Über die Laplacesche Reihe.

Von G. Szegö in Königsberg.

Im Bd. 95 der *Math. Annalen* hat Herr W. Rogosinski[1]) ein bemerkenswertes Theorem über trigonometrische Reihen veröffentlicht, das in einem für die Anwendungen besonders wichtigen Spezialfalle folgendermassen lautet:

A) *Es sei $f(x)$ eine stetige und periodische Funktion mit der Periode 2π und $s_n(x)$ bezeichne den n-ten Abschnitt der zu $f(x)$ gehörigen* Fourierschen *Reihe. Dann gilt, wenn man unter p eine beliebige ungerade Zahl versteht,*

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{s_n\left(x+p\frac{\pi}{2n}\right)+s_n\left(x-p\frac{\pi}{2n}\right)}{2}=f(x)$$

Ist dagegen p eine beliebige reelle, aber keine ungerade Zahl, so gibt es geeignete stetige Funktionen, für welche dieser Grenzwert nicht existiert.

Die Bedeutung dieses Satzes wird klar, wenn man beachtet, dass es stetige Funktionen $f(x)$ gibt, für welche die Abschnittsfolge $s_0(x), s_1(x), s_2(x), \ldots, s_n(x), \ldots$ ihrer Fourierschen Reihe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ oszilliert.[2])

Die Auszeichnung der ungeraden Zahlen p wird durch das folgende allgemeinere Theorem aufgeklärt:

B) *Es sei ξ eine beliebige reelle Zahl. Man hat unter den gleichen Voraussetzungen wie vorhin,*

$$(2) \qquad \frac{s_n\left(x+\frac{\xi}{n}\right)+s_n\left(x-\frac{\xi}{n}\right)}{2}-(s_n(x)-f(x))\cos\xi \to f(x) \quad (n\to\infty).$$

---

[1]) Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen, *Mathematische Annalen*, Bd. 95 (1925), S. 110—134.

[2]) Vgl. L. Fejér, Beispiele stetiger Funktionen mit divergenter Fourierreihe, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 137 (1909), S. 1—5.

Diese Grenzwertgleichung gilt gleichmässig in ξ, wenn $-\xi_0 \leqq \xi \leqq \xi_0$ ist, wobei ξ_0 eine positive Zahl bedeutet.

Herr ROGOSINSKI beweist ferner in seiner oben angeführten Arbeit den folgenden Satz :[3])

C) *Es sei ξ eine beliebige reelle Zahl. Wir betrachten eine beliebige trigonometrische Reihe mit der Abschnittsfolge $s_0(x)$, $s_1(x)$, $s_2(x), \ldots, s_n(x), \ldots$. Wenn diese Folge an einer gewissen Stelle x C_1-summierbar ist, u. zw. mit der Summe s, so ist*

$$(3)\qquad \frac{s_n\left(x+\frac{\xi}{n}\right)+s_n\left(x-\frac{\xi}{n}\right)}{2}-(s_n(x)-s)\cos\xi \to s \quad (n\to\infty).$$

Diese Grenzwertgleichung gilt gleichmässig in ξ, wenn $-\xi_0 \leqq \xi \leqq \xi_0$ ist, $\xi_0 > 0$.

Da die FOURIERsche Reihe einer stetigen Funktion $f(x)$ nach einem klassischen Satz von L. FEJÉR[4]) an jeder Stelle x C_1-summierbar ist, u. zw. mit der Summe $f(x)$, so folgt hieraus unmittelbar der Satz B.

Bemerkung. Wir haben bisher nur die „0-dimensionalen Mittelwerte“

$$(4)\qquad \frac{s_n\left(x+\frac{\xi}{n}\right)+s_n\left(x-\frac{\xi}{n}\right)}{2}$$

der Abschnitte $s_n(x)$ betrachtet. Bilden wir nun die „linearen Mittelwerte“

$$(5)\qquad \frac{n}{2\xi}\int\limits_{x-\frac{\xi}{n}}^{x+\frac{\xi}{n}} s_n(t)\,dt,^{5})$$

so gilt für diese ein ganz ähnliches Theorem wie C, mit dem einzigen Unterschied, dass an Stelle von (3) die Grenzwertgleichung

$$(3')\qquad \frac{n}{2\xi}\int\limits_{x-\frac{\xi}{n}}^{x+\frac{\xi}{n}} s_n(t)\,dt-(s_n(x)-s)\,\frac{\sin\xi}{\xi}\to s \quad (n\to\infty)$$

[3]) A. a. O. [1]), S. 119, Satz 3.

