Über die Grenzen der Abschnitte gewisser Potenzreihen.

Von LEOPOLD FEJÉR in Budapest.

Einleitung.

1. Betrachten wir irgendeine, im Innern des um den Nullpunkt der Ebene geschlagenen Einheitskreises reguläre und positive harmonische Funktion. Bezeichnet dann

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

die unendliche harmonische Entwickelung dieser Funktion, genommen an irgendeiner, aber festen Stelle des abgeschlossenen Einheitskreises, dann sind die arithmetischen Mittel der Partialsummen der Reihe (1) alle nichtnegativ;[1]) d. h. es ist

$$S_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} \geqq 0, \tag{2}$$

wo

$$s_k = \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Bezeichnet die Reihe (1) die, für eine Stelle des abgeschlossenen Einheitskreises $|z| \leqq 1$ genommene Potenzreihe von $f(z)$, wo $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär ist und die Ungleichung $|f(z)| \leqq 1$ befriedigt, so ist[2])

$$|S_n| \leqq 1 \tag{3}$$

für

$$n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Durch alleinige Anwendung der Eigenschaften (2) oder (3) der *arithmetischen Mittel der Partialsummen* der Reihe (1) wurde

---

[1]) FEJÉR 2, § 2, N° 10, 11. S. auch Fussnote [4]) der zitierten Arbeit.

[2]) FEJÉR 2, Theorem XI. LANDAU 1, S. 17.

nun im Laufe der Zeit eine Anzahl von Sätzen entwickelt, die sich auf die *Partialsummen* s_n selbst der Reihe (1) beziehen. Sie rühren von den Herren[3]) LANDAU, SCHUR, SZEGŐ, ROGOSINSKI und vom Verfasser her. Dass bei dem Beweise ausschliesslich die Fundamentalungleichung (2) resp. (3) der arithmetischen Mittel der Fourierreihe resp. der Potenzreihe zur Verwendung kam, wurde aber vielfach übersehen, oder nicht ausdrücklich betont. Ich habe es also für nützlich gefunden eine solche, demnächst erscheinende, Darstellung (FEJÉR 4) dieser Untersuchungen abzufassen, aus welcher u. A. hervorgeht, dass die ins Auge gefassten Sätze eigentlich Spezialfälle allgemeinerer Sätze sind, die sich auf die Abschnitte einer beliebigen unendlichen Reihe

$$a_0+a_1+\ldots+a_n+\ldots$$

beziehen, wenn für sie die Ungleichungen $S_n \geqq 0$, oder die Ungleichungen $|S_n| \leqq 1$, $n=0, 1, 2, \ldots$, gültig sind. Etc. Ich muss aber noch hinzufügen, dass es sich dabei nicht nur um die Konsequenzen der Prämisse (2), oder (3) i. B. auf die Partialsummen

$$a_0,\ a_0+a_1, \ldots\ a_0+a_1+\ldots+a_n, \ldots,$$

sondern auch i. B. auf die Polynome

$$a_0,\ a_0+a_1 r, \ldots a_0+a_1 r+\ldots+a_n r^n, \ldots$$

handelt, wo $0<r<1$.

2. Vorliegende Note hat genau dieselbe Tendenz, als meine eben erwähnte Arbeit. Von einer beliebigen unendlichen Reihe mit komplexen Gliedern

(4) $$a_0+a_1+\ldots+a_n+\ldots$$

sei wieder etwa

(5) $$|S_n| \leqq 1,\ n=0\ 1\ 2$$

bekannt. Ausse

(6)

bestehen. Was $_n|$, d. h. der absoluten Werte (aussagen?

Oder es s

(7) $|$ 1

gültig. Was läs soluten Partialsummen $|s_n|$ au

[3]) Ausführlic finden.

In vorliegender Note, die im Wesentlichen eine Analyse meiner Note in den *Acta Mathematica*[4]) enthält, beschäftige ich mich nur mit der zweiten Frage, und werde auf die erste in einer anderen Note zurückkehren.

Schliesslich bemerke ich noch, dass ich bei der Behandlung dieses Gegenstandes, in der erwähnten Arbeit und in der vorliegenden Note, eigentlich noch eine weitere, übrigens an der Hand liegende, Vereinfachung angestrebt habe. Sie besteht darin, dass ich statt der unendlichen Reihe eine endliche Summe $a_0+a_1+\ldots+a_n$, statt der Potenzreihe ein Polynom $a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ betrachte.

§ 1. Lösung einer Aufgabe des Maximums.

