Über die Umkehrung eines Satzes aus der Variationsrechnung.

Von JULIUS SCHAUDER in Wien.

Herr HAAR hat für zweidimensionale Variationsprobleme einen dem bekannten DU BOIS REYMONDschen Lemma analogen Satz gefunden.[1]) Der Satz des Herrn HAAR lautet:

Satz: In einem einfach zusammenhängenden Bereiche G denken wir uns zwei messbare, beschränkte Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$ [2]) gegeben. Wir behaupten:

Das Kurvenintegral $\int u dx - v dy$ genommen entlang einer beliebigen geschlossenen Kurve C verschwindet immer dann, wenn für jede am Rande R des Gebietes G verschwindende, einer LIPSCHITZschen Bedingung genügende Funktion $\xi(x, y)$ die Beziehung

$$\iint\limits_G \left[u(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial y} + v(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] dx\, dy = 0 \tag{1}$$

gilt.

Die Forderung des Verschwindens des Kurvenintegrales kann auch wie folgt ausgesprochen werden: Es gibt eine Hilfsfunktion $\omega(x, y)$, die einer LIPSCHITZschen Bedingung genügt, so dass die Gleichungen

$$u(x, y) = \frac{\partial \omega}{\partial x}; \quad v(x, y) = -\frac{\partial \omega}{\partial y} \tag{2}$$

1) A. HAAR, Über die Variation der Doppelintegrale, *Journal für r. u. a. Mathematik*, **146** (1919) S. 1—18. A. HAAR, Über das PLATEAUsche Problem, *Math. Annalen*, **97** (1927), S. 124—158. Vergleiche auch: L. LICHTENSTEIN, Bemerkungen über das Prinzip der virtuellen Verrückungen in der Hydrodynamik inkompressibler Flüssigkeiten, *Annales de la société polonaise de mathématique*, III (1924), S. 20—28.

2) Die Funktionen sollen auch bei der Annäherung an den Rand beschränkt bleiben.

bestehen. Der HAARsche Satz sagt also aus, dass aus (1) die Gleichungen (2) gefolgert werden können. Darüber hinaus wollen wir nun zeigen, dass hier auch die Umkehrung gilt, d. i. aus (2) folgt (1). Diese Umkehrung bleibt auch *für beschränkte mehrfach zusammenhängende Bereiche richtig, wobei der Rand ganz willkürlich angenommen werden kann und nicht etwa aus rektifizierbaren Kurven bestehen muss.* Der einfache Fall dieser Umkehrung, wenn die Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$ stetig sind und G durch eine reguläre Kurve berandet erscheint, wurde durch Herrn HAAR implizite bewiesen.[3])

Die so allgemein formulierte Umkehrung ermöglicht mir dann ohne weitere Hilfsmittel gewisse auf Herrn HAAR[4]) zurüchgehende Eindeutigkeitssätze[5]) regulärer Variationsprobleme in der Richtung zu verallgemeinern, dass als Grundbereich der zu beweisenden Eindeutigkeit beliebige beschränkte Gebiete angenommen werden können.

Endlich gelang es mir ein von Herrn RADÓ gestelltes Problem[6]) zwar nicht zu lösen, aber doch vorwärtszurücken.

* * *

Satz I. *In einem einfach zusammenhängenden Bereiche G denken wir uns zwei messbare, beschränkte Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$* [7]) *gegeben und behaupten:*

Das Kurvenintegral $\int_C u\,dx - v\,dy$, genommen entlang einer jeden geschlossenen Kurve C, verschwindet dann und nur dann, wenn für jede am Rande R des Gebietes G verschwindende, einer LIPSCHITZ*schen Bedingung genügende Funktion $\xi(x, y)$ die Beziehung*

---

[3]) A. HAAR, Reguläre Variationsprobleme, *diese Acta,* III (1927), S. 224—231; vgl. insb. S. 229—230. Diese Umkehrung wurde durch Herrn HAAR an der erwähnten Stelle zwar nicht ausdrücklich ausgesprochen, sie folgt aber sofort aus dem Beweisgange. Die Methode von HAAR ist aber ohne weiteres nicht für allgemeine Bereiche gangbar.

[4]) Als weiteres Hilfsmittel benutzt Herr HAAR eine Verallgemeinerung eines STEINERschen Satzes über Minimalflächen.

[5]) L. c [3]).

[6]) T. RADÓ, Bemerkung über die Differentialgleichungen zweidimensionaler Variationsprobleme, *diese Acta,* II (1926), S. 147—156; vgl. insb. S. 149.