[4]) L. FEJÉR, Untersuchungen über FOURIERsche Reihen, *Mathematische Annalen*, Bd. 58 (1904), S. 51–69, insb. S. 59.

[5]) Für $\xi=0$ ist dieser Ausdruck durch $s_n(x)$ und $\frac{\sin\xi}{\xi}$ in (3′) durch 1 zu ersetzen.

tritt. Auch diese Gleichung gilt gleichmässig in ξ, wenn $-\xi_0 \leqq \xi \leqq \xi_0$ ist, $\xi_0 > 0$. Der Beweis verläuft ganz analog wie der von (3).

Die Behauptung des Satzes C ist freilich mit der folgenden gleichwertig: Es sei $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ eine Folge von reellen Zahlen mit der Eigenschaft

$$\alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right); \tag{6}$$

dann gilt

$$\frac{s_n(x+\alpha_n)+s_n(x-\alpha_n)}{2} - (s_n(x)-s)\cos n\alpha_n \to s \quad (n \to \infty). \tag{3''}$$

Ähnlich kann übrigens auch (3′) umgeformt werden.

* * *

In der vorliegenden Arbeit stelle ich mir die Aufgabe, die eben ausgesprochenen Sätze auf das räumliche Analogon der Fourierschen Reihen, auf die s. g. Laplaceschen Reihen zu übertragen. Ich setze dabei die einfachsten Eigenschaften der Kugelfunktionen als bekannt voraus.[6]

Wir gehen von einer auf der Einheitskugel E definierten stetigen Funktion $f(\mathfrak{q}) = f(\vartheta, \varphi)$ aus. Hierbei bedeutet $\mathfrak{q}$ einen beliebigen Punkt von E, mit ϑ und φ bezeichnen wir ihre beiden geographischen Koordinaten. Es ist

$$0 \leqq \vartheta \leqq \pi, \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi.$$

Die zu $f(\mathfrak{q}) = f(\vartheta, \varphi)$ gehörige Laplacesche Reihe sei

$$Y_0(\vartheta, \varphi) + Y_1(\vartheta, \varphi) + Y_2(\vartheta, \varphi) + \ldots + Y_n(\vartheta, \varphi) + \ldots, \tag{7}$$

wo bekanntlich

$$Y_n(\vartheta, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \iint\limits_E f(\vartheta', \varphi')\, P_n(\cos\gamma)\, d\sigma \tag{8}$$

ist. Dabei bezeichnet $P_n(x)$ das n-te Legendresche Polynom, γ die sphärische Distanz der beiden Punkte $\mathfrak{q}(\vartheta, \varphi)$ und $\mathfrak{q}'(\vartheta', \varphi')$, schliesslich $d\sigma$ das Flächenelement der Einheitskugel E.

Auch hier empfiehlt es sich neben den Laplaceschen Reihen allgemeiner beliebige, *formal gebildete* Reihen von der Form (7) zu betrachten, wobei $Y_n(\vartheta, \varphi)$ eine beliebige Kugelflächenfunktion n-ter Ordnung bedeutet. Diese nach Kugelflächenfunktionen fort-

[6]) Man. vgl. über diesen Gegenstand etwa: R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik (Berlin: J. Springer, 1924), Siebentes Kapitel, §§ 3—5.

schreitenden Reihen entsprechen im dreidimensionalen Gebiete den gewöhnlichen trigonometrischen Reihen.

Es sei nun $s_n(\vartheta, \varphi) = s_n(\mathfrak{q})$ der n-te Abschnitt einer solchen Reihe. Wir definieren zwei Mittelwerte von $s_n(\mathfrak{q})$, welche im folgenden benützt werden sollen und den Mittelwerten (4) bzw. (5) entsprechen. Es sei $0 < \eta < \pi$, und man betrachte auf der Einheitskugel einerseits den Kreis um den Punkt $\mathfrak{q}$ als Mittelpunkt und vom Radius η, anderseits die Kalotte um den Punkt $\mathfrak{q}$ als Mittelpunkt und vom Radius η. (Es handelt sich also um die Gesamtheit aller Punkte der Einheitskugel, deren sphärische Distanz von $\mathfrak{q}$ gleich η bzw. höchstens gleich η ist.) Wir bezeichnen mit $\mathfrak{m}[\mathfrak{q}, \eta;\, s_n(\mathfrak{q}')]$ den Integralmittelwert von $s_n(\mathfrak{q}')$ über diesem Kreis und mit $\mathfrak{M}[\mathfrak{q}, \eta;\, s_n(\mathfrak{q}')]$ den Integralmittelwert von $s_n(\mathfrak{q}')$ über dieser Kalotte. Diese Mittelwerte sind offensichtlich invariant gegenüber Drehungen der Einheitskugel. In dem Spezialfalle, wo $\mathfrak{q}$ mit dem Nordpol $\mathfrak{p}$ übereinstimmt, erhält man z. B.

