. Nous désignons par $\mathfrak{D}_r^{(s)}$ le domaine fermé déterminé par $\mathfrak{L}_r^{(s)}$ contenant l'élément $\mathfrak{P}_r$.

Si $\mathfrak{P}$ est un élément appartenant aux domaines fermés $\mathfrak{D}_{r_1}^{(1)}$, $\mathfrak{D}_{r_2}^{(2)}, \ldots$ les écarts de $\mathfrak{P}$ des centres $\mathfrak{P}_{r_1}, \mathfrak{P}_{r_2}, \ldots$ de ces domaines tendent vers zéro; en effet, l'écart d'un élément quelconque de $\mathfrak{D}_{r_k}^{(k)}$ du centre $\mathfrak{P}_{r_k}$ est inférieur à $2\varepsilon_k$. De là il s'ensuit que deux éléments différents $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ ne peuvent appartenir à tous les domaines de la suite.

Les $\mathfrak{P}$-courbes $\mathfrak{L}_1^{(1)}, \mathfrak{L}_2^{(1)}, \ldots, \mathfrak{L}_{n_1}^{(1)}$ déterminent un nombre fini de $\mathfrak{P}$-domaines $\mathfrak{d}_1^{(1)}, \mathfrak{d}_2^{(1)}, \ldots, \mathfrak{d}_{m_1}^{(1)}$ sur la sphère S. Sur une autre sphère S', nous pouvons construire un réseau polygonale isotope à ce réseau (dans le sens combinatoire). Soit, en effet, $\pi_1^{(1)}$ un polygone sur S'; la $\mathfrak{P}$-courbe $\mathfrak{L}_2^{(1)}$ consiste d'un nombre fini de $\mathfrak{P}$-arcs dont les extrémités appartiennent à $\mathfrak{L}_1^{(1)}$ et qui n'ont d'autres points sur $\mathfrak{L}_1^{(1)}$ ou qui sont identiques avec des arcs de $\mathfrak{L}_1^{(1)}$. Nous transformons la $\mathfrak{P}$-courbe $\mathfrak{L}_1^{(1)}$ topologiquement en le polygone $\pi_1^{(1)}$; aux éléments communs à $\mathfrak{L}_1^{(1)}$ et $\mathfrak{L}_2^{(1)}$ correspondent par cette transformation un nombre fini de lignes et un nombre fini d'autres points de $\pi_1^{(1)}$. Si $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ sont deux éléments communs à $\mathfrak{L}_1^{(1)}$ et $\mathfrak{L}_2^{(1)}$ qui sont joints par un arc de $\mathfrak{L}_2^{(1)}$ ne contenant aucun autre élément de $\mathfrak{L}_1^{(1)}$, nous joignons les deux points correspondants de $\pi_1^{(1)}$ par une ligne polygonale sur S' passant à l'intérieur ou à l'extérieur de $\pi_1^{(1)}$ suivant que l'arc correspondant de $\mathfrak{L}_2^{(1)}$ soit intérieur ou extérieur à $\mathfrak{L}_1^{(1)}$. Ensuite, nous établissons entre cette ligne polygonale et entre l'arc correspondant de $\mathfrak{L}_2^{(1)}$ une homéomorphie. En continuant ainsi, nous obtenons un réseau polygonale sur S', formé par les polygones $\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, \ldots, \pi_{n_1}^{(1)}$, isotope au réseau sur S formé par $\mathfrak{L}_1^{(1)}, \mathfrak{L}_2^{(1)}, \ldots, \mathfrak{L}_{n_1}^{(1)}$, et une homéomorphie entre les éléments du réseau sur S et les points de l'autre.

Nous considérons alors les $\mathfrak{P}$-courbes $\mathfrak{L}_1^{(2)}, \mathfrak{L}_2^{(2)}, \ldots, \mathfrak{L}_{n_2}^{(2)}$ et la subdivision des domaines $\mathfrak{d}_1^{(1)}, \mathfrak{d}_2^{(1)}, \ldots, \mathfrak{d}_{m_1}^{(1)}$ par ces courbes en les domaines $\mathfrak{d}_1^{(2)}, \mathfrak{d}_2^{(2)}, \ldots, \mathfrak{d}_{m_2}^{(2)}$. Nous déterminons les polygones $\pi_1^{(2)}$, $\pi_2^{(2)}, \ldots, \pi_{n_2}^{(2)}$ sur S' de telle façon que le réseau formé par $\pi_1^{(1)}$, $\pi_2^{(1)}, \ldots, \pi_{n_1}^{(1)}, \pi_1^{(2)}, \pi_2^{(2)}, \ldots, \pi_{n_2}^{(2)}$ sur S' soit isotope au réseau formé par $\mathfrak{L}_1^{(1)}, \mathfrak{L}_2^{(1)}, \ldots, \mathfrak{L}_{n_1}^{(1)}, \mathfrak{L}_1^{(2)}, \mathfrak{L}_2^{(2)}, \ldots, \mathfrak{L}_{n_2}^{(2)}$ sur S. La continuation de ces opérations est claire. On peut constuire les polygones $\pi_r^{(s)}$ de telle façon que leurs diamètres tendent vers zéro lorsque s croît indéfiniment, ce que nous supposons dans la suite.

L'homéomorphie que nous établissons successivement entre les points des polygones $\pi_r^{(s)}$ et les éléments des $\mathfrak{P}$-courbes $\mathfrak{L}_r^{(s)}$ s'étend aux sphères S' et S toutes entières. En effet, à chaque suite monotone de domaines fermés $\mathfrak{d}_{r_1}^{(1)}, \mathfrak{d}_{r_2}^{(2)}, \ldots$ (dont chacun contient le suivant), correspond un élément $\mathfrak{P}$ et un seul contenu dans tous les domaines de la suite et inversement à chaque élément $\mathfrak{P}$ correspond une suite monotone de domaines de cette sorte. D'autre part, à chaque suite monotone de domaines correspond sur S' une suite monotone de domaines déterminé par les polygones $\pi_r^{(s)}$ qui tend vers un seul point P. En faisant correspondre l'élément $\mathfrak{P}$ déterminé par une suite monotone de domaines $\mathfrak{d}_r^{(s)}$ le point P de S' déterminé par la suite correspondante de domaines sur S', nous obtenons donc une correspondance biunivoque et bicontinue entre les éléments $\mathfrak{P}$ de S et entre les points P de S'.

Par cela, nous avons démontré la proposition énoncé au début de IV. 1°, ce que nous voulons encore formuler en une forme indépendante de la terminologie du texte:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface continue (image univoque et continue d'une sphère) définie par les fonctions

$$x = f(u, v),\ y = g(u, v), \ldots,\ z = h(u, v)$$

puisse être représentée par des fonctions

$$x = F(u, v),\ y = G(u, v), \ldots,\ z = H(u, v)$$

qui ne sont simultanément constantes sur aucun vrai continu de la sphère, est ce que chaque continu sur lequel les fonctions $f, g, \ldots, h$ sont simultanément constantes et qui n'est pas sous-ensemble d'un continu ayant la même propriété, ait pour ensemble complémentaire sur la sphère un seul domaine.

(Reçu le 27 octobre 1927)