[7]) Diese Funktionen sollen auch bei Annäherung an den Rand beschränkt bleiben. Die Umkehrung, d. h. die Behauptung, dass aus (2) die Formel (1) folgt, gilt auch für mehrfach zusammenhängende Bereiche.

$$\iint\limits_G \left[u(x, y)\frac{\partial \xi}{\partial y} + v(x, y)\frac{\partial \xi}{\partial x}\right] dx\, dy = 0 \tag{1}$$

gilt.

Beweis. Die Forderung des Verschwindens des Kurvenintegrales kann auch wie folgt ausgesprochen werden: Es gibt eine „LIPSCHITZsche“[8]) Hilfsfunktion $\omega(x, y)$, so dass die Gleichungen

$$u(x, y) = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad v(x, y) = -\frac{\partial \omega}{\partial y} \tag{2}$$

bestehen. Unser Satz sagt also die Äquivalenz von (1) und (2) aus.

Erstens: aus (1) folgt (2). Dies ist der unter [1]) zitierte Satz des Herrn HAAR, den wir der Vollständigkeit halber hier kurz beweisen wollen. Da der Bereich G als einfach zusammenhängend vorausgesetzt war, so genügt es, die Gleichungen (2) nur *im Kleinen* zu verifizieren. Man kann also G als das Quadrat mit den Eckpunkten $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$ annehmen.

Wir betrachten das im Intervalle $(-1, +1)$ vollständige Orthogonalsystem der LEGENDREschen Polynome[9])

$$P_0 \equiv 1, \; P_1(x), \ldots, \; P_n(x), \ldots$$

und bilden

$$p_n(x) = \int_{-1}^{x} P_n(x)\, dx. \tag{3}$$

Es ist bekanntlich $p_n(-1) = p_n(1) = 0$, für $n \geqq 1$. Jede der Funktionen $\xi_{m,n}$

$$\xi_{m,n}(x, y) = p_m(x)\, p_n(y) \quad (m \geqq 1, \; n \geqq 1) \tag{4}$$

verschwindet am Rande des Quadrates und ist eine LIPSCHITZsche Funktion. Da das Bestehen von (1) vorausgesetzt war, so haben wir

$$\iint\limits_G \left[u(x, y)\frac{\partial \xi_{m,n}}{\partial y} + v(x, y)\frac{\partial \xi_{m,n}}{\partial x}\right] dx\, dy = 0 \text{ für } m \geqq 1, \; n \geqq 1. \tag{5}$$

Das Integral (5) kann durch sukzessive teilweise Integration wie folgt umgeformt werden

---

[8]) Wir nennen eine Funktion kurz eine LIPSCHITZsche Funktion, wenn sie in allen Variablen einer LIPSCHITZschen Bedingung genügt.

[9]) Man kann auch im Falle *einer* Variablen die LEGENDREschen Polynome zum Beweise des DU BOIS REYMONDschen Lemmas benützen, wie dies Herr AUERBACH bemerkte.

$$
\begin{aligned}
0 &= \iint_G \left[u \frac{\partial \xi_{m,n}}{\partial y} + v \frac{\partial \xi_{m,n}}{\partial x}\right] dx\,dy = \\
&= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} [u p_m(x) P_n(y) + v P_m(x) p_n(y)]\, dx\,dy = \\
&= -\int_{-1}^{+1} P_n(y)\,dy \int_{-1}^{+1}\left(\int_{-1}^{x} u(s,y)\,ds\right) P_m(x)\,dx - \\
&\quad - \int_{-1}^{+1} P_m(x)\,dx \int_{-1}^{+1}\left(\int_{-1}^{y} v(x,s)\,ds\right) P_n(y)\,dy = \\
&= -\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left[\int_{-1}^{x} u(s,y)\,ds + \int_{-1}^{y} v(x,s)\,ds\right] P_m(x) P_n(y)\,dx\,dy = 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

für $m \geqq 1$, $n \geqq 1$.