$$\mathfrak{m}[\mathfrak{p}, \eta;\, s_n(\mathfrak{q}')] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s_n(\eta, \varphi)\, d\varphi \tag{9}$$

und

$$\mathfrak{M}[\mathfrak{p}, \eta;\, s_n(\mathfrak{q}')] = \frac{1}{2\pi(1-\cos\eta)}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\eta} s_n(\vartheta, \varphi)\sin\vartheta\, d\vartheta\right\} d\varphi. \tag{10}$$

Der lineare Mittelwert (9) ist das räumliche Analogon von (4), der zweidimensionale Mittelwert (10) ist das räumliche Analogon von (5).

Es gilt das folgende Theorem:

A') *Es sei $s_n(\mathfrak{q})$ der n-te Abschnitt der* Laplace*schen Reihe einer auf der Einheitskugel definierten stetigen Funktion $f(\mathfrak{q})$. Bilden wir den Mittelwert $\mathfrak{m}\left[\mathfrak{q}, \frac{\xi}{n};\, s_n(\mathfrak{q}')\right]$ von $s_n(\mathfrak{q}')$ (ξ reell und fest)*[7]*, so konvergiert dieser für $n \to \infty$ gegen $f(\mathfrak{q})$, vorausgesetzt, dass ξ eine Nullstelle der 0-ten Besselschen Funktion $J_0(x)$ ist.*

---

[7]) Hier und im folgenden bedeutet $\mathfrak{m}\left[\mathfrak{q}, \frac{\xi}{n};\, s_n(\mathfrak{q}')\right]$, ferner auch $\mathfrak{M}\left[\mathfrak{q}, \frac{\xi}{n};\, s_n(\mathfrak{q}')\right]$ für $\xi = 0$ den Abschnittswert $s_n(\mathfrak{q})$, für negatives ξ dagegen den der Zahl $-\xi$ entsprechenden Mittelwert. Wir haben freilich n von vorherein so gross zu wählen, dass $\left|\frac{\xi}{n}\right| < \pi$ ausfällt.

Ist dagegen ξ keine Nullstelle der Besselschen Funktion $J_0(x)$, so gibt es geeignete stetige Funktionen $f(\mathfrak{q})$, für welche die Folge dieser Integralmittelwerte bei $n\to\infty$ divergiert.

Dem Satz B entspricht:

B′) *Es sei ξ eine beliebige reelle Zahl. Man hat unter den gleichen Voraussetzungen wie in* A

$$(11)\qquad \mathfrak{m}\left[\mathfrak{q},\frac{\xi}{n};\,s_n(\mathfrak{q}')\right]-(s_n(\mathfrak{q})-f(\mathfrak{q}))J_0(\xi)\to f(\mathfrak{q})\quad(n\to\infty).$$

Diese Grenzwertgleichung gilt gleichmässig in ξ, wenn $-\xi_0\leqq\xi\leqq\xi_0$ ist, wobei ξ_0 eine positive Zahl bedeutet.

Wir beweisen weiter unten das folgende Theorem, welches die beiden vorangehenden enthält:

C′) *Es sei ξ eine beliebige reelle Zahl. Wir betrachten eine beliebige nach Kugelflächenfunktionen fortschreitende Reihe mit der Abschnittsfolge $s_0(\mathfrak{q}), s_1(\mathfrak{q}), s_2(\mathfrak{q}),\ldots, s_n(\mathfrak{q}),\ldots$. Wenn diese Folge in einem gewissen Punkte $\mathfrak{q}$ der Einheitskugel C_1-summierbar ist, u. zw. mit der Summe s, so ist*

$$(12)\qquad \mathfrak{m}\left[\mathfrak{q},\frac{\xi}{n};\,s_n(\mathfrak{q}')\right]-(s_n(\mathfrak{q})-s)J_0(\xi)\to s\quad(n\to\infty).$$

Diese Grenzwertgleichung gilt gleichmässig in ξ, wenn $-\xi_0\leqq\xi\leqq\xi_0$ ist, $\xi_0>0$.