3. Aufgabe. *Es sei n irgendeine feste positive ganze Zahl. Man bestimme das Maximum von*

$$|s_n|=|a_0+a_1+\ldots+a_n|, \tag{8}$$

wenn die komplexen Grössen $a_0, a_1, \ldots a_n$ die beiden Bedingungen

$$|S_n|=\left|\frac{(n+1)a_0+na_1+\ldots+a_n}{n+1}\right|\leqq 1 \tag{9}$$

$$|a_1|^2+2|a_2|^2+\ldots+n|a_n|^2\leqq 1 \tag{10}$$

erfüllen.

Da

$$S_n=\frac{(n+1)a_0+na_1+\ldots+a_n}{n+1}=s_n-\frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{n+1}, \tag{11}$$

so ist

$$s_n=S_n+\frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{n+1}=S_n+R_n, \tag{12}$$

und

$$|s_n|\leqq|S_n|+|R_n|. \tag{13}$$

Nun ist aber

$$|R_n|\leqq\frac{1}{n+1}(|a_1|+2|a_2|+\ldots+n|a_n|)= \tag{14}$$

$$=\frac{1}{n+1}(\sqrt{1}\,.\sqrt{1}\,|a_1|+\sqrt{2}\,.\sqrt{2}\,|a_2|+\ldots+\sqrt{n}\,.\sqrt{n}\,|a_n|),$$

also ist, auf Grund der SCHWARZschen Ungleichung,

$$|s_n|\leqq|S_n|+\frac{1}{n+1}\cdot\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot\sqrt{|a_1|^2+2|a_2|^2+\ldots+n|a_n|^2}. \tag{15}$$

---

4) FEJÉR 3.

Berücksichtige ich jetzt die Bedingungen (9) und (10), so erhalte ich die Ungleichung

$$|s_n| \leqq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n+1}}. \tag{16}$$

4. Ich behaupte nun, dass $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ das gesuchte Maximum ist; d. h. ich behaupte, dass in der Ungleichung (16), bei passender Wahl der den Bedingungen (9) und (10) genügenden Grössen $a_0, a_1, \ldots, a_n$, das Gleichheitszeichen tatsächlich gültig sein kann.

Wann ist in (16) die Gültigkeit des Gleichheitszeichens möglich?

Zunächst dürfen die Grössen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nicht alle verschwinden, denn dann wäre doch $s_n = 0$. Weiter muss in (14) das Gleichheitszeichen gültig sein, woraus unmittelbar

$$a_1 = \varrho_1 e^{i\theta}, \; a_2 = \varrho_2 e^{i\theta}, \ldots, a_n = \varrho_n e^{i\theta} \tag{17}$$

folgt. Da aber auch bei der Anwendung der Schwarzschen Ungleichung keine tatsächliche Verkleinerung[5]) eintreten darf, so muss die Proportion

$$\sqrt{1} : \sqrt{2} : \ldots : \sqrt{n} = \sqrt{1}\varrho_1 : \sqrt{2}\varrho_2 : \ldots : \sqrt{n}\varrho_n \tag{18}$$

gelten, d. h. es muss

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = \varrho_n = \varrho \neq 0 \tag{19}$$

gelten.

Weiter muss

$$|a_1|^2 + 2|a_2|^2 + \ldots + n|a_n|^2 = 1 \tag{20}$$

sein, d. h.

$$\varrho^2 (1 + 2 + \ldots + n) = 1,$$

d. h.

$$\varrho = \sqrt{\frac{2}{n(n+1)}}. \tag{21}$$

Es muss aber auch

$$|S_n| = \left| \frac{(n+1)a_0 + na_1 + \ldots + a_n}{n+1} \right| = 1 \tag{22}$$

sein, d. h. es muss sein

$$\frac{1}{n+1} \left| (n+1)a_0 + \varrho e^{i\theta} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right| = 1,$$

[5]) Pólya—Szegö 1, Bd. 1, S. 54, Aufgabe 80, und die Lösung auf S. 210.

$$\left| a_0 + \frac{n}{2} \varrho e^{i\theta} \right| = 1,$$

$$a_0 + \frac{n}{2} \varrho e^{i\theta} = e^{i\varphi},$$

$$a_0 = e^{i\varphi} - \frac{n}{2} \varrho e^{i\theta} = e^{i\varphi} - \frac{n}{2} \sqrt{\frac{2}{n(n+1)}} e^{i\theta},$$

$$a_0 = e^{i\varphi} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n+1}} e^{i\theta}, \tag{23}$$

wozu noch das schon früher gefundene (in den Gleichungen (17), (19) und (21) enthaltene) Resultat

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \sqrt{\frac{2}{n(n+1)}} e^{i\theta} \tag{24}$$

kömmt.