Denken wir uns jetzt im Quadrate G die Funktion

$$\varphi(x, y) = \int_{-1}^{x} u(s, y)\,ds + \int_{-1}^{y} v(x, s)\,ds \tag{7}$$

nach dem vollständigen Orthogonalsystem $\{P_m(x).P_n(y)\}$ entwickelt $(m \geqq 0,\ n \geqq 0)$, so verschwinden wegen (6) alle Koofizienten $c_{m,n}$ dieser Entwicklung für $m \geqq 1$, $n \geqq 1$. D. h.

$$\varphi(x, y) \sim f(x) + \psi(y)$$

Wegen der Vollständigkeit folgt daraus

$$\varphi(x, y) = f(x) + \psi(y) \tag{8}$$

bis auf eine Nullmenge. Ich setze nun

$$\omega(x, y) = \int_{-1}^{x} u(s, y)\,ds - \psi(y) \tag{9}$$

woraus man sofort auf

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = u(x, y) \tag{10}$$

fast überall schliesst. Weiter ergibt sich wegen (7) und (8)

$$\omega(x, y) = f(x) - \int_{-1}^{y} v(x, s)\,ds \tag{11}$$

und dies zieht die Gleichung

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = -v(x, y) \tag{12}$$

nach sich. Da die Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$ als beschränkt vorausgesetzt waren, so muss bekannterweise $\omega(x, y)$ stetig sein und sogar einer Lipschitzschen Bedingung genügen. Somit ist der Haarsche Satz bewiesen.

Es gibt mehrere Wege, die zur Verifikation des zweiten Teiles unserer Behauptung, für den Fall eines durch eine einfache geschlossene reguläre Jordankurve berandeten Bereiches G führen könnten. Nun wollen wir aber die verlangte Umkehrung für ganz allgemeine einfach oder auch mehrfach zusammenhängende Gebiete beweisen und da benötige ich einen Satz, der in meiner eben in den *Fundamenta Mathematicae* (Bd. XII) erscheinenden Arbeit „Über stetige Abbildungen" zu finden ist; diesen Satz möchte ich zunächst angeben.

Vermöge der Lipschitzschen Funktionen

$$\omega = \varphi(x, y), \quad \xi = \psi(x, y), \tag{13}$$

(φ, ψ Lipschitzsche Funktionen)

werde das in der (x, y)-Ebene gelegene Quadrat Q auf eine Menge in der (ω, ξ)-Ebene abgebildet. Das Zeichen für diese Abbildung sei der Buchstabe Φ; somit bezeichnet $\Phi(A)$ das Bild der Menge A. Insbesondere geht der Rand R des Quadrates in eine Bildkurve $\Phi(R)$ über. Für einen beliebigen nicht auf $\Phi(R)$ liegenden Punkt $P(\omega, \xi)$ mit den Koordinaten ω, ξ kann seine Ordnung $n(\omega, \xi)$ in bezug auf $\Phi(R)$ definiert werden; $n(\omega, \xi)$ ist eine summable Funktion. Es gilt dann:

$$\iint\limits_{Q} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}\, dx\, dy = \iint n(\omega, \xi)\, d\omega\, d\xi, \tag{14}$$

wobei das rechtsstehende Integral über die ganze (ω, ξ)-Ebene zu erstrecken ist. Dies ist der eben erwähnte Satz.

Ich will jetzt zeigen, dass Formel (14) auf beliebige beschränkte Bereiche G [10]) verallgemeinert werden kann.[11]) Wir

[10]) Herr Young hat in seinen Arbeiten eine andere Formel aufgestellt (siehe z. B. W. H. Young, On a new set of conditions for a formula for an area, *Proc. London Math. Soc.* 21 (1922), S. 75—94). Seine Formel lautet:

$$\iint\limits_{Q} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}\, dx\, dy = \int\limits_{\Phi(R)} \omega\, d\xi = \int\limits_{\Phi(R)} \xi\, d\omega\,; \tag{14'}$$

Die rechten Seiten von (14) und (14') stimmen also überein; in ganz einfachen Fällen hat dies schon Herr Young bemerkt. Im Falle eines durch eine geschlossene, doppelpunktlose Kurve berandeten Bereiches könnte man — zum Beweise der Umkehrung — mit der Formel von Young auskommen.