Der entsprechende Satz über die zweidimensionalen Mittelwerte $\mathfrak{M}\left[\mathfrak{q},\frac{\xi}{n};\,s_n(\mathfrak{q}')\right]$ lautet wie folgt:

C″) *Unter den gleichen Voraussetzungen wie in* C *gilt*

$$(13)\qquad \mathfrak{M}\left[\mathfrak{q},\frac{\xi}{n};\,s_n(\mathfrak{q}')\right]-(s_n(\mathfrak{q})-s)\left(2\frac{J_1(\xi)}{\xi}\right)\to s\quad(n\to\infty).$$

Hier bedeutet $J_1(x)$ die erste Besselsche Funktion.

Auch diese Grenzwertgleichung gilt gleichmässig in ξ, wenn $-\xi_0\leqq\xi\leqq\xi_0$ ist, $\xi_0>0$.

Wählt man also für ξ eine Nullstelle von $J_0(x)$ bzw. $\frac{J_1(x)}{x}$, so konvergieren $\mathfrak{m}\left[\mathfrak{q},\frac{\xi}{n};\,s_n(\mathfrak{q}')\right]$ bzw. $\mathfrak{M}\left[\mathfrak{q},\frac{\xi}{n};\,s_n(\mathfrak{q}')\right]$ für $n\to\infty$ gegen s. Wir sehen, dass die ausgezeichnete Rolle der Funktionen $\cos x$ und $\frac{\sin x}{x}$ im Raume die Funktionen $J_0(x)$ und $\frac{J_1(x)}{x}$ übernehmen. Sie haben bekanntlich unendlich viele, u. zw. lauter reelle Nullstellen.

Die Theoreme B′, C′, C″ können freilich ähnlich umgeformt werden wie oben (3″), indem man eine beliebige Folge von reellen Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ mit der Eigenschaft (6) wählt und die Mittelwerte $\mathfrak{m}[\mathfrak{q}, \alpha_n; s_n(\mathfrak{q}')]$ und $\mathfrak{M}[\mathfrak{q}, \alpha_n; s_n(\mathfrak{q}')]$ betrachtet.

In § 1 schicke ich gewisse Eigenschaften der LEGENDREschen Polynome und der LAPLACEschen Reihe voraus, welche später benötigt werden. § 2 enthält den Beweis des Theorems C′, § 3 den analogen Beweis des Theorems C″.

§ 1.

Hilfssätze.

1. In der vorliegenden Arbeit spielt der folgende Satz eine Rolle:

I. *Es sei $P_n(x)$ das n-te* LEGENDRE*sche Polynom. Dann gilt für beliebige reelle Werte von ξ, u. zw. gleichmässig für $-\xi_0 \leqq \xi \leqq \xi_0$, $\xi_0 > 0$,*

$$P_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) = w_0(\xi) + \frac{w_1(\xi)}{n} + \frac{w_2(\xi)}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \tag{14}$$

wobei $w_0(x)$, $w_1(x)$ und $w_2(x)$ wohlbestimmte ganze transzendente Funktionen sind, von denen $w_1(x)$ und $w_2(x)$ an der Stelle $x = 0$ von der zweiten bzw. vierten Ordnung verschwinden.[8] *Es ist übrigens*

$$w_0(x) = J_0(x). \tag{15}$$

Man beweist dies besonders einfach auf Grund der LAPLACEschen Integraldarstellung der LEGENDREschen Polynome:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1}\cos t)^n \, dt.$$

Es ist danach

$$P_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\cos\frac{\xi}{n} + i\sin\frac{\xi}{n}\cos t\right)^n dt.$$

Nun gilt gleichmässig in ξ und t $(-\xi_0 \leqq \xi \leqq \xi_0,\ 0 \leqq t \leqq \pi)$

[8]) Die „Gleichmässigkeit" des O-Gliedes bedeutet, dass es mit n^3 multipliziert dem absoluten Betrage nach kleiner bleibt als eine nur von ξ_0 abhängende Konstante. In ähnlichem Sinne ist im folgenden die Gleichmässigkeit von O-Gliedern in irgend welchen Variablen gedacht.