Für die so abgeleiteten Werte von $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sind nun tatsächlich einerseits die Bedingungen (9) und (10) befriedigt, andererseits ist

$$|s_n| = \left| e^{i\varphi} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n+1}} e^{i\theta} + n \sqrt{\frac{2}{n(n+1)}} e^{i\theta} \right| = \tag{25}$$

$$= \left| e^{i\varphi} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n+1}} e^{i\theta} \right| = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n+1}},$$

aber nur dann, wenn, endlich, $e^{i\varphi} = e^{i\theta}$ ist.

Die Lösung unserer Maximumaufgabe lautet also:

Der grösste Wert von

$$|a_0 + a_1 + \ldots + a_n| \tag{26}$$

ist, bei den Nebenbedingungen (9) *und*[6]) (10),

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n+1}}, \tag{27}$$

---

[6]) Wenn ich die Bedingung (9) fallen lasse und nur die Bedingung (10) beibehalte, so ist der grösste angenommene Wert von

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n|$$

gleich

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}.$$

der nur für

$$\left\{\begin{aligned} a_0 &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n+1}} \\ a_1 = a_2 = \ldots = a_n &= \sqrt{\frac{2}{n(n+1)}} \end{aligned}\right. \tag{28}$$

angenommen wird, wenn ich von einen gemeinsamen komplexen Faktor vom absoluten Betrage 1 *der Grössen* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *absehe.*

5. Die 2 Nebenbedingungen meiner Aufgabe lauteten

$$|S_n| = \left|\frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1}\right| \leqq 1,$$

$$|a_1|^2 + 2|a_2|^2 + \ldots + n|a_n|^2 \leqq 1.$$

Welchen Wert hat das Maximum von $|s_n|$, wenn ich jetzt die erste Bedingung durch die $(n+1)$ Bedingungen

$$|S_0| \leqq 1, \quad |S_1| \leqq 1, \ldots, |S_n| \leqq 1 \tag{29}$$

ersetze, und die zweite unverändert beibehalte, wo

$$S_k = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_k}{k+1}, \quad s_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_k, \tag{30}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots n.$$

Die Antvort lautet: das Maximum von $|s_n|$ ist wieder

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

B e w e i s. Das neue Maximum kann nicht grösser sein als das alte. Aber auch nicht kleiner, weil das Wertsysthem (28) auch die Bedingungen (29) erfüllt. Da nämlich die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ in (28) positiv sind, also ist die Folge

$$S_0, S_1, \ldots, S_n \tag{31}$$

monoton wachsend, und da doch $S_n = 1$ ist, so ist $S_0 < 1$, $S_1 < 1, \ldots, S_{n-1} < 1$.

§ 2. Ein Satz über die rationale ganze Funktion. Über die Schlichtheit von $1 + z + \ldots + z^n$.

6. *Das Polynom*

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \tag{32}$$

der komplexen Veränderlichen z und mit komplexen Koeffizienten *erfülle die Bedingung*

$$(33)\qquad |a_1|^2+2|a_2|^2+\ldots+n|a_n|^2\leqq 1.$$

Ist dann

$$(34)\qquad |S_n|=\left|\frac{(n+1)a_0+na_1+\ldots+a_n}{n+1}\right|\leqq 1,$$

so ist

$$(35)\qquad |s_n|=|a_0+a_1+\ldots+a_n|\leqq 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

Von einem konstanten Faktor vom absoluten Betrage 1 *abgesehen ist*

$$(36)\qquad G(z)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n+1}}+\sqrt{\frac{2}{n(n+1)}}(z+z^2+\ldots+z^n).$$

das einzige Polynom, für welches in (35) *das Zeichen der Gleichheit, d. h. für welches*

$$(37)\qquad |a_0+a_1+\ldots+a_n|=1+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

gültig ist.

Ist auf dem ganzem Einheitskreise $|z|=1$ *die Ungleichung*

$$(38)\qquad |S_n(z)|=\left|\frac{(n+1)a_0+na_1z+\ldots+a_nz^n}{n+1}\right|\leqq 1$$

gültig, so ist auch auf dem ganzem Einheitskreise

$$(39)\qquad |a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n|\leqq 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

Dieser Satz ist mit dem Satze von § 1 einfach identisch.