[11]) In meiner oben erwähnten Arbeit wurde nur der Fall des Quadrates betrachtet. Nach den nun folgenden Ausführungen kann man die dort behandelten Substitutionsformeln neuer Veränderlichen auch für allgemeine Bereiche entwickeln.

betrachten also den Fall eines *beliebigen* Gebietes G und setzen (13) im ganzen, *abgeschlossenen* G voraus. Man stelle jetzt G als Summe einer Folge von Quadraten $\{Q_m\}$ dar, die sich nirgends in *endlicher* Entfernung vom Rande R des Gebietes G häufen, und es bedeute r_m den Rand von Q_m. Weiter machen wir die einschränkende Annahme, dass der Rand R in eine Nullmenge $\Phi(R)$ übergeht. Ein Punkt $P(\omega, \xi)$, der auf keine der Mengen $\Phi(r_m)$, wie auch nicht auf $\Phi(R)$ zu liegen kommt, besitzt in bezug auf alle $\Phi(r_m)$ eine wohldefinierte Ordnung $n_m(\omega, \xi)$. Man setze[12])

$$n(\omega, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} n_m(\omega, \xi); \tag{14*}$$

die Summe rechts hat für fast jeden Punkt $P(\omega, \xi)$ einen Sinn, da fast überall bei festem $P(\omega, \xi)$ nur endlich viele $n_m(\omega, \xi)$ von Null verschieden sind. Um dies einzusehen, bilde man die Funktion $N(\omega, \xi)$, die gleich ist der Anzahl der in G liegenden, vermöge der Abbildung Φ zu $P(\omega, \xi)$ gehörenden Urbilder. Auf ähnliche Weise definiere man die Funktionen $N_m(\omega, \xi)$, indem man nur diejenigen zu $P(\omega, \xi)$ gehörenden Urbilder zusammenfasst, die in Q_m liegen. Aus der Definition folgt, dass fast überall

$$N(\omega, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} N_m(\omega, \xi) \tag{15}$$

ist. Es bestehen nun die folgenden Gleichungen und Ungleichungen

$$|n_m(\omega, \xi)| \leq N_m(\omega, \xi), \tag{16}$$

$$\iint_G \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \right| dx\, dy = \iint N(\omega, \xi)\, d\omega\, d\xi,\text{[13])} \tag{17}$$

wo das rechtsstehende Integral über die ganze (ω, ξ)-Ebene zu erstrecken ist. Die Ungleichung (16) folgt aus Satz III meiner oben zitierten Arbeit.

Da wir ausdrücklich vorausgesetzt haben, dass die Funktionen φ, ψ auch *am Rande* R Lipschitzsche Funktionen sind, so existiert in (17) das linksstehende Integral, also auch das rechtsstehende; $N(\omega, \xi)$ ist summabel. Aus (14*), (15) und (16) folgt nun

$$|n(\omega, \xi)| \leq N(\omega, \xi). \tag{18}$$

---

[12]) Eine andere Art der Definition der Funktion $n(\omega, \xi)$ als Summe der „Indexe" der zum Punkte $P(\omega, \xi)$ gehörenden Urbilder folgt aus meiner oben zitierten Arbeit (siehe insbesondere Satz III)

[13]) St. Banach, Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie, *Fundamenta Mathematicae* **7** (1925), pp. 225—236, Theorem II und III.

Für jedes Q_m gilt nach (14)

$$\iint\limits_{Q_m} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} dx\,dy = \iint n_m(\omega, \xi)\, d\omega\, d\xi \tag{19}$$

woraus wir durch Summation, wegen (14), (14*), (15), (16), (17),

$$\iint\limits_{G} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} dx\,dy = \iint n(\omega, \xi)\, d\omega\, d\xi \tag{20}$$

erhalten.

Ich möchte gleich hier eine für die Anwendungen wichtige Bemerkung machen. Die Voraussetzung, dass die Funktionen φ, ψ auch am Rande der Lipschitzschen Bedingung genügen, lässt sich durch die folgende weniger fordernde ersetzen:

1⁰ φ, ψ sind in jedem ganz im Innern gelegenen Teilbereiche von G Lipschitzsche Funktionen,

2⁰ φ, ψ sind stetig im abgeschlossenen Bereiche $\bar{G}$,

3⁰ das Integral $\iint\limits_{G} \left| \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \right| dx\,dy$ existiert,

4⁰ der Rand R geht in eine Nullmenge über.

Wir können jetzt sehr leicht den zweiten Teil unseres Satzes beweisen. Es soll also gezeigt werden, dass aus den Gleichungen (2) die Formel (1) folgt. Dabei genügt es z. B., nach der eben gemachten Bemerkung, die stetige Funktion $\omega(x, y)$ nur in endlicher Entfernung vom Rande als eine Lipschitzsche Funktion vorauszusetzen, aber so, dass $\iint\limits_{G} \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$ endlich bleibt.