$$\cos\frac{\xi}{n}+i\sin\frac{\xi}{n}\cos t=1+\frac{i\xi\cos t}{n}-\frac{\xi^2}{2n^2}-\frac{i\xi^3\cos t}{6n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

so dass

$$\left(\cos\frac{\xi}{n}+i\sin\frac{\xi}{n}\cos t\right)^n$$

$$=\exp\left\{n\left[\frac{i\xi\cos t}{n}-\frac{\xi^2}{2n^2}-\frac{i\xi^3\cos t}{6n^3}+\frac{\xi^2\cos^2 t}{2n^2}+\frac{i\xi^3\cos t}{2n^3}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{i\xi^3\cos^3 t}{3n^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{i\xi\cos t-\frac{\xi^2\sin^2 t}{2n}+\frac{i\xi^3\cos t\sin^2 t}{3n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\}$$

$$=e^{i\xi\cos t}\left\{1-\frac{\xi^2\sin^2 t}{2n}+\frac{i\xi^3\cos t\sin^2 t}{3n^2}+\frac{\xi^4\sin^4 t}{8n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\}$$

ist, woraus die Behauptung folgt. Man hat übrigens

$$w_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos t}\,dt=J_0(x).$$

$$w_1(x)=-\frac{x^2}{2}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos t}\sin^2 t\,dt=-\frac{x^2}{2}(J_0''(x)+J_0(x))=$$

$$=\frac{x}{2}J_0'(x)=-\frac{x}{2}J_1(x).$$

Eine leichte Rechnung liefert weiter

$$w_2(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos t}\left(\frac{ix^3\cos t\sin^2 t}{3}+\frac{x^4\sin^4 t}{8}\right)dt=$$

$$=-\frac{x}{12}J_0'(x)-\frac{x^2}{24}J_0(x).$$

Man sieht ohne weiteres, dass $w_1(x)$ für $x=0$ von der zweiten Ordnung verschwindet; ausserdem bestätigt man ohne Schwierigkeit, dass $x=0$ eine vierfache Nullstelle für $w_2(x)$ ist.

2. Es wird ferner Gebrauch gemacht von dem Satz

II. *Die* Laplace*sche Reihe einer auf der Einheitskugel gegebenen überall stetigen Funktion $f(\vartheta,\varphi)$ ist in jedem Punkte der Einheitskugel C_1-summierbar mit der Summe $f(\vartheta,\varphi)$.*

Diese Eigenschaft der LAPLACEschen Reihe ist zum ersten Mal von T. H. GRONWALL bewiesen worden. Einfachere Beweise stammen von F. LUKÁCS und L. FEJÉR. Bezüglich der Literatur vgl. die Arbeit von L. FEJÉR, Über die Summabilität der LAPLACEschen Reihe durch arithmetische Mittel, *Mathematische Zeitschrift*, Bd. 24 (1925), S. 267—284, vgl. die Fussnoten [1] und [2].

§ 2

Beweis des Theorems C′.

1. Wegen der oben erwähnten Invarianz des Mittelwertes $\mathfrak{m}[\mathfrak{q}, \eta; s_n(\mathfrak{q}')]$ gegen Drehungen der Einheitskugel kann angenommen werden, dass der Punkt $\mathfrak{q}$, um den wir den Mittelwert bilden, mit dem Nordpol $\mathfrak{p}$ übereinstimmt.

Es sei

$$Y_\nu(\mathfrak{q}) = Y_\nu(\vartheta, \varphi) =$$
$$= a_\nu P_\nu(\cos\vartheta) + \sum_{\mu=1}^{\nu} (a_\nu^{(\mu)} \cos\mu\varphi + b_\nu^{(\mu)} \sin\mu\varphi)\, P_\nu^\mu(\cos\vartheta)$$

eine beliebige Kugelflächenfunktion ν-ter Ordnung (die $P_\nu^\mu(\cos\vartheta)$ bedeuten, wie üblich, die zugeordneten Funktionen). Der um den Nordpol $\mathfrak{p}$ gebildete lineare Mittelwert von $Y_\nu(\mathfrak{q}')$ ist dann gleich

$$\mathfrak{m}[\mathfrak{p}, \eta; Y_\nu(\mathfrak{q}')] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Y_\nu(\eta, \varphi)\, d\varphi = a_\nu P_\nu(\cos\eta) = Y_\nu(0, \varphi)\, P_\nu(\cos\eta).$$