7. Mit Rücksicht auf § 3 ist es nicht ohne Interesse zu untersuchen, wie „weit" das Extremalpolynom $G(z)$ unter (36) „schlicht" ist. Statt $G(z)$ können wir $1+z+\ldots+z^n$, oder natürlich auch

$$(40)\qquad g_{n-1}(z)=g(z)=1+z+\ldots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z}$$

untersuchen. Da, für $z_1\neq 1$, $z_2\neq 1$, $z_1\neq z_2$

$$(41)\qquad \frac{g(z_1)-g(z_2)}{z_1-z_2}=\frac{1-(z_1^{n-1}+\ldots+z_2^{n-1})+z_1z_2(z_1^{n-2}+\ldots+z_2^{n-2})}{(1-z_1)(1-z_2)},$$

so ist, wenn weiter

$$(42)\qquad |z_1|\leqq\varrho<1,\ |z_2|\leqq\varrho<1,$$

$$(43)\qquad \left|\frac{g(z_1)-g(z_2)}{z_1-z_2}\right|\geqq\frac{1-n\varrho^{n-1}-(n-1)\varrho^n}{|1-z_1||1-z_2|}>0,$$

wenn ϱ kleiner ist als die einzige (übrigens zwischen 0 und 1 liegende) positive Wurzel der trinomischen Gleichung

$$1-n\varrho^{n-1}-(n-1)\varrho^n=0.$$

Ich habe also erhalten:

Das Polynom

(44) $$1+z+\ldots+z^n,$$

wo $n\geqq 1$, *ist im Kreise* $|z|<\varrho_n$ *schlicht, d. h. nimmt in diesem Kreise nicht zweimal denselben Wert an, wenn* ϱ_n *die einzige positive Wurzel der trinomischen Gleichung*

(45) $$1-(n+1)\varrho^n-n\varrho^{n+1}=0$$

bezeichnet.

Ist n *gerade,* so ist $|z|=\varrho_n$ der *grösste* Kreis, in dessen Inneren (44) schlicht ist. Da nämlich

(46) $$g_n'(z)=(1+z+\ldots+z^n)'=\frac{1-(n+1)z^n+nz^{n+1}}{(1-z)^2},$$

so ist im Falle eines geraden n

$$g_n'(-\varrho_n)=\frac{1-(n+1)\varrho_n^n-n\varrho_n^{n+1}}{(1+\varrho_n)^2}=0,$$

woraus folgt, dass $1+z+\ldots+z^n$ für $|z|<\varrho$ nicht schlicht ist, wenn der Radius $\varrho>\varrho_n$ ist. Es ist z. B. $\varrho_2=\frac{1}{2}$.

Der Fall eines ungeraden n muss jedenfalls noch untersucht werden, da für $n=1$

$$1-2\varrho_1-\varrho_1^2=0,$$

also

$$\varrho_1=\sqrt{2}-1$$

ist, während doch $1+z$ in der ganzen Ebene schlicht ist.

Schliesslich bemerke ich, dass, für ein beliebiges n, aus der Gleichung (45)

$$(n+1)\varrho_n^n+n\varrho_n^{n+1}=1,$$

wegen $0<\varrho_n<1$, die Ungleichungen

$$(n+1)\varrho_n^{n+1}+n\varrho_n^{n+1}<1$$

$$(n+1)\varrho_n^n+n\varrho_n^n>1$$

folgen, also die Ungleichungen

(47) $$\frac{1}{(2n+1)^{\frac{1}{n}}}<\varrho_n<\frac{1}{(2n+1)^{\frac{1}{n+1}}},$$

aus welchen u. A.

(48) $$\lim_{n=\infty} \varrho_n = 1$$

geschlossen werden kann.[7])

§ 3. Über die Grenzen der Partialsummen gewisser Potenzreihen.

8. Es sei

(49) $$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

eine für $|z| < 1$ konvergente Potenzreihe, welche den Bedingungen

I) $$|f(z)| \leqq 1 \text{ für } |z| < 1$$

II) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |a_\nu|^2 \leqq 1$$

genüge leistet.

Ist die Bedingung I) erfüllt, und ist speziell die Funktion $f(z)$ für $|z| < 1$ schlicht, so ist auch die Bedingung II) sicher erfüllt.