Es sei jetzt $\xi(x, y)$ irgend eine am Rande R verschwindende, sonst denselben Bedingungen wie $\omega(x, y)$ genügende Funktion. Es ist dann wegen (2), nach (20),

$$\iint\limits_{G} \left[u \frac{\partial \xi}{\partial y} + v \frac{\partial \xi}{\partial x}\right] dx\,dy = \iint\limits_{G} \frac{\partial(\omega, \xi)}{\partial(x, y)} dx\,dy = \iint n(\omega, \xi)\, d\omega\, d\xi, \tag{21}$$

da nämlich — wegen der über $\omega(x, y)$ und $\xi(x, y)$ gemachten Voraussetzungen — das Integral $\iint\limits_{G} \left| \frac{\partial(\omega, \xi)}{\partial(x, y)} \right| dx\,dy$ existiert und da $\Phi(R)$ eine Nullmenge ist.[14])

Nun wollen wir zeigen, dass überall mit Ausnahme von $\Phi(R)$ $n(\omega, \xi) = 0$ gilt. Denn zwei Punkte $P_1(\omega_1, \xi_1)$, $P_2(\omega_2, \xi_2)$, die durch

[14]) $\Phi(R)$ ist eine auf der ω-Axe liegende Strecke.

einen $\Phi(R)$ nicht schneidenden Linienzug verbunden werden können, besitzen in bezug auf $\Phi(R)$ dieselbe „verallgemeinerte“ Ordnung: $n(\omega_1, \xi_1) = n(\omega_2, \xi_2)$. Dies sieht man sofort ein (und es ist auch bekannt), wenn $\Phi(R)$ ein System von Kurven ist. Um sich dieser Eigenschaft auch im allgemeinen Falle zu vergewissern, brauchen wir uns nur der Tatsache zu erinnern, dass der Bereich G als Summe einer Folge von Quadraten $\{Q_m\}$ dargestellt wurde, die sich in endlicher Entfernung von R nirgends häufen. Fassen wir also diejenigen Quadrate zusammen, die vom Rande eine Entfernung $> \frac{1}{r}$ haben, so bilden sie ein Gebiet G_r, dessen Rand R_r, welcher aus einer endlichen Anzahl von Kurven besteht, gleichmässig gegen R konvergiert. Der Linienzug, welcher die zwei festgewählten Punkte P_1, P_2 verbindet, wird also für genügend grosses r auch R_r nicht schneiden, also ist die Ordnung von P_1 und P_2 in bezug auf R_r dieselbe, woraus durch Grenzübergang $n(\omega_1, \xi_1) = n(\omega_2, \xi_2)$ folgt. Nun ist in unserem Falle $\Phi(R)$ — als Menge betrachtet — eine Strecke. Jeder nicht auf $\Phi(R)$ liegende Punkt lässt sich mit dem unendlichfernen Punkte durch einen Halbstrahl verbinden, ohne dabei $\Phi(R)$ zu passieren. Der unendlich ferne Punkt hat aber offensichtlich die Ordnung Null. Das Integral in (21) ist also Null, w. z. b. w.

Ich gebe jetzt einige Anwendungen dieser Umkehrung.

Satz II. *Vorgegeben eine mit ihren zweiten Ableitungen stetige Funktion $f(x, y, p, q)$. Das Funktionensystem $z(x, y)$, $\omega(x, y)$ genüge den Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned} f_p\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial \omega}{\partial y} \\ f_q\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial \omega}{\partial x} \end{aligned} \tag{22}$$

im Gebiete G. Betrachten wir dann eine Schar von Lipschitz*schen Funktionen $z_\varepsilon(x, y)$, die von einem Parameter ε abhängen, am Rande R mit $z(x, y)$ übereinstimmen und ist weiter*

$$\left|\frac{\partial z_\varepsilon(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\right| \leqq M \,.\, \varepsilon^\alpha, \quad \alpha > \frac{1}{2}, \tag{23}$$

so verschwindet die Ableitung $I'(0)$ der Funktion

$$I(\varepsilon) = \iint f\left(x, y, \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x}, \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial y}\right) dx\, dy. \tag{24}$$