Bezeichnen wir also mit

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{16}$$

diejenige numerische Reihe, in welche unsere Reihe (7) in $\mathfrak{p}$ übergeht, so wird der um $\mathfrak{p}$ gebildete lineare Mittelwert von $s_n(\mathfrak{q}')$

$$\mathfrak{m}[\mathfrak{p}, \eta; s_n(\mathfrak{q}')] = a_0 P_0(\cos\eta) + a_1 P_1(\cos\eta) + \ldots + a_n P_n(\cos\eta),$$

d. h.

$$\mathfrak{m}\left[\mathfrak{p}, \frac{\xi}{n}; s_n(\mathfrak{q}')\right] = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right).$$

2. Die Reihe (16) sei nun C_1-summierbar und ihre Summe $s = 0$. Wir setzen

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s_n,$$

so dass s_n mit dem Wert von $s_n(\mathfrak{q})$ im Nordpol übereinstimmt. Es sei ferner

$$s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n = S_n;$$

dann ist also

(17)
$$S_n = o(n).$$

Man hat

$$\mathfrak{m}\left[\mathfrak{p}, \frac{\xi}{n};\ s_n(\mathfrak{q}')\right] =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-2} S_\nu \left[P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) - 2P_{\nu+1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) + P_{\nu+2}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)\right]$$
$$+ S_{n-1}\left[P_{n-1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) - 2P_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)\right] + S_n P_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n-2} S_\nu \left[P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) - 2P_{\nu+1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) + P_{\nu+2}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)\right]$$
$$+ S_{n-1}\left[P_{n-1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) - P_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)\right] + s_n P_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right).$$

Es genügt nun, behaupte ich, folgende Tatsachen nachzuweisen:

$$a)\qquad \sum_{\nu=0}^{n-2} |S_\nu| \left|P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) - 2P_{\nu+1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) + P_{\nu+2}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)\right| = o(1);$$

$$b)\qquad n\left|P_{n-1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) - P_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)\right| = O(1).$$

In der Tat schliesst man hieraus

$$\mathfrak{m}\left[\mathfrak{p}, \frac{\xi}{n};\ s_n(\mathfrak{q}')\right] = o(1) + o(1) + s_n P_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) =$$
$$= s_n J_0(\xi) + s_n O\left(\frac{1}{n}\right) + o(1) = s_n J_0(\xi) + o(1),$$

weil doch wegen (17)

$$s_n = S_n - S_{n-1} = o(n)$$

ist.

3. Zu dem Beweis von *a)* und *b)* benutzen wir in wesentlichem Masse den Satz I. Es ist $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$

(18)
$$P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right) = P_\nu\left(\cos\frac{\frac{\nu}{n}\xi}{\nu}\right) =$$
$$= w_0\left(\frac{\nu}{n}\xi\right) + \frac{w_1\left(\frac{\nu}{n}\xi\right)}{\nu} + \frac{w_2\left(\frac{\nu}{n}\xi\right)}{\nu^2} + \frac{t(\nu, n, \xi)}{\nu^3},$$

wobei die Zahlen $t(\nu, n, \xi)$ dem absoluten Betrage nach sämtlich unterhalb einer festen, nur von ξ_0 abhängenden positiven Konstante bleiben. Dasselbe gilt für die im folgenden mit t_1 und t_2 bezeichneten Zahlen.

Hieraus folgt

$$P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)-2P_{\nu+1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)+P_{\nu+2}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)=$$

$$=\left\{w_0\left(\frac{\nu}{n}\xi\right)-2w_0\left(\frac{\nu+1}{n}\xi\right)+w_0\left(\frac{\nu+2}{n}\xi\right)\right\}$$

$$+\frac{\xi}{n}\left\{\frac{w_1\left(\frac{\nu}{n}\xi\right)}{\frac{\nu}{n}\xi}-2\frac{w_1\left(\frac{\nu+1}{n}\xi\right)}{\frac{\nu+1}{n}\xi}+\frac{w_1\left(\frac{\nu+2}{n}\xi\right)}{\frac{\nu+2}{n}\xi}\right\}$$

$$+\frac{\xi^2}{n^2}\left\{\frac{w_2\left(\frac{\nu}{n}\xi\right)}{\left(\frac{\nu}{n}\xi\right)^2}-2\frac{w_2\left(\frac{\nu+1}{n}\xi\right)}{\left(\frac{\nu+1}{n}\xi\right)^2}+\frac{w_2\left(\frac{\nu+2}{n}\xi\right)}{\left(\frac{\nu+2}{n}\xi\right)^2}\right\}+\frac{t_1(\nu,n,\xi)}{\nu^3}$$