Was lässt sich über die Grenzen der Zahlen

(50) $$|s_0|, |s_1|, \ldots |s_n|, \ldots$$

feststellen, wo $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

Weiss man nur, dass die Bedingung I) allein erfüllt ist, so kann bekanntlich für ein spezielles $f(z)$ der $\limsup\limits_{n=\infty} |s_n| = +\infty$ sein.[8])

Weiss man nur, dass die Bedingung II) allein erfüllt ist, so kann sogar $\lim\limits_{n=\infty} |s_n| = +\infty$ sein. Z. B. für

(51) $$f(z) = \log 2 \,.\, \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^n}{n \log n}.$$

Sind aber die Bedingungen I), II) gleichzeitig erfüllt, so ist

(52) $$|s_n| \leqq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \text{ für } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

---

[7]) Über die Schlichtheit der Abschnitte einer schlichten Potenzreihe handelt eine demnächst in den *Math. Annalen* erscheinende, und bemerkenswerte allgemeine Theoreme enthaltende Arbeit von Herrn G. Szegö, die den Titel führt: Zur Theorie der schlichten Abbildungen.

[8]) Fejér 1. Landau 1, S. 7–9, 17–29. Die Konstruktion eines Beispiels ist nicht ganz leicht. $\lim\limits_{n=\infty} |s_n| = +\infty$ ist *nicht* möglich, weil nach Herrn I. Schur

$$\frac{|s_0| + |s_1| + \ldots + |s_n|}{n+1} \leqq 1$$

ist.

also insbesondere

(53) $$|s_n| \leqq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1{\cdot}7071\ldots, \text{ für } n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Betrachtet man nämlich einen Abschnitt

(54) $$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

der Potenzreihe (49), so ist, nach einem Satze des Verfassers,[9])

(55) $$|S_n| = \left| \frac{(n+1)\,a_0 + n\,a_1 + \ldots + a_n}{n+1} \right| \leqq 1,$$

mit Rücksicht auf die Ungleichung I). Aus II) folgt weiter, dass

(56) $$\sum_{\nu=1}^{n} \nu\,|a_\nu|^2 \leqq 1.$$

Also ist auf das Polynom (54) der Satz des § 2 anwendbar, und unsere Behauptung ist erwiesen.

Es sei besonders hervorgehoben,[10]) dass, wenn $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär, schlicht und absolut genommen $\leqq 1$ ist, alle Koeffizientensummen absolut genommen kleiner sind als $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, d. h.

(57) $$|a_0 + a_1 + \ldots + a_n| \leqq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1{\cdot}17071\ldots,$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots .$$

9. Ich bemerke schliesslich, dass $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1{\cdot}7071\ldots$ nicht die beste, bis jetzt bekannte obere Grenze der Folge

(58) $$|s_0|, |s_1|, \ldots |s_n|, \ldots$$

ist, wo die Folge (58) zu einer beliebigen Funktion $f(z)$ gehört, die den Bedingungen I) und II) gleichzeitig genüge leistet. In einer demnächst erscheinenden Arbeit ist es Herrn Szegö[11]) durch eine scharfsinnige Betrachtung gelungen diese obere Grenze von $1{\cdot}7071\ldots$ auf $1{\cdot}616\ldots$ herabzudrücken, wobei er sich u. A. auf einen Rogosinski—Szegöschen Satz stützt.

Dass die fragliche obere Grenze sich nicht unter den Wert $1 + \frac{1}{4} = 1{\cdot}25$ herabdrücken lässt, ist sehr leicht einzusehen.[12])

Budapest, den 16. Juni 1928.

---

[9]) S. die Fussnote [2])

[10]) Fejér 3.

[11]) S. die Einleitung seiner in der Fussnote [7]) erwähnten Arbeit.

[12]) Fejér 3.

Litteraturverzeichniss.

L. Fejér

1. Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze, *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften*. Jahrgang 1910, 3. Abhandlung, 17 Seiten.

2. Über gewisse durch die Fouriersche und Laplacesche Reihe definierten Mittelkurven und Mittelflächen, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, Bd. XXXVIII (1914).

3. Über die Koeffizientensumme einer beschränkten und schlichten Potenzreihe, *Acta Mathematica*, Bd. 49, (1926), S. 183–190.

4. Einige Sätze, die sich auf das Vorzeichen einer ganzen rationalen Funktion beziehen; nebst Anwendungen dieser Sätze auf die Abschnitte und Abschnittsmittelwerte von ebenen und räumlichen harmonischen Entwicklungen und von beschränkten Potenzreihen, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, Jahrgang 1928.

E. Landau

1. Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin (1916).

G. Pólya und G. Szegö

1. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. 1, Berlin (1925).

(*Eingegangen am 18. Juni 1928*)