Beweis. Es ist

$$I(\varepsilon)-I(0)=\iint\limits_G\left[f\left(x,y,\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x},\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial y}\right)-f\left(x,y,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_G\left[f_p\left(x,y,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\right.$$

$$\left.+f_q\left(x,y,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]dx\,dy+ \tag{25}$$

$$+\iint\limits_G f_{pp}(x,y,\bar p_\varepsilon,\bar q_\varepsilon)\left(\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2f_{pq}(x,y,\bar p_\varepsilon,\bar q_\varepsilon)\left(\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+$$

$$+f_{qq}(x,y,\bar p_\varepsilon,\bar q_\varepsilon)\left(\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2dx\,dy,$$

wo $\bar p_\varepsilon(x,y)$, $\bar q_\varepsilon(x,y)$ zwischen $\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial x}$, bzw. zwischen $\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial y}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ liegen. Nun verschwindet das erste Integral rechts in (25) infolge des Satzes I. Das zweite Integral ist $<$ konst. $M\varepsilon^{2\alpha}$. Daraus folgt

$$\left|\frac{I(\varepsilon)-I(0)}{\varepsilon}\right|<\text{konst. } M\varepsilon^{2\alpha-1}, \tag{26}$$

woraus sich, wegen $2\alpha>1$, $I'(0)=0$ ergibt.

Bemerkung. Wir nehmen jetzt an, dass f von x,y nicht abhängt, also die Form $f(p,q)$ besitzt. Gelegentlich seiner Untersuchungen über die Differentialgleichungen zweidimensionaler Variationsprobleme hat Herr Radó folgende Gleichungssysteme

$$p^0f_q(p^0,q^0)=\frac{\partial\omega_1}{\partial x};\ f(p^0,q^0)-p^0f_q(p^0,q^0)=\frac{\partial\omega_1}{\partial y} \qquad 1^0$$

$$f(p^0,q^0)-q^0f_p(p^0,q^0)=\frac{\partial\omega_2}{\partial x};\ q^0.f_q(p^0,q^0)=\frac{\partial\omega_2}{\partial y} \qquad 2^0 \tag{27}$$

zu den Haarschen Gleichungen

$$f_q(p^0,q^0)=\frac{\partial\omega_3}{\partial x};\ f_p(p^0,q^0)=\frac{\partial\omega_3}{\partial y}, \qquad 3^0$$

hinzugefügt,[15]) wo mit $p^0(x,y)$, $q^0(x,y)$ die Ableitungen der Lösung $z^0(x,y)$ bezeichnet werden und $\omega_1(x,y)$, $\omega_2(x,y)$, $\omega_3(x,y)$ drei Hilfsfunktionen bedeuten. Er hat dann die Frage der Abhängigkeit dieser Systeme aufgeworfen; ist die Funktion $z(x,y)$ zweimal

[15]) T. Radó: Bemerkungen über die Differentialgleichungen zweidimensionaler Variationsprobleme, *diese Acta*, Bd. II (1926), S. 147—156.

differenzierbar, so ist die Antwort evident (vgl. l. c. [15]), insb. S. 149.) Ich werde nun zeigen:

Falls die ersten Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ *einer* HÖLDER*schen Bedingung mit einem Exponenten* $\alpha > \frac{1}{2}$ *genügen, so sind die zwei ersten Systeme vom dritten abhängig.*

Herr RADÓ wird nämlich zu den Systemen 1^0 und 2^0 geführt, indem er gewisse Variationsflächen $z_\varepsilon(x, y)$ betrachtet.[16] Die Bedingung $I'(0) = 0$ ist dann mit dem Bestehen der Gleichungssysteme 1^0, 2^0 gleichbedeutend. Nun kann man sich leicht überzeugen, dass in diesem Falle die Variationsflächen $z_\varepsilon(x, y)$ den im Satze II formulierten Bedingungen genügen. Also ist $I'(0) = 0$ und daraus folgt 1^0 und 2^0

Auch gewisse Eindeutigkeitssätze regulärer Variationsprobleme können verallgemeinert werden.[17] Nach dem Vorbilde der Theorie der Potentialfunktionen kann man fragen, ob die Lösung für beliebige beschränkte Gebiete eindeutig bestimmt ist. Dabei muss man über das Verhalten der partiellen Ableitungen der Lösung $z(x, y)$ in der Nähe des Randes gewisse Voraussetzungen machen. Es gilt der

Satz III. *Wenn die stetigen Funktionen* $z(x, y)$, $\omega(x, y)$

1^0 *den Gleichungen* (22) *genügen,*

2^0 $f_{pp} > 0$, $f_{pp} \cdot f_{qq} - f_{pq}^2 > 0$ *ist,*

3^0 $z(x, y)$, $\omega(x, y)$ *in endlicher Entfernung vom Rande* LIPSCHITZ*sche Funktionen sind und*

$$\iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy < \infty$$

ist, so gibt es keine zweite, am Rande R mit $z(x, y)$ *übereinstimmende, Funktion* $\bar{z}$, *die denselben Bedingungen* 1^0, 2^0, 3^0 *genügt.*