Beachten wir nun, dass $\frac{w_1(x)}{x}$ und $\frac{w_2(x)}{x^2}$ ganze Funktionen mit reellen Koefizienten sind, so liefert der TAYLORsche Lehrsatz, dass die drei Ausdrücke in den geschweiften Klammern $\{\ \}$ dem absoluten Betrage nach kleiner bleiben als eine nur von ξ_0 abhängende positive Konstante, dividiert durch n^2. Folglich ist

$$\left|P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)-2P_{\nu+1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)+P_{\nu+2}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)\right|<A\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{\nu^3}\right),$$

wo $A=A(\xi_0)$ nur von ξ_0 abhängt.

Wir bezeichnen jetzt mit ω eine feste positive ganze Zahl und wählen n so gross, dass $n-2>\omega$ ist. Die in *a)* auftretende Summe ist dann kleiner als

$$\sum_{\nu=1}^{\omega}|S_\nu|\left|P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)-2P_{\nu+1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)+P_{\nu+2}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)\right|+$$

$$+\frac{A}{n^2}\sum_{\nu=\omega+1}^{n-2}|S_\nu|+A\sum_{\nu=\omega+1}^{n-2}\frac{|S_\nu|}{\nu^3}.$$

Die erste Summe strebt hier für $n\to\infty$ gegen 0, weil doch bei festem ν für $n\to\infty$

$$P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)-2P_{\nu+1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)+P_{\nu+2}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)\to 0$$

gilt. Die zweite Summe ist kleiner als

$$\varepsilon(\omega)\sum_{\nu=\omega+1}^{n-2}\nu<\varepsilon(\omega)\,n^2,$$

wenn $\varepsilon(\omega)$ die obere Grenze von $\frac{|S_\nu|}{\nu}$ für $\nu>\omega$ bezeichnet.

Die dritte ist schliesslich kleiner als

$$\varepsilon(\omega)\sum_{\nu=\omega+1}^{n-2}\frac{1}{\nu^2}<\frac{\pi^2}{6}\varepsilon(\omega).$$

Nun konvergiert aber $\varepsilon(\omega)$ für $\omega\to\infty$ gegen 0, womit *a)* bewiesen ist.

Um *b)* zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass aus (18)

$$P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)-P_{\nu+1}\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)=w_0\left(\frac{\nu}{n}\xi\right)-w_0\left(\frac{\nu+1}{n}\xi\right)+\frac{t_2(\nu,n,\xi)}{\nu}$$

folgt. Für $\nu=n-1$ ergibt sich hieraus die Behauptung unmittelbar.

Damit ist das Theorem C′ bewiesen.

§ 3.

Beweis des Theorems C″.

Man kann auch in diesem Falle annehmen, dass der Punkt $\mathfrak{q}$, um den der zweidimensionale Mittelwert zu bilden ist, mit dem Nordpol $\mathfrak{p}$ übereinstimmt. Es ist mit den gleichen Bezeichnungen wie in § 2

$$\mathfrak{M}[\mathfrak{p},\eta;Y_\nu(\mathfrak{q}')]=\frac{1}{2\pi(1-\cos\eta)}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^\eta Y_\nu(\vartheta,\varphi)\sin\vartheta\,d\vartheta\right\}d\varphi$$

$$=\frac{a_\nu}{1-\cos\eta}\int_0^\eta P_\nu(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta.$$

Setzen wir also

$$(19)\quad \frac{1}{1-\cos\eta}\int_0^\eta P_\nu(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta=\frac{1}{1-\cos\eta}\int_{\cos\eta}^1 P_\nu(t)\,dt=Q_\nu(\cos\eta)$$

($Q_\nu(x)$ ist ein Polynom ν-ten Grades), so handelt es sich um den Ausdruck

$$\mathfrak{M}\left[\mathfrak{p},\frac{\xi}{n};s_n(\mathfrak{q}')\right]=\sum_{\nu=0}^n a_\nu Q_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right).$$