Beweis. Man setze hier und im folgenden zur Abkürzung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q, \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \bar{p}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = \bar{q},$$

und es bedeute weiter $\tilde{p}$ bzw. $\tilde{q}$ eine Zahl zwischen $p, \bar{p}$ bezw. $q, \bar{q}$. Für jede von $z(x, y)$ verschiedene Funktion $\bar{z}(x, y)$ gilt:

[16]) Ich verweise, was die Details anbetrifft, auf die unter [15]) zitierte Arbeit.

[17]) Siehe A. HAAR: Über reguläre Variationsprobleme, *diese Acta* Bd. III (1927), S. 224–234.

$$\begin{gathered}\iint\limits_G \left[f(x,y,\bar p,\bar q) - f(x,y,p,q)\right] dx\,dy = \\ = \iint\limits_G \left[f_p(x,y,p,q)(\bar p - p) + f_q(x,y,p,q)(\bar q - q)\right] dx\,dy + \\ + \iint\limits_G \left[f_{pp}(x,y,\tilde p,\tilde q)(\bar p - p)^2 + 2 f_{pq}(x,y,\tilde p,\tilde q)(\bar p - p)(\bar q - q) + \right. \\ \left. + f_{qq}(x,y,\tilde p,\tilde q)(\bar q - q)^2\right] dx\,dy.\end{gathered} \tag{28}$$

Das zweite Integral rechts ist positiv, da das Problem laut 2⁰ regulär ist. Des erste Integral rechts verschwindet aber wegen des Satzes I. Also gilt

$$\iint\limits_G \left[f\left(x, y, \frac{\partial \bar z}{\partial x}, \frac{\partial \bar z}{\partial y}\right)\right] dx\,dy > \iint\limits_G \left[f\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\right] dx\,dy \;{}^{18)} \tag{29}$$

Wäre auch $\bar z(x,y)$ eine Lösung, so müsste auch die zu (29) umgekehrte Ungleichung gelten, was unmöglich ist.

Es wäre sicher sehr interessant, wenn man sich von der Bedingung 3⁰ dieses Satzes befreien und die Eindeutigkeit der am Rande nur stetigen Lösungen zeigen könnte. Für Bereiche, die durch doppelpunktlose, rektifizierbare Kurven J berandet werden, kann man den folgenden weniger reichenden Satz aussprechen:

Satz III′. *Zwei stetige Lösungen z und $\bar z$, die am Rande übereinstimmen, sind identisch, wenn ihre Differenz einschliesslich des Randes einer* Lipschitz*bedingung genügt.*[19])

Beweis. Es sei $\{J_n\}$ eine Schaar im Innern unseres Bereiches gelegener Kurven, die gegen J gleichmässig konvergieren. Sei

$$\begin{aligned} x &= x_n(t), & y &= y_n(t) \\ x &= x(t), & y &= y(t) \end{aligned} \qquad (0 \leq t \leq 1) \tag{30}$$

die Darstellung von J_n bzw. von J. Man setze noch zur Abkürzung

$$z - \bar z = \xi;$$

$$\omega(x_n(t), y_n(t)) = \omega_n(t)\,;\; \xi(x_n(t), y_n(t)) = \xi_n(t). \tag{31}$$

Den Beweis wollen wir indirekt führen. Wir nehmen also die Existenz zweier verschiedener, am Rande übereinstimmender Lö-

---

[18]) Dieser Beweis ist so geführt worden, als ob $\iint\limits_G f\left(x, y, \frac{\partial \bar z}{\partial x}, \frac{\partial \bar z}{\partial y}\right)$ existierte. Existieren aber die Integrale (29) nicht, so muss man nur einen ähnlichen Grenzübergang machen, wie beim nachfolgenden Satze III′.

[19]) Wir müssen auch annehmen, dass die entsprechenden Funktionen ω stetig sind.

sungen $z, \bar{z}$ an, deren Differenz $\xi(x, y)$ eine LIPSCHITZsche Funktion ist. Es gibt dann einen *ganz im Innern* gelegenen Bereich T, wo auch die Ableitungen verschieden sind. Sei G_n das Innere von J_n. Dann gilt

$$\begin{aligned}\iint_{G_n} \left[f(\bar{p}, \bar{q}) - f(p, q)\right] dx\, dy = \\ = \iint_{G_n} \left[f_p(p, q)(\bar{p} - p) + f_q(p, q)(\bar{q} - q)\right] dx\, dy + \\ + \iint_{G_n} \left[f_{pp}(\tilde{p}, \tilde{q})(\bar{p} - p)^2 + 2 f_{pq}(\tilde{p}, \tilde{q})(\bar{p} - p)(\bar{q} - q) + \right. \\ \left. + f_{qq}(\tilde{p}, \tilde{q})(\bar{q} - q)^2\right] dx\, dy.\end{aligned} \tag{32}$$

Nun ist für genügend grosse $n > N$ der Bereich T in G_n enthalten, woraus

$$\begin{aligned}\iint_{G_n} \left[f(\bar{p}, \bar{q}) - f(p, q)\right] dx\, dy \geqq \\ \geqq \iint_{G_n} \left[f_p(p, q)(\bar{p} - p) + f_q(p, q)(\bar{q} - q)\right] dx\, dy + \delta\end{aligned} \tag{33}$$

folgt, wenn wir

$$\begin{aligned}\delta = \iint_T \left[f_{pp}(\tilde{p}, \tilde{q})(\bar{p} - p)^2 + 2 f_{pq}(\tilde{p}, \tilde{q})(\bar{p} - p)(\bar{q} - q) + \right. \\ \left. + f_{qq}(\tilde{p}, \tilde{q})(\bar{q} - q)^2\right] dx\, dy\end{aligned} \tag{34}$$

setzen. Wir beweisen jetzt

$$\lim \iint_{G_n} \left[f_p(p, q)(\bar{p} - p) + f_q(p, q)(\bar{q} - q)\right] dx\, dy = 0. \tag{35}$$

In der Tat, es ist wegen (22), (31),

$$\iint_{G_n} [f_p(p, q)(\bar{p} - p) + f_q(p, q)(\bar{q} - q)]\, dx\, dy = \iint_{G_n} \frac{\partial(\omega, \xi)}{\partial(x, y)}\, dx\, dy. \tag{36}$$

Auf dieses Integral wenden wir die in Anmerkung [10]) zitierte Formel von YOUNG an und erhalten wegen (30), (31)

$$\iint_{G_n} \frac{\partial(\omega, \xi)}{\partial(x, y)}\, dx\, dy = \int_{J_n} \omega\, d\xi = \int_0^1 \omega_n(t)\, d\xi_n = \int_0^1 \omega_n(t)\, \xi_n'(t)\, dt. \tag{37}$$

Nun war die Differenz ξ als eine LIPSCHITZsche Funktion vorausgesetzt, d. h.

$$|\xi_n'(t)| \leqq M \quad (n = 1, 2, \ldots, 0 \leqq t \leqq 1). \tag{38}$$

Weiter ist wegen der Stetigkeit der Funktion ξ

$$\xi_n(t) \rightarrow \xi(t)\,^{20)} \tag{39}$$

woraus für beliebige $t_1 < t_2$

$$\lim \int_{t_1}^{t_2} \xi_n'(t)\,dt = \lim\,(\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1)) = \xi(t_2) - \xi(t_1) = 0 \tag{40}$$

folgt. (38) und (40) sagen aus, dass die Funktionen $\xi_n'(t)$ schwach gegen Null konvergieren, woraus wir auf

$$\lim \int_0^1 \omega_n(t)\,\xi_n'(t)\,dt = \lim \int_0^1 \omega(t)\,\xi_n'(t)\,dt = 0 \tag{41}$$

schliessen. Indem wir also in (33) zur Grenze übergehen, bekommen wir

$$\lim \iint_{G_n} [f(\overline{p}, \overline{q}) - f(p, q)]\,dx\,dy \geqq \delta > 0. \tag{42}$$

Es ist also für genügend grosses n

$$\iint_{G_n} f(\overline{p}, \overline{q})\,dx\,dy > \iint_{G_n} f(p, q)\,dx\,dy. \tag{43}$$

Da auch $\overline{z}$ eine Lösung ist, so müsste die auch umgekehrte Ungleichung bestehen, was unmöglich ist.

Wien, am 19. Februar 1928.

(Eingegangen am 22. Februar 1928)

[20]) $\xi(t) = \varphi[x(t), y(t)]$; $\omega(t) = \psi[x(t), y(t)]$.