Wir sehen hieraus, dass der Beweis ganz analog zu führen ist wie in § 2, mit dem einzigen Unterschied, dass die $P_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)$ überall durch die $Q_\nu\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)$ zu ersetzen sind. Das einzige, was wir also nachzuweisen haben, ist eine analoge Grenzwertgleichung für $Q_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)$ wie (14), d. h.

$$Q_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)=w_0^*(\xi)+\frac{w_1^*(\xi)}{n}+\frac{w_2^*(\xi)}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right), \tag{20}$$

wo $w_0^*(x)$, $w_1^*(x)$, $w_2^*(x)$ ganze Funktionen sind, wo es ferner wesentlich ist, dass $w_1^*(x)$ und $w_2^*(x)$ für $x=0$ mindestens von der ersten bzw. zweiten Ordnung verschwinden.

Dieser Satz ist aus Satz I leicht herzuleiten, sogar mit dem Zusatze, dass (20) in ξ gleichmässig gilt, wenn $-\xi_0\leqq\xi\leqq\xi_0$ ist, wobei ξ_0 eine positive Zahl bedeutet.

Der Beweis in § 1, 1 zeigt nämlich, dass man das O-Glied in (14) in der Form $\xi^2 O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ schreiben kann.[9]) Man hat also

$$Q_n\left(\cos\frac{\xi}{n}\right)=\frac{1}{1-\cos\frac{\xi}{n}}\int_0^{\frac{\xi}{n}} P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$=\frac{1}{n\left(1-\cos\frac{\xi}{n}\right)}\int_0^{\xi} P_n\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right)\sin\frac{\vartheta}{n}\, d\vartheta$$

$$=\frac{1}{n\left(1-\cos\frac{\xi}{n}\right)}\int_0^{\xi}\left(w_0(\vartheta)+\frac{w_1(\vartheta)}{n}+\frac{w_2(\vartheta)}{n^2}\right)\left(\frac{\vartheta}{n}-\frac{\vartheta^3}{6n^3}\right)d\vartheta+$$
$$+\frac{\xi^2}{n\left(1-\cos\frac{\xi}{n}\right)}O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$=\frac{1}{\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^4}{24n^2}}\int_0^{\xi}\left(w_0(\vartheta)+\frac{w_1(\vartheta)}{n}+\frac{w_2(\vartheta)}{n^2}\right)\left(\vartheta-\frac{\vartheta^3}{6n^2}\right)d\vartheta+$$
$$+\frac{\xi^2}{\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^4}{24n^2}}O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$=\left(\frac{2}{\xi^2}+\frac{1}{6n^2}\right)\int_0^{\xi}\left(\vartheta w_0(\vartheta)+\frac{\vartheta w_1(\vartheta)}{n}+\frac{\vartheta w_2(\vartheta)-\frac{\vartheta^3}{6}w_0(\vartheta)}{n^2}\right)d\vartheta+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

---

[9]) Es folgt sogar, wie man leicht sieht, $\xi^4 O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. — Herr L. Kalmár macht mich aufmerksam, dass die Benutzung dieser Tatsache sich durch eine geringfügige Abänderung des im Texte stehenden Beweises vermeiden lässt.

Wir haben folglich

$$w_0^*(x) = \frac{2}{x^2}\int_0 \vartheta\, w_0(\vartheta)\, d\vartheta = \frac{2}{x^2}\int_0 \vartheta J_0(\vartheta)\, d\vartheta,$$

$$w_1^*(x) = \frac{2}{x^2}\int_0 \vartheta\, w_1(\vartheta)\, d\vartheta,$$

$$w_2^*(x) = \frac{2}{x^2}\int_0 \left(\vartheta\, w_2(\vartheta) - \frac{\vartheta^3}{6} w_0(\vartheta)\right) d\vartheta + \frac{1}{6}\int_0 \vartheta\, w_0(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Wegen Satz I sind nun $w_0^*(x)$, $w_1^*(x)$, $w_2^*(x)$ ganze Funktionen, man sieht ferner leicht, dass $w_1^*(x)$ und $w_2^*(x)$ an der Stelle $x = 0$ von der zweiten bzw. vierten Ordnung verschwinden. Es gilt schliesslich

$$w_0^*(x) = \frac{2}{x^2}\int_0 \frac{d}{d\vartheta}[\vartheta J_1(\vartheta)]\, d\vartheta = 2\frac{J_1(x)}{x},$$

womit der Satz C″ bewiesen ist.

Königsberg i. Pr., Mai 1928

(*Eingegangen am 1. Juni 1928*)